Spieltheorie

Manfred Hörz

A = {1, 2, ..., n} seien die Akteure eines Spiels.
Jeder Akteur i wählt eine Strategie aus einer Menge $S_i = \{ is_1, is_2, \ldots, is_k \}$ seiner möglichen Strategien aus, ohne die Strategieentscheidungen seiner Mitspieler zu kennen.

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

sei die Menge aller Strategien.

Eine n-Menge $\sigma = \{ 1s, 2s, \ldots, ns \} \in S$ von Strategien, die je eine Strategie eines jeden Spielers enthält, heißt Strategiekombination. Jeder Spieler bewertet die möglichen Strategiekombinationen für sich (eventuell über eine Nutzenfunktion U). Ziel ist nicht nur maximaler Nutzen sondern auch maximale Sicherheit in der Erreichung dieses max. Nutzens.
U_i sei die Nutzenfunktion des Spielers i.

Bsp.1 Gefangenendilemma (zwei dominante Strategien)

Zwei Gangster 1 und 2 werden nach einem erfolglosen Banküberfall gefasst und in separate Zellen gesteckt. Der Staatsanwalt kann, falls sie nicht gestehen (jeweils 1. Strategie) nur illegalen Waffenbesitz nachweisen, für den sie nur 2 Jahre Gefängnis erhalten. Ihr „Nutzen“ hierfür sei 2. Falls einer gesteht, der andere jedoch nicht, so erhält der Geständige nur 1 Jahr Gefängnis (Nutzen sei 3), der Nichtgeständige jedoch 4 Jahre (Nutzen 0). Gestehen beide, so erhalten sie je 3 Jahre (Nutzen 1).

Die 1. Zahl ist der Nutzen des ersten Spielers, die 2. Zahl der Nutzen des 2. Spielers.

	1g	1gn
2g	(1,1)	(0,3)
2gn	(3,0)	(2,2)

Oder wenn man das Gestehen als s_1 bezeichnet und das Nichtgestehen als 2. Strategie s_2 , so ergibt sich, wenn is_k die k-te Strategie des i-ten Spielers bedeutet:

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(1,1)	(0,3)
$2s_2$	(3,0)	(2,2)

Die Strategiekombinationen:

(s_1, s_1) ist die Strategiekombination, in der jeder gesteht.
(s_2, s_1) die Kombination, wo der 1. Spieler nicht gesteht, jedoch der 2. Spieler gesteht.
(s_1, s_2) hier gesteht der 1., jedoch nicht der 2. Spieler.
(s_2, s_2) hier gesteht keiner.

Die Nutzenfunktionen:

$$U_1(s_{1,} s_1)=1 \quad U_1(s_{1,} s_2)=3 \quad U_1(s_{2,} s_1)=0 \quad U_1(s_{2,} s_2)=2$$
$$U_2(s_{1,} s_1)=1 \quad U_2(s_{1,} s_2)=0 \quad U_2(s_{2,} s_1)=3 \quad U_2(s_{2,} s_2)=2$$

Lösungsweg:

Der Spieler 1 wird sich überlegen, welche Strategie er jeweils wählen soll, wenn Spieler 2 eine vorgegebene Strategie einschlägt:
Bei $2s_1$ ist für ihn $1s_1$ die günstigere Alternative. Bei $2s_2$ ist es auch $1s_1$.
Für Spieler 1 ist daher die Strategie $1s_1$ die beste, die sog. dominante.
Entsprechend ist es $2s_1$ für den 2. Spieler. Also ist die Kombination $(s_{1,} s_1)$ die beste Strategie für beide, die auch ein stabiles Gleichgewicht bedeutet: keiner wird vernünftiger Weise aus ihr ausbrechen, wenn er sie gewählt hat.

Definition (dominante Strategie bei zwei Spielern):

1. Eine Strategie $is \in S_i$ heißt **beste** bzgl. der Fremdstrategie $js \in S_j$ $(is \mid js \text{ beste})$ gdw:

$$\bigwedge_{is' \in S_i} \{is, js\} \geq_i \{is', js\}$$

2. Eine Strategie $is \in S_i$ heißt **dominant** bzgl. der Menge der Fremdstrategien S_j gdw:

$$\bigwedge_{js \in S_j} is \text{ beste bzgl. } js$$

Definition (dominante Strategie bei n Spielern):

1. Eine Strategie $is \in S_i$ heißt die **beste bzgl. der Fremdstrategiekombination** $\sigma = \{1s, \ldots, ns\} \setminus \{is\} \in \overline{S_i}$ $(is \mid \sigma \text{ beste})$ gdw:

$$\bigwedge_{is' \in S_i} \sigma \cup \{is\} \geq_i \sigma \cup \{is'\}$$

2. Eine Strategie $is \in S_i$ heißt **dominant bzgl. der Menge aller Fremdstrategiekombinationen** $\overline{S_i}$ gdw:

$$\bigwedge_{\sigma \in \overline{S_i}} \text{is beste bzgl. } \sigma$$

Bem.: Auf der Basis einer strengen durch eine Nutzenfunktion induzierte Präferenzordnung, heißt eine beste **die beste**. Dominant heißt dann **streng dominant**.

