<u>Das Unendliche in der Mathematik</u>

von Manfred Hörz

0. Vorbemerkung

Der Begriff des Unendlichen in der Mathematik, d.h. des zahlenmäßig Unendlichen ist sicherlich eine sehr nützliche und elegante Bildung, die vieles vereinfacht und komprimiert und sich beihnahe als unabdingbar erwiesen hat. Viele Anstrengungen richteteten und richten sich darauf, die Korrektheit des Begriffs nachzuweisen oder gar Logiken so zu erweitern, dass Fragen und Probleme des Unendlichen besser beantwortet bzw. gelöst werden können. So hat zum Beispiel Hilbert durch die Beweistheorie versucht, das System der unendlichen Arithmetik durch finite Methoden als konsistent nachzuweisen, was wiederum die Konsistenz seiner Aixomatisierung der Geometrie garantieren würde. 1930 hat schließlich Gödel mit seinem Unvollständigkeitssatz die Undurchfürbahrkeit des Hilbert-Programms nachgewiesen. Er ist besonders raffiniert geführt, da er die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen voraussetzt und wesentlich verwendet. Selbst wenn man – wie ich – der Meinung ist, dass die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen eines der Hauptverwirrungen der Mathematik ist, so ist diese Art der Argumentation dennoch zulässig, da man ja selbst nicht an die Unendlichkeit glauben muß. Sie verwendet einfach Ansichten des Opponenten und weist damit die Undurchführbarkeit nach.

Oder das Programm von Abraham Robinson, der in seiner Nonstandard-Analysis die Korrektheit des Leibnizschen Infinitesimals nachweisen wollte. Betrachtet man seine Voraussetzungen, wird man unschwer erkennen, dass er an den üblichen Verirrungen der Unendlichkeitsmathematiker leidet.

Ich meine, dass es an der Zeit ist, ausschließlich eine korrekte endliche, finite Mathematik zu betreiben und die ganzen Anstrengungen auf deren Entwicklung zu konzentrieren. Nicht nur, dass kein einziger korrekter Begriff des zahlenmäßigen Unendlich existiert, sondern noch schlimmer, die großen Scheinerfolge der unendlichen Mathematik führen uns heute in eine fatale Sackgasse. Denn meines Erachtens sind die großen Probleme der Vereinheitlichung der Physik nicht in der Physik selbst zu suchen, sondern in der Mathematik. Wenn es überhaupt möglich sein sollte, eine physikalische Theorie „GUT“ zu entwickeln, dann nur über eine finite Mathematik. Denn die Vereinheitlichung von Quantenfeldtheorien und Relativitätstheorie scheitert letztlich immer auch an den Unendlichkeitsproblemen verschiedener Provenienz.

1. Die Anfänge des Irrtums

Man erinnert sich sicherlich an den schönen und berühmten Beweis des Euklid über die Unendlichkeit der Primzahlen. Man nehme an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, sagen wir n. Diese lassen sich dann der Größe nach anordnen und durchnummerieren:

$$p_{1,} p_{2,\ldots}, p_n$$

Man bildet das Produkt aus ihnen und addiert 1 dazu:

$$p := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Es ist leicht ersichtlich, dass p wieder eine Primzahl ist. Denn wäre sie durch eine Zahl außer sich selbst und 1 teilbar, so müsste sie durch eine Primzahl kleiner sich selbst teilbar sein, also durch

$$p_1 \text{ oder } p_2 \text{ oder} \ldots \text{oder } p_n$$

Dann müsste aber auch 1 durch diese Primzahl teilbar sein, was nicht möglich ist. Demnach ist p Primzahl, die größer ist als die größte angenommene Primzahl p_n, was einen Widerspruch bedeutet. Also - so schließt man – gibt es nicht nur endlich viele Primzahlen.

Wo liegt hier das Problem? In der Annahme, es gäbe auf jeden Fall die Zahl p, d.h., dass man jeder Zeit zu einer Zahl noch eine größere Zahl konstruieren könnte.

Nach diesem Prinzip „beweist“ man ja auch, dass es unendlich viele Zahlen gibt. Denn gäbe es nur endlich viele, so bräuchte man ja nur zu der größten unter ihnen noch 1 dazu addieren und man hätte eine größere Zahl als die größte angenommene.

