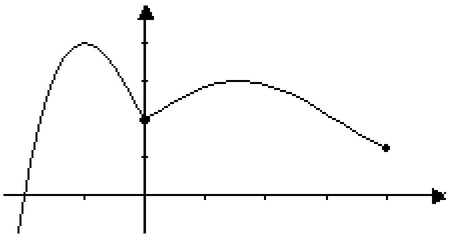
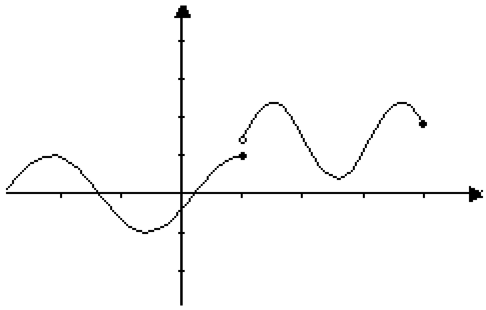
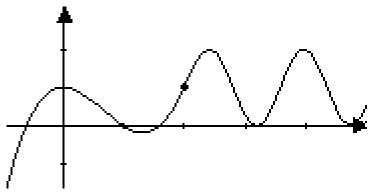
Übungsaufgaben SP EP MA im Mai 2010

Aufg1 1. Was versteht man anschaulich (geometrisch) unter Stetigkeit, was unter Differenzierbarkeit?
2. Wie lauten die Definitionen von Stetigkeit und von Differenzierbarkeit?

Aufg2 Entscheide geometrisch, ob folgende Funktionen überall stetig bzw. überall differenzierbar sind:







Aufg3 Untersuche, ob folgende Funktionen an der Stelle x_0 stetig und differenzierbar sind?

1) $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 1 & x \le 0 \\ \cos(x) + 3 & x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$ 2) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 + 1 & x < 1 \\ (x-1)^2 + 1 & x \ge 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x \cdot (x^2 - 1) & x < 2 \\ \frac{1}{3} & x = 2 \\ \frac{11}{3}x - \frac{16}{3} & x > 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$

Aufg4 Gegeben seien folgende Funktionen

a) $f(x) = x(x^2 - 4)$ b) $f(x) = \frac{1}{3}(x+2) \cdot (x^2 - 6x + 9)$

1) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen mit Hilfe ihrer Nullstellen in verschiedene Koordinatensysteme ein.

2) Berechnen Sie die Ableitungen der beiden Funktionen.

3) Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte.

4) Geben Sie für die erste Funktion die Tangente im Punkt $P(0|f(0))$ an.
Geben Sie für die zweite Funktion die Normale im Punkt $P(0|f(0))$ an
und bestimmen Sie den Steigungswinkel unter der ihr Graph die x-Achse schneidet.

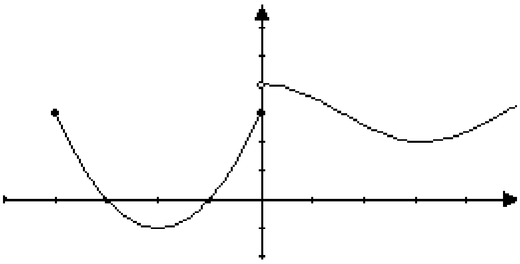
Lösungen

Aufg1 1. Eine stetige Funktion läßt sich ohne abzusetzen zeichnen. Sie hat keine Sprünge und keine Brüche.
Eine differenzierbare Funktion läßt sich ohne abzusetzen und ohne zu stoppen. Sie hat keine Kicke.

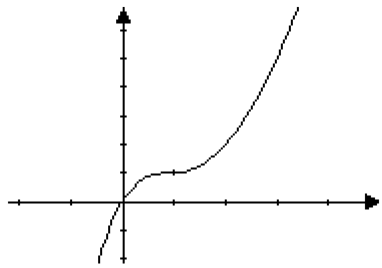
2. Eine Funktion $f: D \to IR$ heißt **stetig** an der Stelle $x_o \in D$, genau dann wenn gilt: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$
Eine Funktion $f: D \to IR$ heißt **differenzierbar** an der Stelle $x_o \in D$, genau dann wenn gilt: $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ existiert.

Aufg2 Die erste Funktion ins überall stetig, aber an der Stelle 0 nicht differenzierbar (Knick)
Die zweite Funktion ist an der Stelle 1 weder stetig noch differenzierbar, sonst ist sie aber überall differenzierbar und folglich auch stetig.
Die dritte Funktion ist überall differenzierbar und stetig.