Bsp.2 Eine dominante (und eine beste) Strategie

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(2,3)	(0,0)
$2s_2$	(3,2)	(1,1)

Wählt der 1.Spieler die Strategie $1s_1$, so wird der 2. Spieler $2s_1$ wählen. Sie ist die beste Strategie bzgl. $1s_1$.

Wählt Spieler 1 die Strategie $1s_2$, so wählt der 2. Spieler $2s_2$ als beste bzgl. $1s_2$. Also besitzt der 2. Spieler keine dominante Strategie.

Wählt Spieler 2 $2s_1$, so ist $1s_1$ die beste für 1.Spieler.
Wählt Spieler 2 $2s_2$, so ist wieder $1s_1$ die beste für 1. Spieler, der demnach in $1s_1$ eine dominante Strategie besitzt.

$\{1s_1, 2s_1\}$ ist ein Gleichgewicht, da $1s_1$ dominant und $2s_1$ die beste Strategie

bzgl. $1s_1$. Es ist das einzige Gleichgewicht.

$1s_1 \to 2s_1 \to 1s_1$ ist Zyklus! $1s_2 \to 2s_2 \to 1s_1$ ist kein Zyklus.

Bsp.3 keine dominante Strategien

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(2,3)	(0,0)
$2s_2$	(0,2)	(1,1)

$1s_1$ ist die beste Strategie bzgl. $2s_1$.

s_2 ist die beste Strategie bzgl. $2s_2$. Also hat Spieler 1 keine dominante Strategie.

$2s_1$ ist die beste Strategie bzgl. s_1.

$2s_2$ ist die beste Strategie bzgl. $1s_2$. Also hat Spieler 2 auch keine dominante Strategie.

Hier sind $\{1s_1, 2s_1\}$ und $\{1s_2, 2s_2\}$ die (einzigen) Gleichgewichte:

$1s_1 \to 2s_1 \to 1s_1$ und $1s_2 \to 2s_2 \to 1s_2$ Zwei Zyklen!

Es gibt aber keine dominanten Strategien.

Bsp.4 Nochmal das Gefangenendilemma (zwei dominante Strategien)

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(1,1)	(0,3)
$2s_2$	(3,0)	(2,2)

$1s_1 \to 2s_1 \to 1s_1$ Zyklus! $1s_2 \to 2s_1 \to 1s_1 \to 2s_1$

$\{1s_1, 2s_1\}$ ist einziges Gleichgewicht.
Ein einziger Zyklus, mit vollständigem beidseitigem Einzugsgebiet.

Definition (deterministisches Spiel bei 2 Spielern):

Gibt es zu jeder Strategie die beste Fremdstrategie , so heiße das Spiel **deterministisch**.

Alle betrachteten Beispiele waren deterministische Spiele. Ein nicht deterministisches wäre etwa:

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(2,3)	(2,0)
$2s_2$	(0,2)	(1,1)

da bei der Strategiewahl $2s_1$ des Spielers 2 der 1. Spieler nicht die beste Strategie hat.

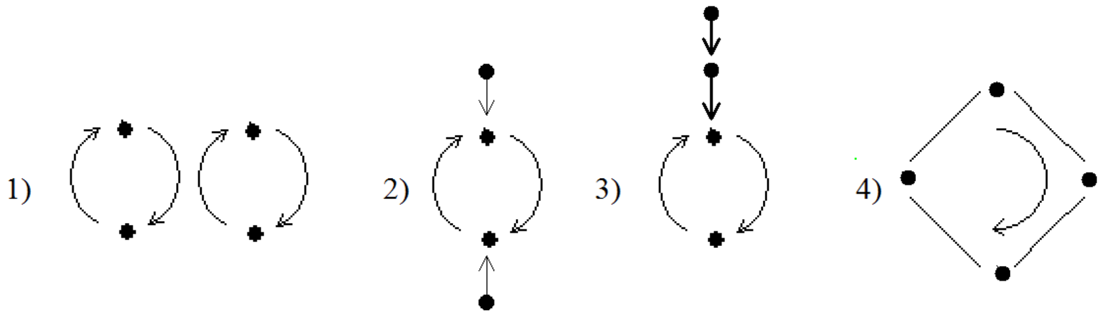
Bsp.5

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(3,1)	(2,1)
$2s_2$	(2,2)	(3,0)

$1s_1 \to 2s_2 \to 1s_2 \to 2s_1 \to 1s_1$ ist kompletter Zyklus, kein Gleichgewichtspunkt.

Gleichgewichtspunkte scheinen also Zweierzyklen zu sein (bei 2 Spielern mit zwei Strategien).

Die **vier möglichen Strukturen** bei 2 Spielern mit zwei Strategien:



1) sind zwei Gleichgewichte   2) ein Gleichgewicht in zwei dominanten Strategien
3) ein Gleichgewicht in einer dominanten Strategie   4) kein Gleichgewicht

Es gibt insgesamt 16 Fälle bei 2 Spielern mit zwei Strategien:

davon 2 doppelte Gleichgewichte 1)

davon 2 gleichgewichtsfreie Viererzyklen

davon 12 einzelne Gleichgewichte: davon wieder 4 Gleichgewichte der Form 2

und 8 der Form 3).