Mit dieser Argumentation hängt auch das berühmte Problem der irrationalen „Zahlen“ zusammen. Die Pythagoreer bauten ja ihre Metaphysik auf der These auf, dass sich alles durch (natürliche) Zahlen und deren Verhältnissen ausdrücken lasse, wie bspw. die Harmonik der Musik oder auch die „geometrische“ Gerechtigkeit. Im Pentagramm oder im Quadrat zeigte sich aber die Grenze dieser Hypothese: die Diagonale des Quadrats ist inkommensurabel zur Grundseite des Quadrats. Ähnlich wie 2000 Jahre später Gödel nachwies, dass das Hilbert-Programm mit seinen eigenen Ideen widerlegbar war, zeigte angeblich ein Pythagoreer namens Archytas mittels der Zahlentheorie, dass dieses Verhältnis nicht rational ist, also die Grenzen des Pythagoras-Progamms: Bezeichnet man mit d die Länge der Diagonalen eines Einheitsquadrates und unterteilt die Basis in beliebig endlich viele Teile, sagen wir n der Länge $\frac{1}{n}$, und wäre d durch diese Teile, sagen wir durch m dieser Teile meßbar, so wäre $d=\frac{m}{n}$. Wir nehmen weiter an, dass m und n teilerfremd sind. Falls dem nicht so ist, kürzen wir so lange, bis das der Fall ist: sei also $d=\frac{m'}{n'}$ mit teilerfremden m' und n'. Nach Pythagoras ist aber $d^2=1^2+1^2=2$ und damit $2=\frac{m'^2}{n'^2}$ oder $2\cdot n'^2=m'^2$. Das heißt, dass m'^2 durch 2 teilbar ist. Demnach muß m' schon durch 2 teilbar sein, denn 2 ist keine Quadratzahl. Also ist m'^2 durch 4 teilbar. Also gibt es eine Zahl a mit $m'^2=4\cdot a$ und demnach gilt $2\cdot n'^2=4\cdot a$ und nach Division der Gleichung mit 2: $n'^2=2\cdot a$. Das bedeutet, dass auch n' durch 2 teilbar sein muß. Demnach wären sowohl n' als auch m' durch 2 teilbar und somit nicht teilerfremd, wie wir angenommen haben. Das heißt, dass d nicht als Verhältnis zweier natürlicher Zahlen darstellbar ist, d.h. dass d nicht rational ist. So weit so gut. Will man das Pythagoras-Programm in veränderter Fassung aufrecht erhalten, dass nämlich alles durch Zahlenverhältnisse darstellbar ist, muss man den Zahlbegriff erweitern und auch „irrationale“ Zahlen zulassen, d.h. Zahlen hören auf zu zählen: $\frac{2}{3}$ zählt Drittel einer Einheit, nämlich 2 davon, aber was soll $\sqrt{2}$ zählen? Irrationale Zahlen sind sogenannte nichtperiodische unendliche Dezimalbrüche. Das ist wieder das Unendliche. Auch bei der Cauchy-Definition, irrationale Zahlen als Grenzwerte rationaler Zahlenfolgen, die nicht in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konvergieren, zu betrachten, kommt man ohne den Unendlichkeitsbegriff nicht aus.
Die andere Möglichkeit, irrationale Zahlen als gewisse Dedekindsche Schnitte zu definieren,

benötigt ebenfalls bereits den Begriff der Unendlichkeit, ebenso die Methode der Intervallschachtelungen. Irrationale Zahlen setzten also die Unendlichkeit voraus.

Hätte man das geometrische Verhältnis von Basis und Diagonale nicht arithmetisieren wollen, wäre uns eine lange Irrtumsgeschichte nicht nur in der Mathematik erspart geblieben.

Wir hätten nämlich akzeptiert, dass nicht alles reduzierbar ist, wir hätten **das Andere** anerkannt. Und der fatale Monotheismus wäre an uns vorüber gegangen.

