Welche arithmetischen Operationen spiegeln Wirklichkeit ab?

Manfred Hörz

Welche Interessen bewegten die Menschen, Zahlen einzuführen? Da könnte schon mal die Sorge wichtig gewesen sein.
Vögel können feststellen, ob gelegte Eier fehlen. Falls Eier fehlen, legen sie erneut. Sie können also in gewissem Ausmaß Mächtigkeiten unterscheiden. Auch Schafe scheinen Wiesen mit viel oder wenig Gras unterscheiden zu können.
Das Merken von wichtigen Informationen scheint eher zum Teil auf Ordnungszahlen hinzudeuten. Man vermutet, dass Honigbienen, um sich lange Flugstrecken zu merken, Merkzeichen „zählen". Bei einer Wegbeschreibung verwenden wir auch oft Ordinalzahlen: „Biegen Sie an der dritten Ampel nach links ab..." Ähnliche Orientierungen waren sicherlich schon in sehr frühen Zeiten von Belang. Auf Knochen fand man Einritzungen, die auf ein Abzählen hindeuten, vielleicht auf ein Abzählen von Tagen. Der zyklische Zeitablauf wurde sehr früh bemerkt. Vorhersagen konnte man bspw. durch das Zählen von Tagen ab einem markanten Ereignis. Beispielsweise zur Berechnung der günstigsten Zeit der Aussaat. Es gibt auch soziale Gründe für das Zählen: beim Gütertausch, bei der gerechten Verteilung.

Egal, welche Gründe man auch angeben mag, gezählt wurden 'Gegenstände', wiederkehrende Ereignisse, Entfernungen, also Wirkliches und diese wurden meist durch Symbole dargestellt, Kreise, Striche oder Ähnliches.

Die meisten Tiere, die zählen können, gewisse Stammesgesellschaften und Babys können jedoch nur bis 2, 3 oder vier zählen.

Bei größeren Mengen ist daher nützlich Gruppierungen einzuführen, um die Übersicht zu behalten. Zählt man bspw, bis drei, so kann man 7 bspw. in zwei Dreiergruppen und ein Einzelnes zergliedern.

||| ||| |

Auf diese Weise kann man bis 9 zählen: 3 Dreiergruppen. Man zählt also konkrete Dinge und Gruppen von Dingen. Hier fangen bereits die ersten Probleme an, da eine Gruppe von Dingen sicherlich weniger konkret ist als Dinge. Sie beinhalten eine besondere Begriffsbildung, nämlich dass Zusammenfassungen selbst als „Objekte" betrachtet werden, und zwar Objekte 2. Stufe (Metaobjekte), die wieder zählbar sind. Will man jedoch alle Einzeldinge dann zählen (vorausgesetzt man besitzt genügend große Zahlzeichen), muss man die Ebenen wechseln: Bezeichnen wir die Metaobjekte (3-Gruppe) mit M, so zählt man 3 M. Nun wechselt man zum Inhalt eines jeden Metaobjekts und zählt deren Objekte: wieder 3, also: 3 und 3 und 3.
Oder kürzer : 3 mal 3 = 9

||| ||| |||

Die nächste Stufe, die Potenzierung 3^2 erreicht man nicht mehr ohne Sprache. Denn wo sollte man da zwei Gruppen von Gruppen erkennen, oder zwei Metametaobjekte, wie der Exponent anzeigt? Nur wenn man die Operationen, die Addition und die Multiplikation sprachlich durch Symbole ausdrückt, erkennt man zwei „Dinge“:

3 mal 3.

Hier kommt *zweimal* das Zahlzeichen 3 vor. In der Wirklichkeit jedoch nicht. Natürlich auch bei „2 mal 3“, nur lässt sich das nicht unter einen Begriff bringen, da die Gruppen nicht gleich sind: eine 2-Gruppe und eine 3-Gruppe.

Die 3 kommt also in der Wirklichkeit 3 mal vor , aber im Zeichen „3 mal 3“ nur zweimal. Und das läßt sich symbolisch darstellen als „2 mal 3“, wobei das „mal“ hier etwas anderes bezeichnet als beim ersten Mal. Das muß durch ein anderes Zeichen eindeutig gemacht werden.

Man führt bspw für das erste Mal ein Sternchen * ein und für das zweite Mal ein Paragraphzeichen §. Dann lautet der erste Satz: „3 mal 3“ = 3*3 und der zweite
„2 mal 3“ = 2§3

oder wie wir es gewohnt sind: $3\cdot 3$ und 3^2 .

Das dürfte auch der intime Grund für so viele Rechenfehler sein, dass nämlich diese zweite Operation eine ganz anders geartete als die erste ist.

Die erste ist objektmäßig nachvollziehbar, die zweite nur sprachlich (logisch).

