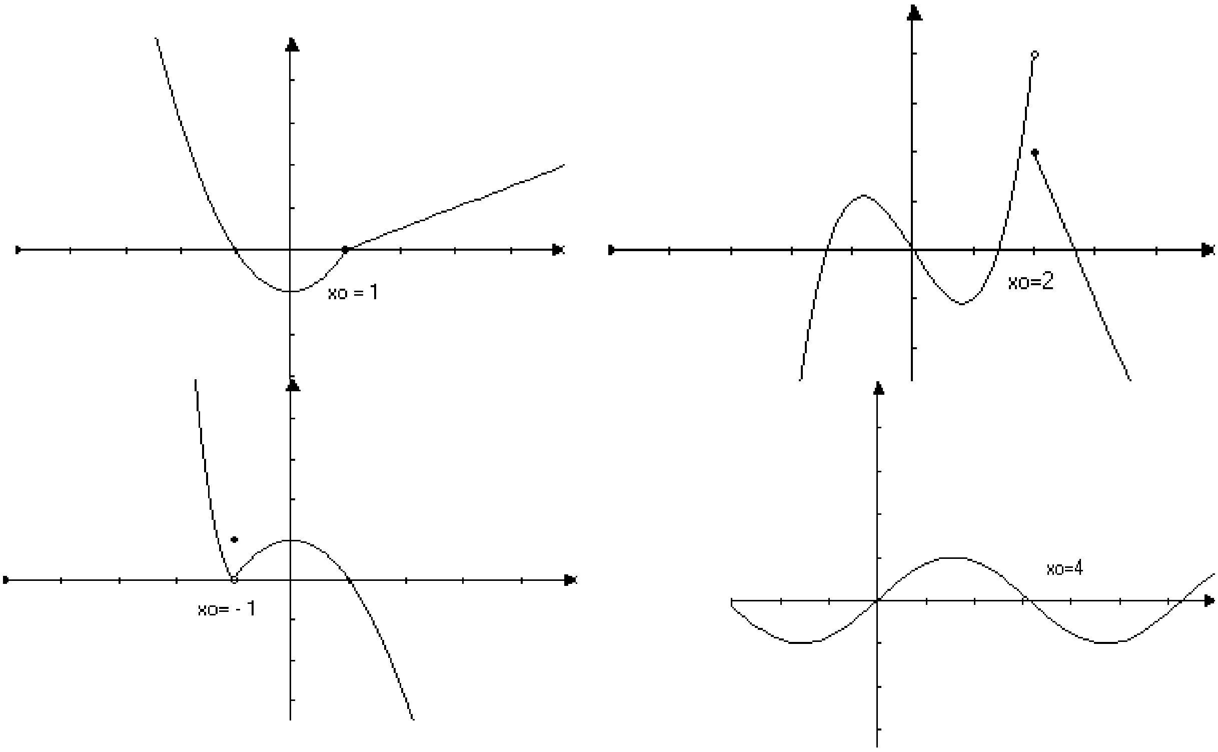
Übungsblatt SKEPa

A1 Ableitungen

Leite folgende Funktionen ab und vereinfache die Ableitungsterme. Berechne die Nullstellen der Ableitungsfunktion.

1. $f(x)=\frac{x^2}{(1-x)}$ 2. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ 3. $f(x)=\cos(2x)\cdot\tan(2x)$
4. $f(x)=(2x-6)^{10}$ 5. $f(x)=x\cdot\sqrt{x^3+2x}$ 6. $f_a(x)=ax(1-x)$

A2 Entscheide, welche der Funktionen an der Stelle x_o stetig, welche differenzierbar sind:



A3 Gegeben seien die Funktionen f und g mit $f(x)=x^3-1$ und $g(x)=x^2-1$.

a) Zeichne die beiden Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.

b) Berechne die beiden gemeinsamen Punkte der beiden Graphen.

c) Bestimme die Tangentengleichungen der Graphen in den gemeinsamen Punkten.

d) Unter welchem Schnittwinkel schneiden sich die Graphen in den gemeinsamen Punkten.

e) Bestimme die Gleichung der Normalen an den Graph der Funktion g vom Punkt $P(2|-\frac{1}{2})$ aus. Unter welchem Winkel schneidet die Normale den Graphen von g?