Die Diagonale ist in dieser Beziehung berühmt geworden. (Pythagoras, Platon, Cantor, Gödel) Platon verwendet sie nicht nur positiv im Höhlengleichnis der Politeia, um zur höheren jenseitigen Erkenntnis zu gelangen, sondern auch im Menon, um zu zeigen, dass ein Methoden- und Perspektivenwechsel zur philosophischen Einsicht führen kann. Cantor hat dann die Jakobsleiter zum Unendlichen in seinem Diagonalisierungsverfahren eingeführt, die in ähnlichem Geist auch schließlich Gödel verwendet, um dem nicht-formalen Wissen sein Recht zurückzugeben.

2. Der Irrtum

In der Mathematik ist die Geschichte „des Unendlichen", wie der Name schon sagt, eher Theologie denn Mathematik. Bolzano verficht als Theologe eher als Mathematiker das Unendliche. Die Grundargumentation ist so simpel wie möglich: Im § 9 seiner „Paradoxien des Unendlichen" definiert er eine unendliche Vielheit als den allen mathematisch unendlichen Größen zugrunde liegenden Begriff. Darin hat er sicherlich Recht. Eine unendliche Vielheit ist nach ihm „eine Vielheit die größer als jede endliche ist, d.h. eine Vielheit, die so beschaffen ist, dass jede endliche Menge nur einen Teil von ihr darstellt."
Das hört sich gut an. Genau so gut wie etwa die Definition: Eine Sphinx ist ein Wesen, dessen Körper der einer Löwin, dessen Kopf der einer Frau ist und die einen Schlangenschwanz und Vögelflügel besitzt. Wie die griechische Sphinx ist das Unendliche ein männerverschlingendes Ungeheuer, dessen Rätsel nur die emanzipierten und kräftigsten, auf zwei Beinen gehenden Ödipusschüler lösen können. Das Unendliche ist die matriale Göttin, vielleicht auch noch in der patrialen Form eines Gottes erhalten.
Der Beweis des Unendlichen ist genauso sinnlos wie die Gottesbeweise. Aber darüber hinaus wird es kaum möglich sein, diese Unendliche zu erfahren, im Gegensatz zu Göttlichem.
Sowenig wie die mythische Sphinx erfahrbar ist. Bei dem Nachweis, dass der „Begriff" des Unendlichen nicht leer ist, ist bisher jeder gescheitert und zwar aus gutem Grund, da es nicht existenzfähig ist. Man zeige mir eine Vielheit, die größer ist, als jede endliche. Ich habe keine finden können. Das Einzige, was ich gefunden habe ist, dass alle Nachweise hierfür Zirkelschlüsse sind.
Bereits Aristoteles meinte ganz in dem Sinne von Bolzano, dass die Zahlen unendlich sind, nur dass er vorsichtiger war als Bolzano: potenziell unendlich.

Galilei bemerkte bereits eine Paradoxie des Unendlichen, die er mithilfe von Quadratzahlen erläuterte: Offensichtlich ist ja, dass es mehr (natürliche) Zahlen als Quadratzahlen gibt, da bspw. 2 keine Quadratzahl ist, jede Quadratzahl aber Zahl. Andrerseits lässt sich jeder Zahl genau eine Quadratzahl zuordnen und umgekehrt:

$$1 \rightarrow 1; \;\; 2 \rightarrow 4; \;\; 3 \rightarrow 9; \;\; 4 \rightarrow 16; \;\; \ldots$$

Also gibt es doch genau so viele Quadratzahlen wie Zahlen selbst. Aus diesem Paradox schloss Galilei, dass man größer, kleiner und gleich nicht auf das Unendliche anwenden könne.

Genau diese Paradoxie verwendet dann Dedekind, um das Unendliche zu definieren, nur dass er Gedanken anstatt Zahlen wählt. Die heute übliche Definition einer unendlichen Menge verwendet dieses gedankliche Unding.
Man erkennt leicht, dass hier Theologie und nicht streng mathematisches Denken die Ursache der Verwirrung ist. Für diesen Gedanken hätte Galilei sicher nicht die Inquisition fürchten müssen, im Gegenteil er hätte sich mit ihm sogar loskaufen können.

In diesem theologisch dogmatischen Zeitalter leben wir leider heute immer noch. Die Schatten des Mittelalters reichen noch bis in die Gegenwart.