Hat man einmal die neue sprachliche Methode verstanden, so hält einen nichts mehr zurück, beliebig viele höhere Operationen einzuführen. Um das noch besser zu sehen, ist es günstig, auch für Vereinigungen verschiedener Gruppierungen ein Zeichen einzuführen. Will man bspw. eine 2-Gruppe und eine 3-Gruppe zusammenführen, so ist es üblich, dies durch ein + zu symbolisieren: 2 + 3.

Es ergibt sich so folgende allgemeine Methode:

$a+a=:2\cdot a$ und verallgemeinert: $\underbrace{a+a+...+a}_{n-mal}=:n\cdot a$

Falls die beiden Zeichen n und a gleich sind:

$a\cdot a=:a^2$ und verallgemeinert: $\underbrace{a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{n-mal}=:a^n$

Falls die beiden Zeichen n und a gleich sind:

$a^a=:2\#a$ und verallgemeinert: $a^{(a^a)}...=:n\#a$

und so weiter....

Man hat also die Rekursion:

$$O_{n+1}(1,a):=a \quad O_{n+1}(2,a):=O_n(a,a) \quad O_{n+1}(m+1,a):=O_n(O_{n+1}(m,a),a)$$

Diese ist 'rechtsadjunktiv' definiert. Entsprechend könnte man auch linksadjunktiv definieren:

$$O_{n+1}(1,a):=a \quad O_{n+1}(2,a):=O_n(a,a) \quad O_{n+1}(m+1,a):=O_n(a,O_{n+1}(m,a))$$

Ist die Operation O_n kommutativ, so sind beide Definitionen identisch. (Das Gleiche gilt, falls sie assoziativ ist.)

Das trifft aber für die Potenz bspw. nicht zu.

Ist zum Bsp. $O_1(a,b)=a+b$, so ist $O_2(2,a)=O_1(a,a)=a+a$ oder wie üblich $2\cdot a$ und induktiv dann $O_2(m+1,a)=(m+1)\cdot a=m\cdot a+a=O_1(O_2(m,a),a)$
$O_3(2,a)=O_2(a,a)=a\cdot a$ oder wie üblich a^2 Induktiv geht es dann weiter:
$O_3(m+1,a)=a^{m+1}=a^m\cdot a=O_3(m,a)\cdot a=O_2(O_3(m,a),a)$ Da die Multiplikation O_2 kommutativ ist, ist es egal, ob man von links oder rechts adjungiert.

Die Potenz ist aber nicht mehr kommutativ, da bspw. $2^3\neq 3^2$, so dass es nun zwei verschiedene Fortsetzungen für die „Hyperpotenz“ gibt, eine linke und eine rechte. Die rechte ist von wenig Interesse, da sie nichts wesentlich Neues ergibt, denn:

$$(a^a)^a=a^{a^2}$$

Dagegen entspricht die linke dem bisherigen Schema:

$$a^{(a^a)}$$

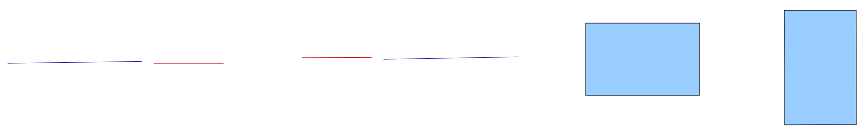
Interessant vielleicht ist, dass wenn ich bei der rechtsseitigen Definition wieder verallgemeinere von 2 auf a, ich dann bei der linksseitigen lande.

Aufgrund der Rekursion ergibt sich unmittelbar, dass für alle Operationen die Verknüpfung von 2 mit 2 durchgehend gleich bleibt:

$$O_{n+2}(2,2)=O_n(2,2)=4$$

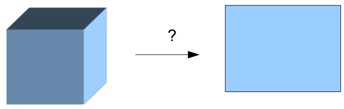
Warum ist die Potenzierung nicht kommutativ, d.h. was ist der tiefere Grund? Vielleicht liegt er darin, dass die Potenzierung keine direkte Objektrepräsentanz hat, da Potenzierung sprachlicher Vermittlung bedarf.

Oder liegen da spezielle Raumeigenschaften vor?
Bei der Addition und der Multiplikation kann man ja geometrische Modelle angeben. Bei der Addition werden beide Teilstrecken um 180° gedreht, bei der Multiplikation wird das Rechteck um 90° gedreht. Im ersten Fall bleibt die Gesamtlänge erhalten, im zweiten bleibt der Flächeninhalt gleich. Beides sind hier Eigenschaften unseres konkreten physikalischen Raumes. Erhaltungssätze als Symmetrien. (vgl. hierzu Emmy Noether!).