A4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$. Skizziere den Graph mithilfe der Nullstellen und der Extremstellen. Wo hat der Graph die Steigung $\frac{9}{4}$?

Lösung:

A1 1. $f(x)=\frac{x^2}{(1-x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(1-x)-x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}=0 \quad \Leftrightarrow$

$2x-x^2=0 \Leftrightarrow x(2-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$ (beide einfach)

2. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=$

$=\frac{2}{(x+1)^2}=0$ keine Lösung, da $2 \neq 0$

3. $f(x)=\cos(2x)\cdot\tan(2x)=\cos(2x)\cdot\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}=\sin(2x) \Rightarrow f'(x)=2\cdot\cos(2x)(KR)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos(2x)=0 \Leftrightarrow \cos(2x)=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2} \vee 2x=\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \vee x=\frac{3\pi}{4}$ im

Einheitsintervall $[0,2\pi]$

4.

$f(x)=(2x-6)^{10} \Rightarrow f'(x)\overset{KR}{=}10(2x-6)^9\cdot 2=20(2x-6)^9=0 \Leftrightarrow (2x-6)^9=0 \Leftrightarrow x=3$ (neunfach)

5. $f(x)=x\cdot\sqrt{x^3+2x} \Rightarrow f'(x)\overset{PR}{=}1\cdot\sqrt{x^3+2x}+\frac{x\cdot 1}{2\sqrt{x^3+2x}}\cdot(3x^2+2) \overset{Hauptnenner}{=}$

$=\frac{2\sqrt{x^3+2x}\cdot\sqrt{x^3+2x}+x(3x^2+2)}{2\sqrt{x^3+2x}}=\frac{2(x^3+2x)+3x^3+2x}{2\sqrt{x^3+2x}}=\frac{5x^3+6x}{2\sqrt{x^3+2x}}=0 \Leftrightarrow$

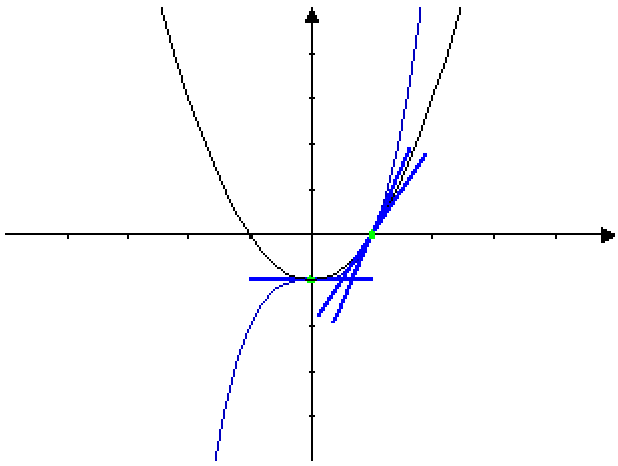
$5x^3+6x=0 \Leftrightarrow x(5x^2+6)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=-\frac{6}{5} \Leftrightarrow x=0$ (einfach) 2. Gleichung keine Lösung

6. $f_a(x)=ax(1-x)=ax-ax^2 \Rightarrow f_a'(x)=a-2ax=0 \Leftrightarrow 2ax=a \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

Für a = 0 ist die Funktion uninteressant: $f_0(x)=0 \Rightarrow f_0'(x)=0$

A2 Die erste Funktion ist in 1 stetig, aber nicht diffbar („Knick“)
die zweite Funktion ist in 2 weder stetig noch diffbar („Bruch“)
die dritte Funktion ist in -1 weder stetig noch diffbar („Sprung“)
die vierte Funktion ist überall stetig und diffbar, auch in 4.