Definition (Gleichgewichtspunkt, Gleichgewicht, Nashgleichgewicht):

Eine Strategiekombination $\sigma = \{1s, 2s, \ldots, ns\} \in S$ heißt **Gleichgewichtspunkt**, gdw:

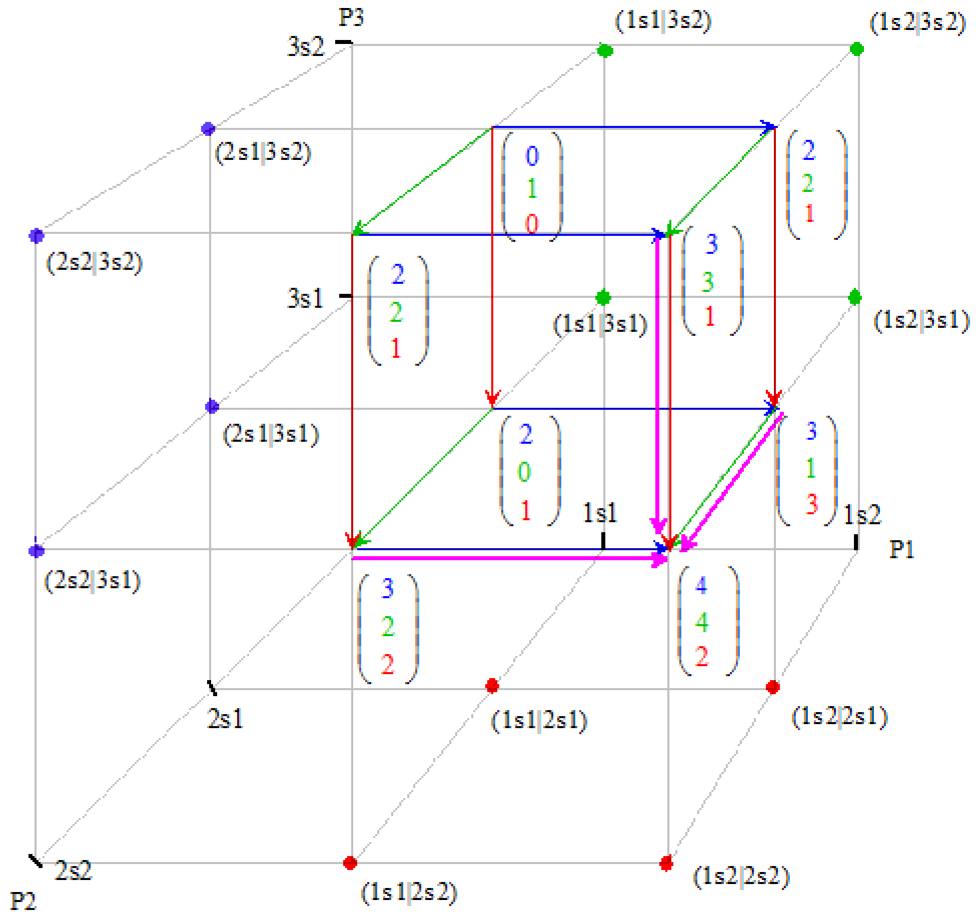
$\bigwedge_{k \in \{1,2,\ldots,n\}}$ ks ist die beste Strategie bzgl. der Fremdstrategiekombination $\sigma \setminus \{ks\}$

Definition (Gleichgewicht in dominanten Strategien):

Eine Strategiekombination $\sigma = \{1s, 2s, \ldots, ns\} \in S$ heißt
Gleichgewicht in dominanten Strategien, gdw:

$\bigwedge_{k \in \{1,2,\ldots,n\}}$ ks ist die dominante Strategie bzgl. aller Fremdstrategiekombinationen $\overline{S_k}$

Dreidimensionaler Graph:



$1s_2$ ist dominant, $2s_2$ ist dominant und $3s_1$ ist dominant

$(1s_2, 2s_2, 3s_1)$ ist Gleichgewicht in dominanten Strategien und natürlich einfaches Gleichgewicht.

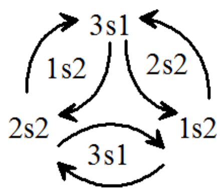
$(1s_1, 2s_1) \rightarrow 3s_1$ $(1s_2, 2s_1) \rightarrow 3s_1$ $(2s_1, 3s_1) \rightarrow 1s_2$

$(1s_1, 2s_2) \rightarrow 3s_1$ $(1s_2, 2s_2) \rightarrow 3s_1$ $(2s_1, 3s_2) \rightarrow 1s_2$

