Theorem der ewigen Wiederkehr von Poincaré

0. Vorspann:

$f(A) := \left\{ y \mid \bigvee_{x\in A} y = f(x) \right\}$; $f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\}$

Also gelten (I): $y \in f(A) \Leftrightarrow \bigvee_{x\in A} y = f(x)$ und (II) : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Es gelten: $\boxed{(1) \quad A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad (2) \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B}$

Bew.: (1) $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \overset{\text{II}}{\Rightarrow} x \in f^{-1}(f(A))$

(2) $y \in f(f^{-1}(B)) \overset{\text{I}}{\Rightarrow} \bigvee_{x\in f^{-1}(B)} y = f(x)$. Da $x \in f^{-1}(B) \overset{\text{II}}{\Rightarrow} f(x) \in B \overset{y=f(x)}{\Rightarrow} y \in B$

Es gelten weiter: $\boxed{(3) \quad f \text{ inj} \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = A \quad (4) \quad f \text{ surj} \Rightarrow f(f^{-1}(B)) = B}$

Bew.:

(3) $x \in f^{-1}(f(A)) \overset{\text{II}}{\Rightarrow} f(x) \in f(A) \overset{\text{I}}{\Rightarrow} \bigvee_{z\in A} f(x) = f(z) \overset{f\text{ inj}}{\Rightarrow} x = z \overset{z\in A}{\Rightarrow} x \in$

(4) $y \in B \overset{f\text{ surj}}{\Rightarrow} \bigvee_{x\in D_f} y = f(x) \Rightarrow f(x) \in B \overset{\text{II}}{\Rightarrow} x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B)) \overset{y=f(x)}{\Rightarrow} y \in f(f^{-1}(B))$

Es gilt $\boxed{(5) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)}$

Bew.: $x \in f^{-1}(A \cap B) \overset{\text{II}}{\Leftrightarrow} f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \in B \Leftrightarrow$

$\overset{\text{II}}{\Leftrightarrow} x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Über vollst. Induktion ergibt sich aus (5) $\boxed{(5') \quad f^{-n}(A \cap B) = f^{-n}(A) \cap f^{-n}(B)}$

Es gilt: $\boxed{(6) \quad f^n(\varnothing) = \varnothing}$ Bew: gäbe es ein $y \in f(\varnothing) \overset{\text{I}}{\Rightarrow} \bigvee_{x\in\varnothing} y = f(x)$, was Unsinn ist, also $f(\varnothing) = \varnothing$. Über vollst. Induktion folgt der Rest.

1. SATZ von Poincaré :

Sei V ein endliches, begrenztes Gebiet eines Phasenraums. Ist $f: V \to V$ eine bijektive stetige und volumenerhaltende Abbildung, dann existiert zu jedem Zustand $z \in V$ und zu jeder (noch so kleinen) Umgebung U von z ein Zustand $x \in U$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so daß gilt: $f^n(x) \in U$.

Bew.: Es gibt ein $i \geq 0$ und ein $j \geq 0$ mit $i > j$ und $f^i(U) \cap f^j(U) \neq \varnothing$. (A)
{Gäbe es diese nicht, so müßten für alle k und l $(k \neq l)$ $f^k(U), f^l(U)$ paarweise disjunkt sein. Da f volumenerhaltend ist, haben alle diese Mengen gleiches Volumen. Es müßte also einen

Index t geben, so daß $U, f(U), ..., f^t(U)$ das Gebiet V überdecken. $f^{t+1}(U)$ müßte sich dann mit mindestens einer der Mengen $U, f(U), ..., f^t(U)$ schneiden, da alle Teilmengen von V sind.
[je kleiner U, desto länger kanns dauern (t als Zeit und f als Zustandstransformation pro Zeiteinheit), vorausgesetzt, t ist nicht <u>zu</u> groß!]}
Aus (A) folgt: $f^{-j}(f^i(U) \cap f^j(U)) \underset{(3)}{\overset{(5')}{=}} f^{i-j}(U) \cap U$. Wäre $f^{i-j}(U) \cap U = \varnothing \overset{(6)}{\Rightarrow}$

$f^i(U) \cap f^j(U) = \varnothing$ (mit n = j). Also ist $f^{i-j}(U) \cap U \neq \varnothing \Rightarrow \bigvee_y y \in f^{i-j}(U) \cap U \Rightarrow$

$y \in U \wedge y \in f^{i-j}(U) \overset{I}{\Rightarrow} \bigvee_{x \in U} y = f^{i-j}(x) \Rightarrow x \in U \wedge f^{i-j}(x) \in U$. Mit $n = i - j$ ist der Satz bewiesen.

2. Bedeutung des Satzes

Ist der Phasenraum endlich, so folgt aus dem Energieerhaltungssatz nach **Liouville**, dass jedes Phasenraumvolumen sich zeitlich nicht ändern kann. Ist f dann die zeitliche Übergangsfunktion, die die Zustandsänderungen des Phasenraums pro Zeiteinheit beschreibt, so besagt der Satz von Poincaré, dass jeder Zustand z sich (bis auf der nach Heisenberg erlaubten Präzision) 'beliebig' genau (bei entsprechend kleiner Umgebung U) nach einer maximalen Zeit n wiederholt.
(Möglich jedoch bliebe, dass die Zeit m zu groß ist, um realistisch zu sein. das hängt von der Größe des Phasenraums und der Kleinheit der Umgebung ab.)