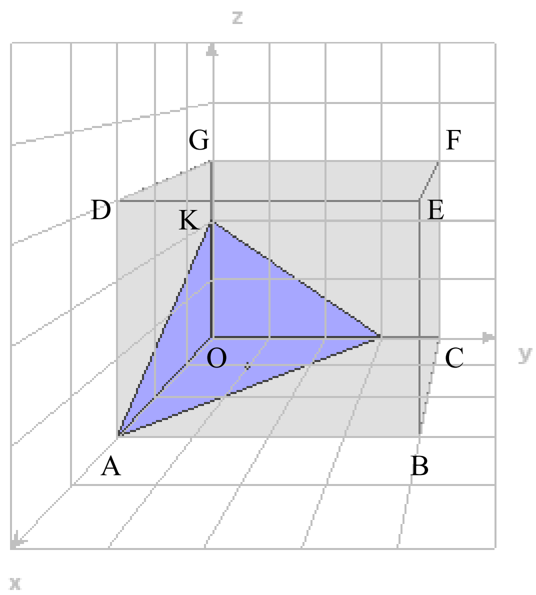
Übung HP3 MA 29.08.10

Ein Tetraeder OAHK liegt in einem Quader OABCDEFG der Länge 4, der Breite 3 und der Höhe 3. (vgl. Bild rechts.)



1. Gib die Koordinaten aller Eckpunkte der beiden Körper an.

2. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes M des Quaders und zeichne ihn in das Koordinatensystem ein.

3. Bestimme für die Ebene $e = e_{AHK}$ eine Parametergleichung.
   Zeige, dass sich e in der Form

$$e : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$ darstellen lässt.

4. Transformiere e in die ANF und dann in die Hessesche Normalenform (HNF).
   Welchen Abstand hat e vom Ursprung?

5. Gib die Koordinatenform von e an.
   Überprüfe, ob der Mittelpunkt M des Quaders auf e liegt.

6. Zeige, dass $S(\,1 \mid 1 \mid \frac{2}{3}\,)$ der Schwerpunkt S des Dreiecks AHK ist und überprüfe, ob $\overrightarrow{OS}$ ein Normalenvektor von e ist.

7. Berechne den Schwerpunkt T des Tetraeders OAHK.
   Zeige, dass T auf der Geraden g durch O und S liegt.

8. Gib für e die AAF an und gib eine Gleichung für die Spurgerade s_{yz} von e an.

Wir untersuchen weiter das Dreieck AHK:

9. Welchen Winkel hat das Dreieck in A?

10. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck? Wie weit ist H von A entfernt?

11. Erschließe den Abstand, den der Punkt K von der Strecke AH hat.

12. Ein Tetraeder (Pyramide) hat als Volumen = Grundfläche mal Höhe/3.
    Erschließe, welches Volumen der Tetraeder OAHK hat?

Lösung

1. O(0|0|0) A(3|0|0) B(3|4|0) C(0|4|0) D(3|0|3) E(3|4|3) F(0|4|3) G(0|0|3) H(0|3|0) K(0|0|2)

2. $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{g} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+0+0 \\ 0+4+0 \\ 0+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow M(\frac{3}{2}|2|\frac{3}{2})$

3. $e: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\overrightarrow{AH} + \mu\overrightarrow{AK} \quad e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow e: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

4. $e: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 6 = 0; \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17} \Rightarrow e: \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \frac{6}{\sqrt{17}} = 0$

$d(e, O) = \frac{6}{\sqrt{17}} \approx 1,46$

5. $e: 2x + 2y + 3z - 6 = 0 \quad M \in e \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{3}{2} = 6 \Leftrightarrow 3 + 4 + \frac{9}{2} = 6 \quad f \Rightarrow M \notin e.$

6. $\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{h} + \vec{k}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3+0+0 \\ 0+3+0 \\ 0+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow S(1|1|\frac{2}{3})$ Damit $\overrightarrow{OS}$ NV von e ist, muss er la

zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sein. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = 2 \wedge \alpha = 2 \wedge \alpha = \frac{9}{2} \Rightarrow$ lu $\Rightarrow \overrightarrow{OS}$ ist kein NV von e.

7. $\vec{t} = \frac{1}{4}(\vec{o} + \vec{a} + \vec{h} + \vec{k}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0+3+0+0 \\ 0+0+3+0 \\ 0+0+0+2 \end{pmatrix} \Rightarrow T(\frac{3}{4}|\frac{3}{4}|\frac{1}{2})$

$g: \vec{x} = \lambda\vec{s} \Leftrightarrow g: \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad T \in g \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 3/4 \wedge \lambda = 3/4 \wedge \lambda = 3/4.$

8. $e: \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} - 1 = 0 \quad s_{yz} = g_{HK}: x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

9. $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AK}}{|\overrightarrow{AH}||\overrightarrow{AK}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+9}\sqrt{9+4}} = \frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{13}} \approx 0,59 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,59) = 53,96^o$

10. $\mu = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{4+4+9} = \frac{3}{2}\sqrt{17} \approx 6,18 \quad |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$

11. $\mu = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AH}| \cdot d \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{17} = \frac{1}{2}\sqrt{18} \cdot d \Rightarrow d = 3 \cdot \sqrt{17}/\sqrt{18} \approx 2,92$

12. $V = \frac{1}{3}\mu \cdot \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{17} \cdot \frac{6}{\sqrt{17}} = 3$