Das theologisch Unendliche (Gott) wird in der Mathematik durch unendliche Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ repräsentiert. So wie Gott den kleinen Gott (den Menschen) nach seinem Bilde schuf,

$$s : Gott \to Mensch$$

schafft in der Mathematik die Menge der natürlichen Zahlen die kleine Menge der Quadratzahlen oder der geraden Zahlen G:

$$f : \mathbb{N} \to G \,;\, n \to 2\mathrm{n}$$

in eineindeutiger Weise durch die sogenannte bijektive Funktion f.

Jeder Zahl wird das Doppelte zugeordnet. Auf diese Weise erhält man alle geraden Zahlen. Umgekehrt kann man jeder geraden Zahl 2n ihre (bessere) Hälfte n zuordnen und erhält so wieder jede natürliche Zahl. Die Analogie ist jedoch tiefer als man glauben könnte.
Denn so wenig wir die Schöpfung s Gottes verstehen, so wenig versteht man diese bijektive Funktion f. Beide Mengen sollen ja ähnlich sein, d.h. beide sind unendlich.
Noch besser, jede Menge M, die eine echte Teilmenge K (Menschenkind), die gleichmächtig zum Vater M ist heißt unendliche Menge, per Dekret. Dieses Wunder ist eben kleingöttlich.
Die Mathematiker wollten so gerne auch mal Gott spielen oder doch zumindest Priester des Gottes. Dass diese Nachahmung auch Magisches erzeugt, darf nicht mehr wundern. Und das hat der Begriff des Unendlichen ohne Zweifel getan. Auf diese Magie will ich weiter unten eingehen.

Die Verzauberung liegt in dem Begriffs, der mehr ist als sein Begriffenes, als seine Objekte.
Hatte Hegel noch ganz aristotelisch gemeint, dass ein Stein auf die Erde fällt, da sein Ziel eben die Mitte (der Erde), die Einheit ist, so meinen viele Mathematiker eben, dass der Begriff mächtiger ist als jedes Einzelne. Und das ist sicher nicht einfach zu analysieren.
Dazu später. Der Begriff ist die Funktion f, die als Begriff eben garantiert, dass jedes n ein Doppeltes hat. Man kann es ja auch aufschreiben und sehen: 2n. Der Begriff des Doppelten ist mächtiger als das Verdoppelte, er garantiert die Möglichkeit der Verdoppelung.
Der Begriff ist ja auch dem göttlichen Wort ähnlich. Der kleine Gott spricht: „Es werde das Doppelte und siehe da, es war das Doppelte. Diese Wort- oder Begriffsmagie beherrscht nicht nur das wilde Denken, sondern auch das vieler Mathematiker. Und auch dafür gibt es ja nicht zu leugnende Gründe. Auch das später.

Ist man jedoch in dieser Hinsicht weniger gläubig und fragt nach nachvollziehbaren

Gründen für die Existenz dieser Funktion, indem man einfach den Nachweis des Doppelten verlangt, geht man schnell leer aus. Wieso gibt es denn zu einer sehr großen Zahl das Doppelte? Zu 1 ok, zu 2 ok,..., zu 100 ok. Aber zu 10^{100} ? Ganz einfach $2\cdot 10^{100}$!
Ist doch klar, ergibt sich aus dem Bildungsgesetz f. Also auch zu $2\cdot 10^{100}$ und auch wieder zu seinem Doppelten usw. usf. Nichts als Zeichen.

Um nur zu einer Zahl sein Doppeltes zu erzeugen, müsste ich zu jeder erzeugten Zahl wieder das Doppelte angeben können usf. Bis ins Unendliche. Bevor ich nachweisen könnte, dass es eine solche Funktion f gibt, müsste ich bereits das Unendliche zur Verfügung haben, das ich aber gerade erst durch diese Funktion begründen will. Ein typischer circulus vitiosus.

Diesem circulus kann man nur entgehen, wenn man die Priorität des Begriffs voraussetzt, der per eigener Macht dieser Schöpferfunktion zur Existenz verhilft.

