Zum Gödelschen Unvollständigkeitssatz in der Darstellung von E. Nagel, J.R. Newman

von Manfred Hörz

I) Jeder Satz der (formalisierten) Arithmetik oder jede Formel der (f.) Arithmetik besitzt eine angebbare (berechenbare) Gödelnummer.

Beh.: Die Formel G: $(x) \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(n, 13, n))$ besitzt keine angebbare Gödelnummer.

Folg.: Also ist G keine Formel der (f.) Arithmetik. Daraus folgt, dass die weitere Argumentation von Gödel falsch ist.

Begründungsskizze:

Def.: IF sei die Menge aller arithmetischen Formeln, GN sei die Menge aller Gödelnummern.

$\mathrm{Gn} : \mathrm{IF} \to \mathrm{GN}, f \to \mathrm{Gn}(f)$ sei die Funktion, die jeder arithmetischen Formel die entsprechende Gödelnummer zuordnet.

$F : \mathrm{GN} \to \mathrm{IF}, n \to F(n)$ sei die Funktion, die jeder Gödelnummer die entsprechende Formel zuordnet (deren Gödelnummer also n ist).

Def.: sub(x, 13, x) ist die Gödelnummer derjenigen Formel, die sich aus der Formel mit der Gödelnummer x ergibt, wenn man die Variable mit der Gödelnummer 13 (= y) ersetzt durch die Ziffer, die x angibt.

formal: $\mathrm{sub}(x, 13, x) := \mathrm{Gn}(\mathrm{sub}(F(13) \to x)(F(x)))$

Bsp: $\mathrm{Gn}(\sim) = 1$ $\mathrm{Gn}(\vee) = 2$ $\mathrm{Gn} \supset) = 3$ $\mathrm{Gn}(\exists) = 4$ $\mathrm{Gn}(=) = 5$ $\mathrm{Gn}(0) = 6$ $\mathrm{Gn}(s) = 7$

$\mathrm{Gn}(() = 8$ $\mathrm{Gn} = ()) = 9$ $\mathrm{Gn}(,) = 10$

$\mathrm{Gn}(x) = 11$ $\mathrm{Gn}(y) = 13$ $\mathrm{Gn}(z) = 17, \ldots$

$f : y = 1$ $\mathrm{Gn}(f) = 2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^6 = 1{,}829677248e + 016$ $(1 = s0)$

$\mathrm{sub}(1{,}829677248e + 016; 13; 1{,}829677248e + 016) =$

$\mathrm{Gn}(\mathrm{sub}(y \to 1{,}829677248e + 016)(y = 1))) = \mathrm{Gn}(\ 1{,}829677248e + 016 = 1)$

$\mathrm{Dem}(x, y)$ ist eine arithmetische Relation, die genau dann zutrifft, wenn F(x) als Sequenz von Formeln, (bestehend aus Axiomen oder aus in der Sequenz vorkommenden Axiomen mittels Schlußregeln hergeleiteter Formeln) eine Ableitung von F(y) in der formalisierten Arithmetik ist.
Die Relation muß in ihrer Definition die Nummern x und y explizit enthalten.

Das aber heißt, daß **die Gödelnummer der arithmetischen Formel Dem(x,y) größer sein muß als die von x und auch als die von y**, gleichgültig, ob x, y als Variablen oder eingesetzt als konkrete Zahlzeichen erscheinen:

$$\mathrm{Gn}(\mathrm{Dem}(x,y)) > \mathrm{Gn}(x) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Gn}(\mathrm{Dem}(x,y)) > \mathrm{Gn}(y)$$

Sei nun $g := \mathrm{Gn}(G) = \mathrm{Gn}[(x) \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(n,13,n))]$.

Um g zu bestimmen muß u.a. die Gödelnummer sub(n, 13, n) bestimmbar sein, und zwar ist nach obiger Bemerkung: **g > sub(n, 13, n)**. (*)
n wiederum ist die Gödelnummer der Formel $f: \ (x) \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y,13,y))$:
$n = \mathrm{Gn}[(x) \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y,13,y))]$.