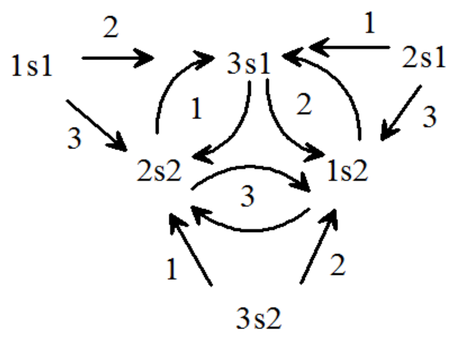
$(1s_1, 3s_1) \rightarrow 2s_2$ $(1s_2, 3s_1) \rightarrow 2s_2$ $(2s_2, 3s_1) \rightarrow 1s_2$

$(1s_1, 3s_2) \rightarrow 2s_2$ $(1s_2, 3s_2) \rightarrow 2s_2$ $(2s_2, 3s_2) \rightarrow 1s_2$

Das einfache Gleichgewicht sieht in Pfeilstruktur folgendermaßen aus:



Das Diagramm von dem gesamten Spiel (im dominanten Gleichgewicht):



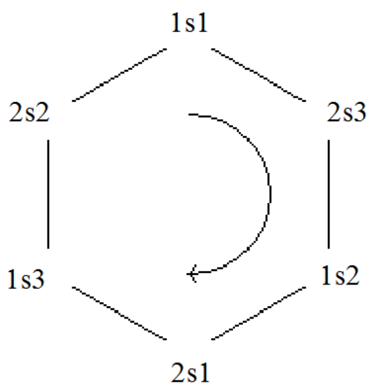
Nun einige Beispiele von zwei Spielern mit drei Strategien:

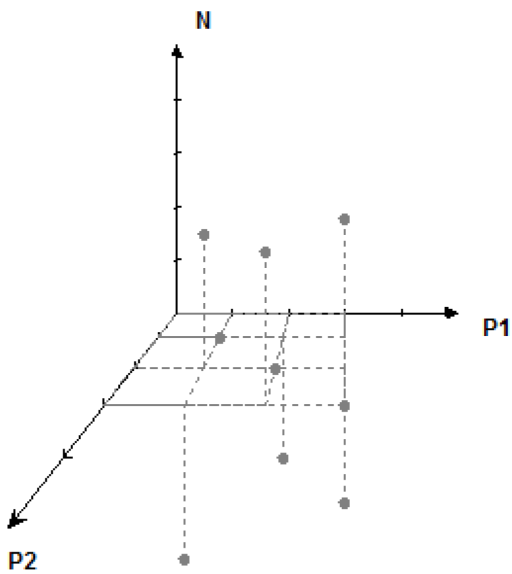
Bsp.6 Schere, Stein, Papier

	$1s_1$	$1s_2$	$1s3$
$2s_1$	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
$2s_2$	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
$2s3$	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Es gibt weder Nash-Gleichgewicht noch Gleichgewicht in dominanten Strategien.

Das Pfeildiagramm sieht so aus:





Bsp.7

	$1s_1$	$1s_2$	$1s3$
$2s_1$	(1,0)	(3,1)	(1,2)
$2s_2$	(0,1)	(1,2)	(2,3)
$2s3$	(2,2)	(0,3)	(3,1)

Besitzt nur ein Nash-Gleichgewicht in $(1s_3, 2s_2)$.

$$\begin{tikzcd}
 & 2s1 \arrow[d] & & \\
 & 1s2 \arrow[d] & & \\
1s1 \arrow[r] & 2s3 \arrow[r] & 1s3 \arrow[r, bend left] & 2s2 \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

Bsp.8

	$1s_1$	$1s_2$	$1s3$
$2s_1$	(2,1)	(3,3)	(1,2)
$2s_2$	(0,4)	(1,2)	(2,3)
$2s3$	(1,1)	(2,0)	(0,1)

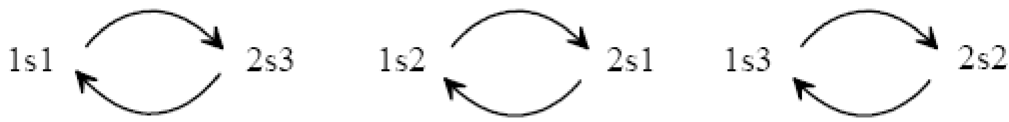
Dieses Spiel besitzt zwei Nashgleichgewichte $(1s_3, 2s_2)$ und $(1s_2, 2s_1)$.

$$\begin{tikzcd}
2s3 \arrow[r] & 1s2 \arrow[r, bend left] & 2s1 \arrow[l, bend left] & 1s1 \arrow[r] & 2s2 \arrow[r, bend left] & 1s3 \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

Bsp.9

	$1s_1$	$1s_2$	$1s3$
$2s_1$	(2,0)	(3,3)	(1,2)
$2s_2$	(0,1)	(1,2)	(2,3)
$2s3$	(3,3)	(2,0)	(0,1)

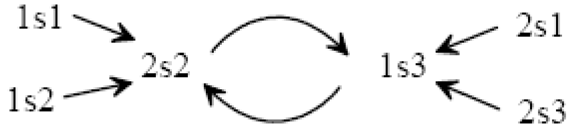
Dieses Spiel besitzt drei Nashgleichgewichte $(1s_3, 2s_2), (1s_2, 2s_1)$ und $(1s_1, 2s_3)$.