Hole ich aber einen Würfel mit der Kantenlänge 2 und drehe ihn im Raum, so ergibt sich kein

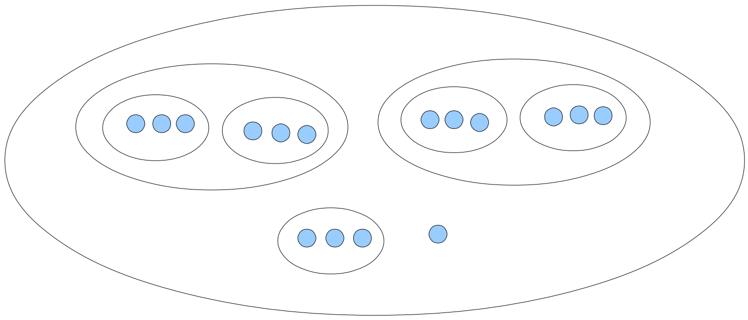
Quadrat mit der Basislänge 3. Könnte ja sein, aber in unserem Raum funktioniert das eben mal nicht.



Spiegeln sich also in der Arithmetik Gesetze unseres physikalischen Raumes wider?

Fässt man die Gruppierungen jeweils räumlich zusammen, so ergeben sich bioanaloge Strukturen.

Gruppiert man ab 3, so sähe die Zahl 16 folgendermaßen aus: $2^2 \cdot 3+3+1$ und graphisch:



In biologischen Strukturen sind es Zellen, deren Organellen jedoch nicht so stereotyp aufgebaut sind. Das wäre sozusagen das elementarste Skelett. Der Gruppierung, d.h. der logischen Zusammenfassung hier entspricht dort die funktionelle Zusammenfassung in Zellen. Diese werden ja dann wieder zu höheren Gebilden (Zellverbänden) weiter zusammengefasst, usw.

Kehren wir zurück zu den Operationen. Welche Gesetzmäßigkeiten besitzen sie und wie entwickeln sie sich? Die Kommutativität vererbt sich offensichtlich nicht, da sie für die Addition und Multiplikation zutrifft, nicht aber für die Potenz. Das Gleiche gilt für die Assoziativität, die sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation, nicht aber für die Potenz gilt, denn:

$$(a^m)^n \neq a^{(m^n)}$$

Da $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$ und $m \cdot n$ nicht unbedingt m^n ist, wie man mit m = 2 und n = 3 sieht.

Neutrales für die Addition ist die Null, für Multiplikation die Eins und für die Potenz auch die Eins allerdings nur für den Exponenten. Für die Basis gibt es keine allgemeines Neutrales. Inverse bzgl. des Exponenten 1 sind entweder trivial (n = 0 oder a = 1) oder zweideutig, da die Potenz nicht kommutativ ist: Die Gleichung

$$b = a^n$$

ergibt nach dem Exponenten n aufgelöst $n = \log_a(b)$ und nach der Basis: $a = \sqrt[n]{(b)}$
Meines Erachtens hat man diese Zweideutigkeit der Sprachstruktur zu verdanken, da sie auf Sprachbegriffsbildung beruht. Hätte die Potenz eine direkte geometrische Bedeutung wie die Addition und die Multiplikation, käme diese Ambiguität wahrscheinlich nicht vor. Da

Sprachrelationen wie „2 mal 3“ nicht unbedingt und im Allgemeinen eher nicht symmetrisch sind. „2 Äpfel“ ist eben nicht das Gleiche wie „Apfel 2“. Die Sprachstruktur der Prädikation ist wesentlich asymmetrisch. Und die Sprachstruktur hängt wiederum mit unserer Beziehung zur Welt zusammen. Wir sehen die Welt in einer Art Ursache-Wirkungs-Beziehung, insofern wir die Ursache und das Objekt die Wirkung ist. Diese ist notwendig asymmetrisch, sonst würden wir nicht so handeln wie wir es tun.

Aufgrund der Sprachstruktur sind also wahrscheinlich kaum Vererbungsgesetze zu erwarten.
Es sei denn, ab der Potenz, dass sich dort Gesetze iterativ darstellen.

Doch zunächst fällt auf, dass sich Distributivgesetze (die Verträglichkeitsgesetze einer Operation mit der nächst höheren) gelten:

$$(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$$

In allgemeiner Schreibweise sähe das so aus:

$$O_2(O_1(b,c),a) = O_1(O_2(b,a),O_2(c,a))$$

und entsprechend für die Potenz $O_3(a,b) = a^b$

$$O_3(O_2(b,c),a) = O_2(O_3(b,a),O_3(c,a))$$

und wieder in der üblichen Schreibweise:

$$(b\cdot c)^a = b^a \cdot c^a$$

Aber auch ein andersartiges Distributivgesetz gilt, wenn die erste Addition konstant gehalten wird:

$$a^{(b+c)} = a^b \cdot a^c$$

Das allgemeine Gesetz zumindest für die ersten drei Operationen lautet dann:

$$O_{n+1}(O_n(b,c),a) = O_n(O_{n+1}(b,a),O_{n+1}(c,a))$$

Gilt dies in dieser veränderten Form auch für die nächst höheren Operationen?

