Abi 2009 Aufgabe 2 (Geometrie)

1. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8\\-20\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow e_2:\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}\right)=0$

2.1 $\vec{c}=\vec{d}+\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}\Rightarrow C(0|3|5)\quad \mu=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|4\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}\right|=4\sqrt{29}$

2.2 $\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{c})=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\Rightarrow M(2|3|5).$

3. $\cos(\alpha)=\dfrac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DF}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|\left|\overrightarrow{DF}\right|}=\dfrac{\begin{pmatrix}0\\-5\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2,25\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{29}\,\sqrt{14,0625}}=\dfrac{-5,25}{20,19}\approx-0,26\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}(-0,26)\approx105,07^{\circ}$

4.1 $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ 4.2 $d(L,e_1)=\frac{1}{\sqrt{25}}\left|\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{l}-\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}\right)\right|=1,5\wedge\vec{l}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\frac{1}{5}\left|\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}\right)\right|=1,5\Leftrightarrow|0+0+0-3\lambda|=7,5\Leftrightarrow3\lambda=7,5\vee3\lambda=-7,5$

$\Rightarrow\lambda=2,5\vee\lambda=-2,5$. Da der RV von g nach unten, also in Richtung L zeigt, muss λ positiv sein.

$\Rightarrow\lambda=2,5\Rightarrow\vec{l}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+2,5\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\2,5\end{pmatrix}\Rightarrow L(2|3|2,5)\quad$ Länge $=\left|2,5\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right|=2,5$

5. 1 $d(L,\overline{AB})=\dfrac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\left|\overrightarrow{AB}\times(\vec{l}-\vec{a})\right|=$

$\frac{1}{4}\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\5\\-0,5\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\5\\-0,5\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\-0,5\\-5\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0,25+25}\approx5,02$

5.2 $ls:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\2,5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0,5\\0\\-1,25\end{pmatrix}$ S ist Spurpunkt von ls zur x_1,x_2-Koordinatenebene:

$0=x_3=2,5-1,25\lambda\Rightarrow\lambda=2\Rightarrow\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\3\\2,5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0,5\\0\\-1,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}\Rightarrow S(3|3|0)$

5.3 Die senkrechte Projektion von L auf den Boden ist der Kreismittelpunkt $M_k(2|3|0)$.

Der Kreisradius hat demnach die Länge $r=\left|\overrightarrow{M_kS}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|=1\Rightarrow\mu=\pi r^2=\pi\cdot1^2=\pi$