Bsp.10

	$1s_1$	$1s_2$	$1s3$
$2s_1$	(-2,0)	(-1,1)	(1,2)
$2s_2$	(0,1)	(1,2)	(2,3)
$2s3$	(-1,-1)	(0,0)	(3,1)

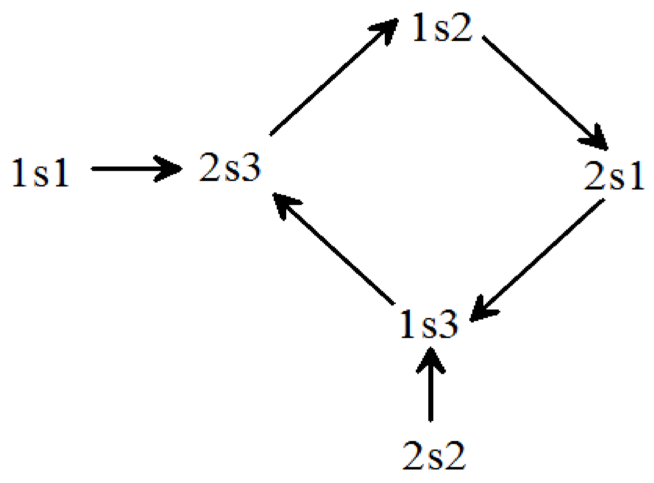
Hier haben wir eine Gleichgewicht in den dominanten Strategien $1s_3$ und $2s_2$.



Bsp.11

	$1s_1$	$1s_2$	$1s3$
$2s_1$	(1,2)	(0,3)	(2,1)
$2s_2$	(0,1)	(1,2)	(3,1)
$2s3$	(2,3)	(3,0)	(1,2)

Dieses Spiel hat gar kein Gleichgewicht.



Auch hier gilt, dass Gleichgewichte sich als 2-Zyklen erweisen.

Das soll als Satz formuliert werden.

Satz 1: Ist Γ ein 2-Personenspiel mit beliebig vielen Strategien, dann ist ein Gleichgewichtspunkt $\{1s, 2s\}$ ein 2-Zyklus bzgl. des besten Strategieübergangs und umgekehrt.

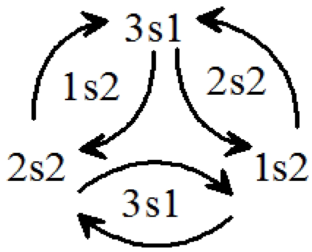
Bew.: 1. Sei $\{1s, 2s\}$ ein Gleichgewichtspunkt. Dann ist $1s$ die beste Strategie bzgl. $2s$ d.h. $2s$ geht in $1s$ über. Da auch $2s$ die beste Strategie bzgl. $1s$ ist, geht auch 1s wieder in 2s über und damit ist $\{1s, 2s\}$ ein 2-Zyklus.

2. Sei $\{1s, 2s\}$ ein 2-Zyklus. Dann geht 1s in 2s über und d.h. 2s ist beste Strategie bzgl. 1s. Ebenso geht 2s in 1s über, womit 1s die beste Strategie bzgl. 2s ist. Somit ist $\{1s, 2s\}$ Gleichgewichtspunkt.

Satz 2: Ist Γ ein 3-Personenspiel mit beliebig vielen Strategien, dann ist ein Gleichgewichtspunkt $\{1s, 2s, 3s\}$ ein 3-fach verbundener 2-Zyklus unter den Bedingungen der am Punkt beteiligten Strategie des 3. Spielers und umgekehrt.

vgl. zum 3-fachen 2-Zyklus:

$(1s_2, 2s_2, 3s_1)$ Gleichgewicht

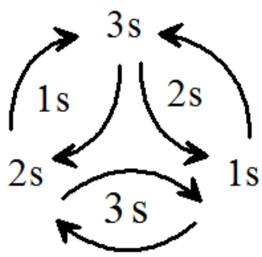


Bew.: **1.** Sei $\{1s, 2s, 3s\}$ ein Gleichgewichtspunkt. Dann ist 1s die beste Strategie bzgl. $\{2s, 3s\}$, d.h. $2s \overset{3s}{\rightarrow} 1s \quad 3s \overset{2s}{\rightarrow} 1s$.

2s ist die beste Strategie bzgl. $\{1s, 3s\}$. Also $1s \overset{3s}{\rightarrow} 2s \quad 3s \overset{1s}{\rightarrow} 2s$.

3s ist die beste Strategie bzgl. $\{1s, 2s\}$. Also $1s \overset{2s}{\rightarrow} 3s \quad 2s \overset{1s}{\rightarrow} 3s$.

Damit hat man folgendes Diagramm:



2. Sei umgekehrt ein Diagramm der abgebildeten Art gegeben. Man liest aus ihm dann die obigen Strategieübergänge ab. Womit wieder die Behauptung folgt.

Für n-Personenspiele mit $n > 3$ verlieren die höherdimensionalen Diagramme ihre Funktion der Anschaulichkeit.

