Def (Diagonaliserungsfunktion):

Sei eine Gödelnummerierung g für die Theorie T, die mindestens die PA umfasse, gegeben.

Die Funktion

$$D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad D(m) = \begin{cases} g(\alpha[\overline{m}]) & \text{falls m die Gödelzahl einer T – Aussage } \alpha[x] \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt <u>Diagonalisierungsfunktion</u>.

Bem: Bezeichnet man mit den 'Gödelhäkchen' $\ulcorner\ \urcorner$ einer T-Aussage die Ziffer in PA der Gödelnummer dieser T-Aussage ($\ulcorner\alpha\urcorner := \overline{g(\alpha)}$), so gilt

$D(m) = \quad D(g(\alpha[x])) = g(\alpha[\overline{g(\alpha[x])}]) = g(\alpha[\ulcorner\alpha[x]\urcorner])$

d.h. $D : g(\alpha[\ \ x\ \ ]) \to\ g(\alpha[\ \ulcorner\alpha[x]\urcorner\ ])$

Lemma 3 (Diagonalisierungssatz):

Sei T eine PA umfassende Theorie, in der D repräsentierbar sei.

Für jede T-Aussage $\beta[x]$ (in der x die einzige freie Variable ist) gibt es eine geschlossene T-Aussage σ mit:

$$\vdash \sigma \equiv \beta[\ulcorner\sigma\urcorner]$$

($\ulcorner\sigma\urcorner\ := \overline{g(\sigma)}$)

Bew: Sei die T-Aussage $\delta[x, x_2]$ die Repräsentation der Diagonalisierungsfunktion D in T.

Sei $\alpha[x] := \bigwedge_{x_2}(\delta[x, x_2] \supset \beta[x_2])$ und $m := g(\alpha[x]) \ \Rightarrow\ \overline{m} = \ulcorner\alpha[x]\urcorner$

Wähle $\sigma := \alpha[\overline{m}] = \bigwedge_{x_2}(\delta[\overline{m}, x_2] \supset \beta[x_2]) = \alpha[\ulcorner\alpha[x]\urcorner]$

D.h. x wird ersetzt durch die Ziffer, die die Gödelnummer der Aussage $\alpha[x]$ bezeichnet.

Dieses σ erfüllt dann die Anforderungen:

$q := g(\sigma) \Rightarrow D(m) = g(\alpha[\overline{m}]) = g(\sigma) = q \Rightarrow D(m) = q$. Wegen der Repräsentierbarkeit von D in T gilt: $\vdash\ \delta[\overline{m}, \overline{q}]$ (*). Weiter gilt $\overline{q} = \overline{g(\sigma)} = \ulcorner\sigma\urcorner$

Gezeigt wird nun (1) $\vdash \sigma \supset \beta[\overline{q}]$ und (2) $\vdash \beta[\overline{q}] \supset \sigma$, womit alles bewiesen ist.

zu (1): Folgendes ist eine T-Ableitung aus σ :

(1)	σ bzw.: $\bigwedge_{x_2}\left(\delta\left[\overline{m}, x_2\right] \supset \beta\left[x_2\right]\right)$	(Hyp)
(2)	$\bigwedge_{x_2}\left(\delta\left[\overline{m}, x_2\right] \supset \beta\left[x_2\right]\right) \supset (\delta[\overline{m}, \overline{q}] \supset \beta[\overline{q}])$	(A4)
(3)	$\delta[\overline{m}, \overline{q}] \supset \beta[\overline{q}]$	(MP)
(4)	$\delta[\overline{m}, \overline{q}]$	(*)
(5)	$\beta[\overline{q}]$	(MP)

aus Deduktionstheorem folgt, da keine Gen verwendet:

$\vdash \sigma \supset \beta[\overline{q}]$

zu (2): Folgendes ist eine T-Ableitung aus $\left\{\beta[\overline{q}], \delta\left[\overline{m}, x_2\right]\right\}$:

(1)	$\beta[\overline{q}]$		(Hyp)
(2)	$\delta\left[\overline{m}, x_2\right]$		(Hyp)
....			
(3)	$\delta[\overline{m}, \overline{q}]$	(?)	
....			
(4)	$\bigvee_{x_2}^{1} \delta\left[\overline{m}, x_2\right]$		(Weil D repräsentierbar in T)
....			
(5)	$\overline{q} = x_2$		(2,3,4)
....			
(6)	$\beta\left[x_2\right]$		