Einen Ausweg sieht man hier in der axiomatischen Mengenlehre von Zermelo, die einfach die Existenz einer unendlichen Menge fordert: *„Der Bereich enthält mindestens eine Menge Z, welche die Nullmenge als Element enthält und so beschaffen ist, dass jedem ihrer Elemente a ein weiteres Element der Form {a} entspricht.“ Zermelo 1907.*

Wie man sieht, ist dieser iterative Prozess von a nach {a} das gleiche Problem in anderen Zeichen wie die Konstruktion der natürlichen Zahlen durch Hinzufügen einer weiteren Einheit. Ich komme auf diese Konstruktion gleich zu sprechen. Will man aber das formale Axiomensystem, wovon dieses Axiom das letzte von sieben Axiomen ist, durch eine Interpretation semantisieren (ein Modell angeben), also zeigen, dass das System konsistent ist, ist man wieder auf die Menge der natürlichen Zahlen als Beispiel angewiesen. Auch dies der typische circulus vitiosus.

Die Konstruktion der natürlichen Zahlen nach Lorenzen ist einfacher und näher an der natürlichen Vorgehensweise.

Das Konstruktionsgesetz f ist noch einfacher. Wir gehen damit sogar noch weiter zurück und reden anstatt von Zahlen einfach nur von Zahlzeichen und symbolisieren sie durch Punkte:

• •• ••• •••• ••••• ••••••

Wir fangen mit einem Punkt an. Dann setzen wir einen weiteren dazu, dann wieder einen und so fort. D.h. Wir führen zwei Handlungsschemata aus:

f: H_1: Setzen eines ersten Punktes: $\Rightarrow$ •

H_2: Haben wir schon einen oder mehrere Punkte gesetzt, dann setzen wir zu dem Haufen von Punkten, nennen wir ihn H noch einen hinzu: $H \Rightarrow H$ •

Behaupten wir – und das war ja die ursprüngliche Behauptung von Bolzano- dass es unendlich viele Zahlen (hier sogar im schwachen potentiellen Sinne) gibt, so fordern wir nur, dass zu einer vorhandenen Punktmenge immer noch ein Punkt gesetzt werden kann, kurz, dass wir H_2 immer anwenden können.

Wo liegt hier nun das Problem? Es liegt darin, dass wir ein Schema, das wir immer ausführen können, da wir es beherrschen, glauben immer ausführen zu können und daher immer größere Punktmengen, weitere Zahlenzeichen und größere Zahlen angeben können.

Erstens verwechseln wir hier zwei Bedeutungen von können: die Fähigkeit und die Aktualisierung. Ich *kann* es ausführen und ich kann es *ausführen.*

In der Philosophie unterscheidet man die Möglichkeiten: Da gibt es die formelle Möglichkeit, die nur darin besteht, dass ihre Realisierung keinen Widerspruch bedeutet und dann die Durchführbarkeit der Möglichkeit, die reale Möglichkeit. So ist es formell möglich, dass es eine Sphinx geben könnte oder wir auf Erden alle Zuckererbsen essen könnten. Jede reale Möglichkeit impliziert die formelle, aber nicht umgekehrt.
Ein Schema, das wir beherrschen, zum Beispiel „gehen“ oder „zählen“, können wir ohne innere Schranke ausführen, es gibt kein inneres Hindernis, das mit dem Schema zu tun hätte. Kann ich einmal gehen, d.h. habe ich es gelernt, einen Fuß vor den anderen zu setzen ohne umzufallen, dann kann ich es immer wieder tun. Es gibt auch Schemata, die einer Bedingung genügen müssen, um sie ausführen zu können. So kann ich von einer Menge ein Element entfernen und wieder eins und so fort, bis keines mehr vorhanden ist. Dann allerdings geht es nicht mehr. Die Bedingung ist, dass noch Elemente vorhanden sind.
Das ist ja ein Beweisprinzip von Fermat gewesen. Kann ich beweisen, dass eine Eigenschaft nur dann gilt, wenn sie für den Vorgänger gilt, kann es keine Eigenschaft der natürlichen Zahlen sein (Widerlegung durch den unendliche Regress).