Satz 3: Sei Γ ein deterministisches 2-Personenspiel mit je zwei Strategien. Dann gelten:

(1) Gleichgewicht in dominanten Strategien	$\Rightarrow$	1 2-Zyklus
(2) mindestens eine dominante Strategie	$\Leftrightarrow$	1 2-Zyklus
(3) 2 Nash-Gleichgewichte	$\Leftrightarrow$	2 2-Zyklen
(4) kein Gleichgewicht	$\Leftrightarrow$	1 4-Zyklus

Es sollen jetzt **Überlegungsebenen** betrachtet werden.

Bekannt seien den Spielern - wie bisher - die verschiedenen Strategien der Gegenspieler. Als Beispiel diene wieder das Gefangenendilemma.

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(1,1)	(0,3)
$2s_2$	(3,0)	(2,2)

$$\begin{tikzcd} 2s2 \arrow[r] & 1s1 \arrow[r, bend left] & 2s1 \arrow[l, bend left] & 1s2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

In der ersten Reflektionsebene werden wohl beide ihren unmittelbaren Nutzen ohne weitere Folgen zu kalkulieren im Auge haben: $(1s_1, 2s_1)$ mit jeweils größtgedachtem Nutzen 3.

Doch durch die Kombination reduziert sich der Nutzen jeweils auf 1.

Dies ist auch Ergebnis der 2. Reflexionsebene, wenn die beste Strategie unter Berücksichtigung der möglichen Wahlen der Gegner gewählt wird.

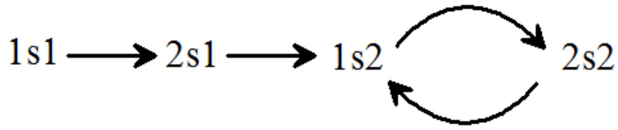
In der 3. Reflexionsebene - immer unter Voraussetzung des Egoismus - wird man dem Gegner unterstellen, dass er diese Kombination wählt und selbst versuchen, daraufhin eine bessere Strategie zu wählen, was aber hier nicht möglich ist, da wir ein dominantes Gleichgewicht haben.

Die vierte Ebene müsste die harte Egoismuslinie aufweichen. Dieses Spiel ist also unter egoistischer und kommunikationsfreier Perspektive bereits fixiert.

Auf allen 3 Ebenen die gleiche Wahl.

Als weiteres Beispiel diene folgendes Spiel:

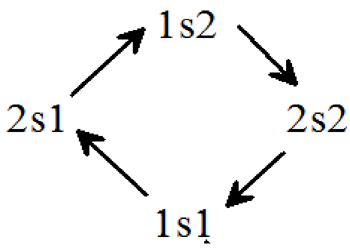
	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(2,3)	(3,0)
$2s_2$	(0,2)	(1,1)



1. Wahl: $1s_2, 2s_1$: Wert (3,0) 2. Wahl: $1s_2, 2s_2$: Wert: (1,1) ebenso 3. Wahl. (fix)

Weiter:

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(1,3)	(3,0)
$2s_2$	(2,2)	(1,1)



1.Wahl: $1s_2, 2s_1$: (3,0) 2. Wahl: $2s_2, 1s_1$: (2,2) 3. Wahl fix, da bei Umwahl von Sp2 Gefahr für große Verschlechterung. Sp1 kein Umwahlinteresse.

Satz 4 (1): Bei (2,2)-Spiel im dominanten Gleichgewicht sind alle Reflektionsebenen fix.

Bew.: Sei $\{1s_2, 2s_1\}$ dominantes Gleichgewicht und die Matrix habe folgende Gestalt:

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(a,b)	(c,d)
$2s_2$	(e,f)	(g,h)

Dann muss gelten: (1) $c>a$ (2) $g>e$ (3) $b>f$ (4) $d>h$

In der 2. Ebene wird das Gleichgewicht (c,d) gewählt.

- Angenommen er würde in der 1. Ebene (e,f) wählen. Dazu müsste aber der 1. Spieler $1s_1$ wählen und der 2. Spieler $2s_2$, d.h. e oder a müsste der max. Wert für den ersten Spieler sein. e ist es nicht wegen (2) und a nicht wegen (1).

- Bei der Wahl von (a,b) ist die Kombination $(1s_1, 2s_1)$. a kann aber wegen (1) nicht Maximum für 1. Spieler sein, ebenso wegen (2) nicht e.

- Wahl von (g,h) bzw. $(1s_2, 2s_2)$: dann müsste c oder g Maximum für 1. Spieler sein. Möglich. Für 2. Spieler müsste aber f oder h Maximum sein. h ist wegen (4) keines und f wegen (3) keines. Also ist (g,h) als 1. Wahl auch nicht möglich. Damit ist alles bewiesen.

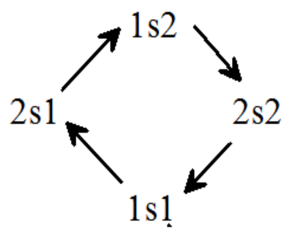
Satz 4 (2): Bei (2,2)-Spiel mit Gleichgewicht sind die Reflektionsebenen ab der 2. Stufe fix.

Bew.: ergibt sich unmittelbar aus dem Gleichgewicht.

