

Beh:  $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} k \leq n \rightarrow \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$  : "Binomialkoeffizienten sind ganzzahlig"

$$\text{HS: } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Bew. des HS: } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Bew. der Beh. über vollst. Ind. über n:

$$n = 1 : \binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$n \rightarrow n+1 : \text{IV} : \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} k \leq n \rightarrow \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

$$\text{IB} : \bigwedge_{k' \in \mathbb{N}} k' \leq n+1 \rightarrow \binom{n+1}{k'} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Bw: Ist } k' = n+1 \Rightarrow \binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}$$

$$\text{Ist } k' \leq n \Rightarrow \binom{n+1}{k'} \stackrel{\text{HS}}{=} \underbrace{\binom{n}{k'-1}}_{\in \mathbb{N}(\text{IV})} + \underbrace{\binom{n}{k'}}_{\in \mathbb{N}(\text{IV})} \in \mathbb{N}.$$