Sub(n, 13, n) ist die Gödelnummer derjenigen Formel, die man aus der Formel F(n) erhält, indem man die Variable y ersetzt durch das Zahlzeichen, das n angibt:
$\mathrm{sub}(n,13,n) = \mathrm{Gn}(\mathrm{sub}(F(13) \to n)(F(n)))$.

F(n) ist aber (x) ~ Dem(x, sub(y, 13, y)). Ersetzt man hier y durch das Zahlzeichen für n, ergibt sich

(x) ~ Dem(x, sub(n, 13, n), also G.

Demnach ist sub(n, 13, n) = Gn(G) = g im Widerspruch zu (*).
Also läßt sich g sicher nicht berechnen.

Oder anders argumentiert: Um sub(n, 13, n) zu bestimmen, muß zuerst $\mathrm{sub}(F(13) \to n)(F(n))$ hergestellt sein, das ist aber die Formel $(x) \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(n,13,n))$. Um diese aufzubauen, muß ich zuerst sub(n, 13, n) bestimmt haben, etc, etc,... bis ad infinitum.
Demnach existiert g nicht, kann also erst recht keine Gödelnummer sein, und damit ist G auch keine Formel der formalisierten Arithmetik.

Hierzu ist aber noch folgendes zu sagen: Gödel verwendet die **Unendlichkeit der natürlichen Zahlen** und hierin liegt das eigentliche Problem des Beweises, weil er sich etwas borgt, was ihm realiter nicht zur Verfügung steht.
Dem gleichen Irrtum erliegt **Cantor**, wenn er seine Diagonalbeweise macht. Oder **Bolzanos** theologische Idee der unendlichen Menge als diejenige Menge, die eine echte aber 'gleichmächtige' Menge zu ihr enthält und von Dedekind aufgegriffen wurde. Man kann da garnicht anders als an den Schöpfungsbericht der Bibel zu denken, in dem es heißt, dass Gott (das Unendliche) sich den Menschen (das kleine Unendliche) sich zum Bilde schuf.
Mit Cantors Gedanken der Mächtigkeit scheint das sogar hieb- und stichfest zu sein. Er definiert die Gleichmächtigkeit über eine bijektive Funktion, die jedem Element aus der einen menge genau eines aus der anderen Menge zuordnet und umgekehrt. Aber das Problem besteht darin, dass er die Bijektion der Menge der geraden Zahlen und die der natürlichen Zahlen nur behauptet, was auf den ersten Blick ja trivial zu sein scheint : $f: \mathbb{N} \to \mathrm{IG} \quad n \to 2n$.
Nur borgt er sich zu jeder Zahl schon die doppelte und das wieder ad infinitum. Er setzt damit schon das voraus, was er beweisen will.
Es ist auch kein Ausweg, die Existenz einer unendlichenMenge axiomatisch zu fordern, wie das die modernen axiomatischen Mengenlehren bspw. von Zermelo-Fraenkel tun. Denn will man diese Axiome interpretieren, so wird üblicherweise als Modell für das

Unendlichkeitsaxiom gerade wieder die Menge der natürlichen Zahlen angegeben, was natürlich kompletter Unsinn ist. Außerdem ist die Forderung einer Existenz ohnehin sehr fragwürdig. Dann begeht man eher Theologie als Mathematik. **Hilbert** hatte ja dann versucht, über seine Beweistheorie das Aufstellen eines endlichen Axiomensystems, das die unendlichen Zahlen als Folgerung ergibt, das Problem aus derWelt zu schaffen. Hier setzte nun Gödel an. Argumenatationstheoretisch ist sein Beweis korrekt. Denn er darf sich ja der Voraussetzungen seiner Opponenten bedienen **ohne an die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen glauben zu müssen**. So gesehen hat er gegen Hilbert erfolgreich argumentiert. aber von diesem Kontext abgesehen, ist sein Beweis falsch.
Anwendungen des Unvollständigkeitssatzes in Bereichen, die die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen nicht behaupten, ist ein logischer Fehler.