A3 $f(x)=x^3-1$ und $g(x)=x^2-1$ **a)**



b) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3-1=x^2-1 \Leftrightarrow$
$x^3=x^2 \Leftrightarrow x^3-x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0$
$x=0$ (doppelt) $\vee\ x=1$ (einfach)
$g(0)=-1 \Rightarrow P_1(0|-1)$ Berührpunkt
$g(1)=1-1=0 \Rightarrow P_2(1|0)$ Schnittpunkt

c) Tangente t_1 in P_1 ist für beide Graphen gleich, da x doppelt.
$g'(x)=2x \quad g'(0)=0 \quad g(0)=-1$
$x_B=0 \; g(x_B)=g(0)=-1$
$t_1: y-g(x_B)=g'(x_B)(x-x_B) \Leftrightarrow$
$t_1: y-(-1)=0\cdot(x-0) \Leftrightarrow t_1: y=-1$

Tangente t_2 in P_2 an den Graph von f: $t_2: y-f(x_B)=f'(x_B)(x-x_B) \qquad x_B=1$

$f(x_B)=f(1)=0\ f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(x_B)=f'(1)=3\cdot1^2=3 \quad t_2: y-0=3(x-1)$
$\Leftrightarrow t_2: y=3x-3$

Tangente t_3 in P_2 an den Garph von g: $t_3: y-g(x_B)=g'(x_B)(x-x_B) \quad x_B=1$
$g(x_B)=g(1)=0 \quad g'(x_B)=g'(1)=2\cdot1=2$
$t_3: y-0=2(x-1) \Leftrightarrow t_3: y=2x-2$

d) im Punkt P_1 unter dem Winkel 0, da beide Tangenten dort gleich (Berührpunkt).
Im Punkt P_2 müssen wir die Steigungswinkel ausrechnen:

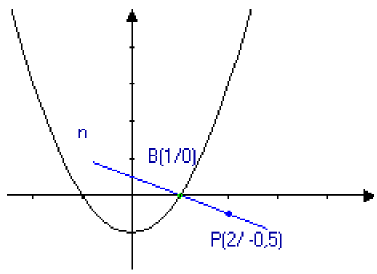
$\tan(\alpha_f)=f'(1)=3\cdot1^2=3 \Rightarrow \alpha_f=\tan^{-1}(3)=71{,}57°$
$\tan(\alpha_g)=g'(1)=2\cdot1=2 \Rightarrow \alpha_g=\tan^{-1}(2)=63{,}43° \quad \Rightarrow \phi=\alpha_f-\alpha_g=8{,}14°$

e) $P(2|-\frac{1}{2})$ Normale an Graph von g, $g(x)=x^2-1$. $\quad n: y-g(x_B)=\frac{-1}{g'(x_B)}(x-x_B)$

$g(x_B)=x_B^2-1 \quad g'(x_B)=2x_B \Rightarrow n: y-(x_B^2-1)=\frac{-1}{2x_B}(x-x_B)$

Da der Punkt $P(2|-\frac{1}{2}) \in n \Rightarrow -\frac{1}{2}-(x_B^2-1)=\frac{-1}{2x_B}(2-x_B) \overset{\cdot 2x_B}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2}\cdot 2x_B-2x_B^3+1\cdot 2x_B=$
$=-1(2-x_B) \Leftrightarrow -x_B-2x_B^3+2x_B=-2+x_B \Leftrightarrow -2x_B^3=-2 \Leftrightarrow x_B^3=1 \Leftrightarrow x_B=1$

Damit ist die Gleichung der Normalen: $n: y-(1^2-1)=\frac{-1}{2\cdot1}(x-1) \Leftrightarrow n: y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
Der Schnittwinkel der Normalen mit dem Graph ist immer 90°



A4 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$ Nullstellen: $x^3-\frac{3}{2}x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-\frac{3}{2})=0 \Leftrightarrow x=0$ (doppelt) $\vee\, x=\frac{3}{2}$ (einf.)

$f'(x)=3x^2-3x=0 \Leftrightarrow 3x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \quad f(0)=0 \quad f(1)=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$
$f''(x)=6x-3 \Rightarrow f'(0)=-3<0 \Rightarrow H(0/0) \quad f''(1)=6-3=3>0 \Rightarrow T(1/-\frac{1}{2})$