Also $\left\{\beta[\overline{q}], \delta\left[\overline{m}, x_2\right]\right\} \vdash \beta\left[x_2\right]$

Nach Deduktionstheorem folgt: $\{\beta[\overline{q}]\} \vdash \delta\left[\overline{m}, x_2\right] \supset \beta\left[x_2\right]$ (kein freies Vorkommnis einer Variablen in $\beta[\overline{q}]$)

$\{\beta[\overline{q}]\} \vdash \underbrace{\bigwedge_{x_2}\left(\delta\left[\overline{m}, x_2\right] \supset \beta\left[x_2\right]\right)}_{\sigma}$ (Gen!) (")

Nach Deduktionstheorem weiter: $\vdash \beta[\overline{q}] \supset \sigma$

Def Beweisbeziehung:

$P_f \subseteq \mathbb{N}^2$**:** $P_f(m,n) \Leftrightarrow$ Es gibt eine T-Aussage α und eine Folge f von T-Aussagen, die einen T-Beweis von α darstellen mit: $m = g(\alpha)$ und $n = g(f)$

Satz 4 (Prä-Gödelsatz):

Sei T eine durch g gödelnummerierte (konsistente und) ω–konsistente Theorie 1. Ordnung mit PA, in der die (zu T und g gehörende) Diagonalisierungsfunktion D repräsentierbar und die (zu T und g gehörende) Beziehung P_f ausdrückbar ist.

Dann gibt es eine geschlossene T-Aussage γ mit der Eigenschaft:

$$\nvdash \gamma \quad \text{und} \quad \nvdash \neg\gamma$$

Bew: Sei $\pi[x, x_2]$ eine T-Aussage, die die Pf-Beziehung ausdrückt.

$\beta[x] := \bigwedge_{x_2} \neg\pi[x, x_2]$ (bzw. : $\bigwedge_{x_2} \left(x_2 \text{ nat. Zahl} \supset \neg\pi[x, x_2]\right)$)

($\beta[x]$ besagt also, dass x nicht beweisbar ist)

Mit dem Diagonalisierungssatz folgt, dass es eine geschlossene T-Aussage γ gibt mit: M: $\vdash \gamma \equiv \bigwedge_{x_2} \neg\pi[\ulcorner\gamma\urcorner, x_2]$

(M heißt also soviel wie: "γ genau dann, wenn γ nicht beweisbar", gereinigte Aussage von "diese Aussage ist nicht beweisbar")

zu zeigen: (1) $\nvdash \gamma$ und (2) $\nvdash \neg\gamma$

(1): Annahme $\vdash \gamma$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ (nämlich die Gödelzahl eines T-Beweises für γ) mit $Pf(g(\gamma), n)$. Wegen der Ausdrückbarkeit von P_f in T heißt das : $\vdash \pi[\ulcorner\gamma\urcorner, \bar{n}]$. Aus M folgt wegen der Annahme $\vdash \bigwedge_{x_2} \neg\pi[\ulcorner\gamma\urcorner, x_2]$

Mit (A4) folgt daraus: $\vdash \neg\pi[\ulcorner\gamma\urcorner, \bar{n}]$ im Widerspruch zur Konsistenz.

(2): Aus (1) folgt $\nvdash \gamma$. Wir nehmen an: $\vdash \neg\gamma$.

Mit M gilt auch $\vdash \neg\gamma \equiv \neg \bigwedge_{x_2} \neg\pi[\ulcorner\gamma\urcorner, x_2]$. Wegen der jetzigen Annahme folgt damit: $\vdash \neg \bigwedge_{x_2} \neg\pi[\ulcorner\gamma\urcorner, x_2]$ und $\vdash \bigvee_{x_2} \pi[\ulcorner\gamma\urcorner, x_2]$ (*). Wegen $\nvdash \gamma$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht $P_f(g(\gamma),n)$, was wegen der Ausdrückbarkeit von P_f bedeutet:

Für alle $n \in \mathbb{N}$: $\vdash \neg\pi[\ulcorner\gamma\urcorner, \bar{n}]$, was im Widerspruch zur ω–Konsistenz steht.