Folgendes Spiel habe kein Gleichgewicht. Es ist also ein 4-Zyklus-Spiel.

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(a,b)	(c,d)
$2s_2$	(e,f)	(g,h)

Es gelte bspw. dieser 4-Zyklus:



Dann gelten: (1) $a < c$ (2) $d < h$ (3) $g < e$ (4) $f < b$

Fall 1: $g > c$. 1. Sp hat die Folge a c g e.
Dann ist e Maximum für Spieler 1 ; also Wahl von $1s_1$

Fall 1.1: $d > b$. Dann ist h Maximum für Spieler 2; also Wahl von $2s_2$.
Und damit ist die 1. Wahl $(1s_1, 2s_2)$ bzw. (e,f).
2. Wahl: 2. Spieler von f nach b und damit nach (a,b)
3. Wahl: 1. Spieler von a nach c und damit nach (c,d)
2. Spieler wird hier nichts mehr ändern, denn die zunächst günstige Veränderung von d nach h und damit nach (g,h) hätte in einer 4. Wahl wieder die schlechte Ausgangsposition für 2. Spieler zur Folge, und damit ist (c,d) stabil.

Fall 1.2: $d < b$.

Fall 1.2.1 $d > f$:

Fall 1.2.1.1 $h > b$. Damit hat 2.Spieler die Folge f d b h. Spieler 2 wählt also auch $2s_2$ und damit ist die 1. Wahl wieder (e,f).
2. Wahl: Sp.2 geht von f nach b und damit (a,b).
3. Wahl: Sp.1 geht von a nach c und damit (c,d). Sp. 2 würde mit der Wahl von d nach h in der
4. Wahl sich wieder durch Sp.1 automatisch verschlechtern, so dass er nichts umwählt. Damit ist also für Sp.1 b und damit ist
1. Wahl: (a,b).
2. Wahl: 1. Sp geht von a nach c, also (c,d). 2. Sp geht dann von d nach h und damit nach (g,h).
3. Wahl: würde 1. Sp sich nach e verbessern, so würde der 2. Sp sicher

von f nach b und das wäre äußerst schlecht für 1. Sp. Also ändert der 1.Spieler nichts. Also ist 2. Wahl (g,h) stabil.

Fall 1.2.2 d < f.

Fall 1.2.2.1 h < f. Damit hat 2. Sp die Folge d h f b.

1. Wahl: (a,b).
2. Wahl: 1. Sp > (c,d). 2. Sp > (g,h).
3. Wahl: 1. Sp > (e,f). Da mit 2. Sp > (a,b) das ganze von vorne begänne, so bleibt 2. Sp auf (e,f).

Fall 1.2.2.2 f < h < b. 2. Sp hat Folge d f h b.

	$1s_1$	$1s_2$
$2s_1$	(a,b)	(c,d)
$2s_2$	(e,f)	(g,h)

1. Wahl: (a,b)
2. Wahl: 1.Sp geht über zu (c,d). 2. Sp dann nach (g,h). Würde Sp.1 in der 3. Wahl nach (e,f) gehen würde sicher Sp.2 (a,b) wählen und das ganze Spiel würde von vorne losgehen. Also ist (g,h) stabil.

Fall 1.2.2.3 h > b. 2. Sp hat Folge d f b h.

1. Wahl: (e,f)
2. Wahl: 2. Sp nach (a,b)
3. Wahl: 1.Sp nach (c,d), 2. Sp nach (g,h). Würde der 1.Sp nach (e,f) gehen, ginge das ganze von vorne los. Beste Position ist so (g,h).

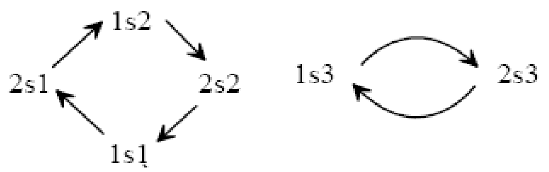
Die weiteren Fälle gehen analog. Spätestens bei der 3. Wahl ist Schluss.

Satz 4 (3): Bei (2,2)-Spiel ohne Gleichgewicht sind die Reflektionsebenen ab der 3. Stufe fix.

Der Satz ließe sich wahrscheinlich auf 2-Personenspiele mit mehr als 2 Strategien erweitern. Dann wäre bei einem 2-Personenspiel mit n_1+n_2 Strategien und ohne Gleichgewicht im extremsten Fall ein $2 \cdot min(n_1, n_2)-$Zyklus und damit ab der $2 \cdot min(n_1, n_2)-1$ Ebene auf jeden Fall stabil.