Zur 'besseren' Übersichtlichkeit wähle ich für die Hyperpotenz O_4 die Darstellung:

$$O_4(a,b) = a_b$$

in Analogie zur Potenz , wobei der Hyperexponent b unten angeschrieben werde.

Das mögliche entsprechende Verträglichkeitsgesetz würde dann folgendermaßen lauten:

$$O_4(O_3(b,c),a) = O_3(O_4(b,a),O_4(c,a))$$

oder in der vereinfachten Schreibweise:

$$(b^c)_a = (b_a)^{c_a}$$

Um es zu überprüfen, wähle ich für a = 2, für b = 2 und für c = 3: $(2^3)_2 = {2_2}^{3_2}$

Was bedeutet das? Die linke Seite ist $8^8=16777216$ Die rechte Seite aber $4^{27}=18014398509481984$, was offensichtlich verschieden ist. Also gilt dieses Gesetz hier schon nicht mehr.

Bemerkenswert ist vielleicht, dass die Distributivgesetze nur für drei Dimensionen, nicht aber für vier oder höhere gültig sind. Ist das vielleicht ein weiterer Hinweis darauf, dass der Raum nicht mehr als drei Dimensionen hat (vergleiche der geometrisch verallgemeinerte Pythagoras) ?

Interessant für sind sicherlich die Potenzgesetze, bei denen man eine gewisse Vererbbarkeit bemerkt:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Die Operationen bei Potenzen spiegeln sich in dem Exponent wider und zwar eine Stufe tiefer.

Das würde in der rekursiven Notation folgendermaßen aussehen:

$$O_2(O_3(a,b), O_3(a,c)) = O_3(a, O_1(b,c))$$

$$O_3(O_3(a,b), c) = O_3(a, O_2(b,c))$$

Das erste haben wir schon untersucht. Das zweite würde eine Stufe tiefer lauten:

$$O_2(O_2(a,b), c) = O_2(a, O_1(b,c))$$

und das heißt in der üblichen Notation:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b+c)$$

was sicherlich nicht stimmt.

Wie sähe es eine Stufe höher aus?

$$O_4(O_4(a,b), c) = O_4(a, O_3(b,c))$$

und das hieße: $(a_b)_c = a_{(b^c)}$

gilt diese Regel? Wir überprüfen wieder mit a = 2, b = 2, c = 1. Das würde bedeuten:

$$(2_2)_1 = 2_{(2^1)}$$

Die linke Seite hat den Wert 4 und die rechte Seite ebenfalls den Wert 4.

Wir wählen $a=3, b=1, c=2$ und erhalten:

$$(3_1)_2 = 3_{(1^2)}$$

Mit dem linken Wert 27 und dem rechten Wert 3. Also gilt die Regel auch nicht.
Betrachten wir noch folgende Regeln:

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$$

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Ihre Formen lauten:

$$O_3(O_2(a,b),c) = O_2(O_3(a,c), O_3(b,c))$$

bzw. $$O_2(O_1(a,b),c) = O_1(O_2(a,c), O_2(b,c))$$

also strukturidentisch. Gilt diese Regel auch in der nächsten Stufe? Sie würde lauten:

$$O_4(O_3(a,b),c) = O_3(O_4(a,c), O_4(b,c))$$

und in vereinfachter Notation:

$$(a^b)_c = (a_c)^{(b_c)}$$

Wir überprüfen mit a = 2, b = 2, c = 1:
Die linke Seite ergibt 4 und die rechte 4.
Mit a = 3 , b= 2, c = 2: linke Seite $9^9 = 387420489$, die rechte Seite $27^4 = 531441$.
Also vererbt sich diese Regel auch nicht nach oben.

Aber für die ersten drei Regeln ergibt sich eine nützliche „**Superregel**“:

> Folgen in einem Term zwei Operationen aufeinander, ist die Regel intuitiv, d.h. hier liegt ein Homomorphismus f_c vor, wenn man die Potenzierung mit c als Funktion f_c bezeichnet. Das Gleiche gilt auch für die entsprechenden Umkehroperationen.
>
> Überspringt aber ein Term eine Zwischenoperation, so ist die Regel komplizierter, gibt es hier keinen Homomorphismus.

Beispiele: es gilt zwar $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,
aber $(a+b)^c \neq a^c + b^c$

oder es gilt $\sqrt{(a \cdot b)} = \sqrt{(a)} \cdot \sqrt{(b)}$
aber $\sqrt{(a+b)} \neq \sqrt{(a)} + \sqrt{(b)}$

Typische Fehler, die sehr hartnäckig sind.