Aufgaben HP4

A1 **1**. Gib die Axiome von Kolmogoroff an.

2. Bei einem gezinkten Würfel sind Wahrscheinlichkeiten durch folgende Tabelle angegeben:

ω	1	2	3	4	5	6
f	$\frac{a}{4}$	2^{-5}	a^2	2^{-5}	$\frac{a}{8}$	$\frac{a}{8}$

a) Berechne a so, dass die Tabelle eine W-Verteilung definiert. (Ergebnis: $a = \frac{3}{4}$)

b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse
A: 'Augenzahl ist gerade', B: 'Augenzahl ist durch 3 teilbar',
$C = \overline{A}, D = A \cap B, E = \overline{A} \cup \overline{B}$
Sind A und B abhängig? Begründe.

A2 Macht Stress krank? Die Tafel zeigt bei einem Test mit 23 Affen folgendes Resultat. S heiße gestresst und K krank.

	K	$\overline{K}$	Summe
S	7	4	11
$\overline{S}$	1	11	12
Summe	8	15	23

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für K, wie groß für S?

b) Überprüfe, ob K von S unabhängig ist.

c) Wie groß ist die W., dass man als Nichtkranker gestresst ist?
d) Wie groß ist die W., dass man als Kranker gestresst ist?
e) Mit welcher W., wird ein Gestresster krank?

A3 In einem Korb K_1 sind 3 rote, 5 blaue und 2 gelbe Ostereier. In einem zweiten Korb K_2 sind 4 rote, 4 blaue und 2 gelbe Ostereier.

a) Erst wird ein Korb zufällig ausgewählt und dann ein Ei blind gezogen.
1)Wie groß ist die W., ein rotes Ei zu ziehen? Zeichne zuerst einen Baum.
2) Es wurde ein rotes Ei gezogen. Mit welcher W. stammt es aus dem 2. Korb?

b) Es werden nun alle Eier aus den beiden Körben in einen großen Korb K gelegt.
1) Man zieht 5 Eier mit einem Griff. Mit welcher W. hat man 3 blaue und 2 rote Eier gezogen?
2) Es werden 5 Eier mit Zurücklegen entnommen.
Mit welcher W. hat man genau 3 rote Eier entnommen?
Mit welcher W. hat man mindestens 4 rote Eier entnommen?
3) Wie oft muss man mindestens Eier mit Zurücklegen entnehmen, damit man mit einer W. von mindestens 95% wenigstens ein rotes Ei entnommen hat?
4) Man entnimmt nun zufällig Ei für Ei dem großen Korb K bis der Korb leer ist und legt die Eier in eine Reihe, wobei man die gleichfarbigen Eier nicht unterscheiden kann.
Wie viele Anordnungen sind möglich? Wie groß ist die W., dass die roten Eier beieinander liegen?
5) Es wird nun folgendes Spiel vereinbart. Man zieht zweimal blind mit Zurücklegen aus dem Korb K. Sind die beiden Eier rot, gewinnt man 5€, sind sie blau 3€ und sind sie gelb 6€, ansonsten gewinnt man nichts. Bei welchem Einsatz ist das Spiel fair?

Lösung:

A1 1.

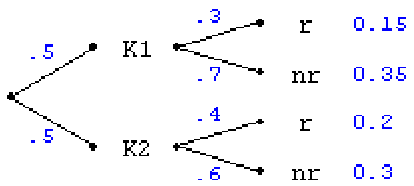
$P(A) \geq 0; \quad P(\Omega) = 1 \quad P(A \dot{\cup} B) = P(A) + P(B)$ 2a). $\frac{a}{4} + \frac{1}{32} + a^2 + \frac{1}{32} + \frac{a}{8} + \frac{a}{8} = 1 \Leftrightarrow a^2 + \frac{a}{2} + \frac{1}{16} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a + \frac{1}{4})^2 = 1 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = \frac{3}{4}$ 2b) $P(A) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{3}{32} = \frac{5}{32}$ $P(B) = \frac{9}{16} + \frac{3}{32} = \frac{21}{32}$ $P(C) = 1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32}$

$P(D) = P(6) = \frac{3}{32}$ $P(E) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(D) = \frac{29}{32}$ $P(A \cap B) = \frac{3}{32} \neq \frac{5}{32} \cdot \frac{21}{32} \Rightarrow$ A, B abhängig.

A2 a) $P(K) = \frac{8}{23}$ $P(S) = \frac{11}{23}$ b) $P(K \cap S) = \frac{7}{23} \neq \frac{8}{23} \cdot \frac{11}{23}$ also sind K und S abhängig.

c) $P_{\overline{K}}(S) = \frac{4}{15}$ d) $P_K(S) = \frac{7}{8}$ e) $P_S(K) = \frac{7}{11}$



A3 a) 1) $P(r) = \frac{1}{2} \cdot 0,3 + \frac{1}{2} \cdot 0,4 = 0,35$

2) $P_r(K2) = \frac{P(K2 \cap r)}{P(r)} = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,35} = 0,5714$

b) $K: 7r, 9b, 4g$ 1) $P = \frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{84 \cdot 21}{15504} = 0,1138$

2) Bernoulli – Kette der Länge n = 5; Treffer = rot $p = \frac{7}{20} = 0,35$

$P(T = 3) = \binom{5}{3} 0,35^3 \cdot 0,65^2 = 10 \cdot 0,042875 \cdot 0,4225 = 0,1811$

$P(T \geq 4) = P(T = 4) + P(T = 5) = \binom{5}{4} 0,35^4 \cdot 0,65 + 0,35^5 = 0,0488 + 0,0053 = 0,0541$

3) $P(T \geq 1) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(T = 0) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(T = 0) \leq 0,05 \Leftrightarrow 0,65^n \leq 0,05 \Leftrightarrow$

$n \ln 0,65 \leq \ln 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,65} \approx 6,95$ Man muss mindestens 7 mal ein Ei entnehmen.

4) $|\Omega| = \frac{20!}{9!7!4!} = 55.426.800$ $|A| = \frac{14!}{9!4!} = 10.010 \Rightarrow P(A) = \frac{10010}{55426800} = 1,8059 \cdot 10^{-4}$

5) $P(rr) = 0,35^2 = 0,1225$ $P(bb) = 0,45^2 = 0,2025$ $P(gg) = 0,2^2 = 0,04$

Gewinnerwartung $= 5 \cdot 0,1225 + 3 \cdot 0,2025 + 6 \cdot 0,04 = 1,46$

Der Einsatz muss also 1,46 € betragen, damit das Spiel fair ist.