

Fibonacci-Folge

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte: $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow A \cdot \vec{x} - \lambda E \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \vee \vec{x} = \vec{0}$.

Ist der Eigenvektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, dann muß die Determinante = 0 sein:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(1-\lambda)\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (\lambda-1)x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Explizite Form der Fibonacci-Folge:

Darstellung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als LK der Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ \alpha = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\beta \sqrt{5} \\ \alpha = -\beta \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{Also } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ist $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x} \Rightarrow A^n \cdot \vec{x} = \lambda^n \cdot \vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \right) \\
& \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) \quad (\text{Binet})$$