Aufg3 1)



2)



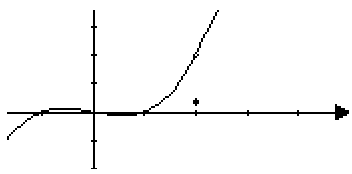
1) Diese Funktion ist an der Stelle 0 nicht stetig und daher auch nicht differenzierbar:
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+2)^2 - 1 = 3 \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\cos(x)+3) = 4$
Da die einseitigen Grenzwerte verschieden sind, existiert der allgemeine Grenzwert nicht. Also ist f in 0 nicht stetig.

2) Die zweite Funktion ist an der Stelle 1 stetig: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x-1)^3 + 1 = 1$
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)^2 + 1 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1. \quad f(1) = (1-1)^2 + 1 = 1 \Rightarrow$
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ f stetig in 1. Ist f auch differenzierbar in 1?

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x & x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 3 & x < 1 \\ 2x - 2 & x > 1 \end{cases}$$

Betrachten wir nun die kritische Stelle 1: $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x^2 - 6x + 3) = 0$
$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x-2) = 0$. Da die beiden einseitigen Grenzwerte der Differenzenquotienten gleich sind, existiert der allgemeine Grenzwert und ist 0.
Die Funktion ist also an der Stelle 1 differenzierbar (und überall).

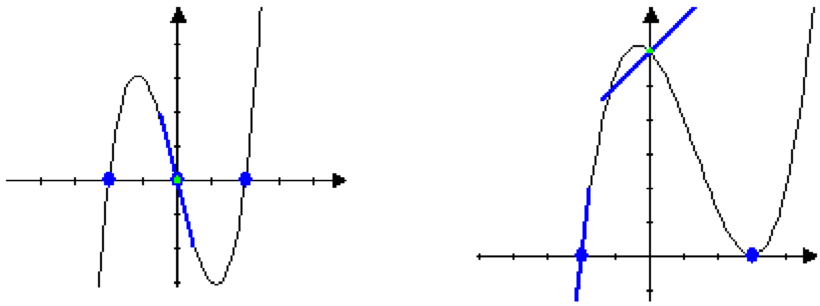
3) Die dritte Funktion mit dem Graphen ist an der Stelle 2 nicht stetig:
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (\frac{1}{3}x(x^2-1)) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 2$



$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (\frac{11}{3}x - \frac{16}{3}) = \frac{11}{3}\cdot 2 - \frac{16}{3} = \frac{6}{3} = 2.$ Da die beiden einseitigen Grenzwerte übereinstimmen, exisitiert auch der allgemeine und ist 2.
Da aber die Funktion an der Stelle 2 durch $\frac{1}{3}$ und nicht durch 2 definiert ist, ist die Funktion an der Stelle 2 nicht stetig und damit auch dort nicht differenzierbar.

Aufg4 a) $f(x) = x(x^2-4) = x^3 - 4x$ b) $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)(x^2-6x+9) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - x + 6$

1)



Nullstellen von a) $x(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$ alle einfach also Schnitte.

Nullstellen von b) $\frac{1}{3}(x+2)(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (einf) $\vee\ x = 3$ (doppelt)

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 - 4x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$ b) $f(0) = 6$

2) a) $f'(x) = 3x^2 - 4$ b) $f'(x) = x^2 - \frac{8}{3}x - 1$

3) a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1,15$ $f(\frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{4}{3} - 4) = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$
$\approx -3,1$ $f(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = 3,1 \Rightarrow T(1,15|-3,1)$ $H(-1,15|3,1)$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{8}{3}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \Leftrightarrow (x - \frac{4}{3})^2 = \frac{25}{9}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \pm \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{3}$ $f(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^3 - \frac{4}{3}(-\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3} + 6 \approx 6,2$

$H(-\frac{1}{3}|6,2)$ $T(3|0)$

4) a) $f'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f'(0) = -4 \Rightarrow t: y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow t: y - 0 = -4x$
$t: y = -4x$

b) $f'(x) = x^2 - \frac{8}{3}x - 1 \Rightarrow f'(0) = -1$ $f(0) = 6 \Rightarrow n: y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x-0) \Leftrightarrow$
$n: y - 6 = -\frac{1}{-1}\cdot x \Leftrightarrow n: y = x + 6$ $m = \tan(\alpha) \Leftrightarrow f'(-2) = (-2)^2 - \frac{8}{3}(-2) - 1 =$
$= 4 + \frac{16}{3} - 1 = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3} \Rightarrow \frac{25}{3} = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(\frac{25}{3}) \approx 83,16^{o}$