Bsp.12

	$1s_1$	$1s_2$	$1s_3$
$2s_1$	(0,2)	(2,1)	(1,0)
$2s_2$	(2,0)	(1,2)	(0,1)
$2s3$	(1,1)	(0,0)	(2,2)



Anhang:

1) Gefangenendilemma

Spieler 2

Spieler 1

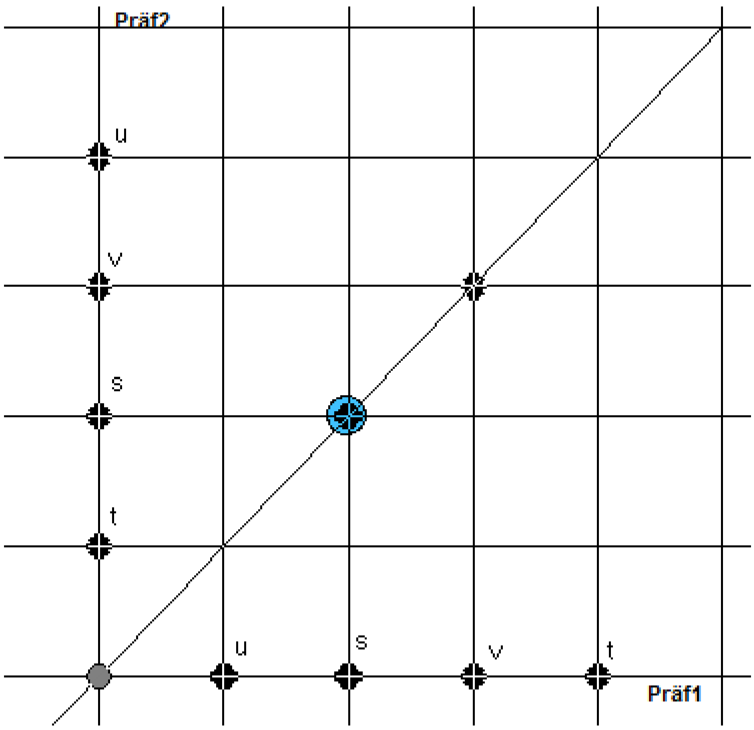
	s_1^2 gesteht	s_2^2 gesteht nicht	Minimum insgesamt	max von min
s_1^1 gesteht	$s:(-5,-5)$	$t:(0,-20)$	$(-5,-20)$	x (dom.)
s_2^1 gesteht nicht	$u:(-20,0)$	$v:(-1,-1)$	$(-20,-1)$	
Minimum insgesamt	$(-20,-5)$	$(-1,-20)$		
max von min	x (dom.)			

Utility-Funktion:

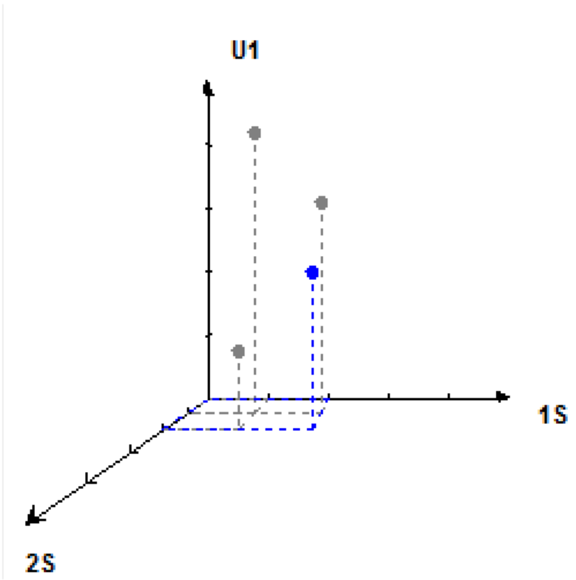
von Spieler 1: $U^1(s)=-5 \quad U^1(t)=0 \quad U^1(u)=-20 \quad U^1(v)=-1$

von Spieler 2: $U^2(s)=-5 \quad U^2(t)=-20 \quad U^2(u)=0 \quad U^2(v)=-1$

Präferenzdiagramm:

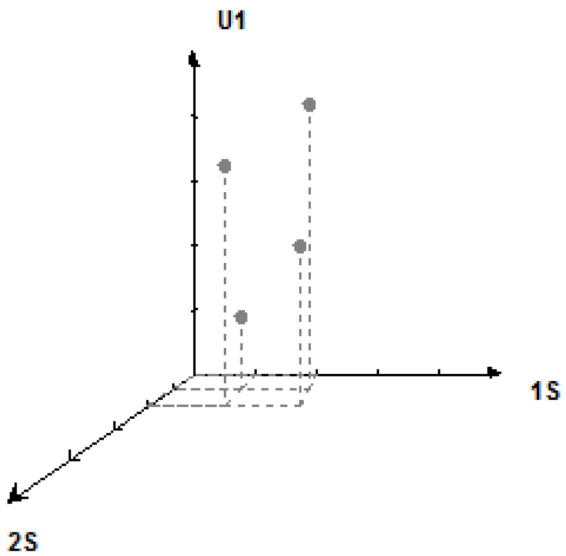


2) Nullsummenspiel: U1 ist die Nutzenfunktion von 1.Spieler



	$2s_1$	$2s_2$
$1s_1$	4	1
$1s_2$	3	2

$(1s_2, 2s_2)$ ist Sattelpunkt bzw. Gleichgewichtspunkt.



	$2s_1$	$2s_2$
$1s_1$	1	3
$1s_2$	4	2

keine dominanten Strategien, kein Nash-Gleichgewicht