Die Menge der natürlichen Zahlen ist ja nach unten beschränkt. Aber doch nicht nach oben. Das ist eine Täuschung. Abziehen ist ein Verlegen, ein Element wird von einer Menge in eine andere gelegt, auch wenn die Menge nicht explizit genannt ist. Es ist die Menge der Elemente, die zuvor in der ersten waren. Wenn ich nun Elemente hole und sie zu den Elementen der Menge der natürlichen Zahlen lege, dann werden sie von einer sehr großen Menge, in der sie vorher waren, abgezogen. Dieser Prozess würde nur dann bedingungslos vonstatten gehen, wenn die Menge aus der ich die Elemente hole, selbst wiederum unendlich ist. Auch hier wieder der circulus.

Man wird einwenden, das sind ja nur gedachte Operationen, keine realen. Ich hole ja nichts Wirkliches aus einer wirklichen Menge. Aber dieses Denken macht die Rechnung ohne den Wirt. Ein Gedanke, ein Zeichen, ist real! Jedes Zeichen bedeutet eine Energiemenge, jeder Gedanke ebenfalls. Man kann damit so sparsam wie nur möglich umgehen, irgendwann einmal ist die Energiemenge erschöpft. Denn es gibt nur endlich viel Energie. Wäre dem nicht so, wäre der Energieerhaltungssatz falsch. Also ist die Menge, aus der ich schöpfe aufgebraucht und da endet leider meine Konstruktion. Die Bedingung des Denkens ist, dass es Energie dafür gibt. Oder man schöpft ständig aus Nichts. Das ist wieder Theologie.

Der nahe liegende Einwand ist hier natürlich: Mathematik ist keine Physik. Sicher, aber es gibt physikalische Bedingungen des Denkens. Denken findet nicht im leeren Raum statt. Zählen (zumindest auf die traditionelle Weise) kann man ja auch nur, wenn es Festkörper gibt. Eine Kugel plus eine Kugel sind zwei Kugeln. So sind auch ein getrenntes Zeichen plus ein getrenntes Zeichen zwei Zeichen. Aber ein Tropfen Wasser plus ein Tropfen Wasser ist nur ein Tropfen Wasser. Ein Photon plus ein Photon ist ein Photon.

Man könnte meinen, dem Problem zu entgehen, wenn man für jedes zusätzliche Zeichen nur halb so viel Energie verwendet, so dass endlich viel Energie ausreicht um unendlich viel Zeichen konstruieren zu „können“.

Man weiß ja, dass die geometrische Reihe $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ gegen 2 konvergiert.

Dabei treibt man aber den Teufel mit dem Belzebub aus: denn jetzt ersetzt man das „unendlich“ Große durch das „unendlich“ Kleine. Das Gleiche in Grün.
Auch diesem Vorhaben widerspricht die Physik, die Quantenphysik. Dort gibt es kleinste und gleichgroß bleibende Energiemengen und diese werden irgendwann erschöpft sein. Denken ist zwar auf einer anderen Stufe reell wie die reellen Dinge, da man ja auch Virtuelles denken kann. Aber das Denken bleibt physikalisch gebunden. Virtuelles Denken gibt es in diesem Sinne nicht.

Ein anderer Grund für die reale Unmöglichkeit der Unendlichkeit natürlicher Zahlen und damit von Unendlichkeit überhaupt (im zahlenmäßigen Sinne) spielt hier noch mit.

Man verwechselt die Prozedur mit den durch die Prozedur erzeugten Objekten. Es ist in der Informatik üblich, alles über Funktionen auszudrücken. Ein Irrtum. Ja in der Mathematik behaupten auch einige Geister, dass man alles auf Mengen (Objekte) oder auf Funktionen gründen könne. Um Letzteres zu demonstrieren, konstruiert man die charakteristische Funktion:

$$\chi_M : \mathrm{x} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{falls } \mathrm{x} \notin M \end{cases}$$

und möchte dadurch die Mengen (Objekte) eliminieren. Diese selbst ist natürlich über Objekte definiert. Zu jedem sinnvollen Aufbau gehören sowohl Objekte als auch Funktionen oder Relationen. Das eine Extrem ist im weiten Sinne als Realismus oder Materialismus bekannt, das andere als Idealismus oder Formalismus. Beide Spielarten entstanden bei Descartes' falscher Konstruktion des sicheren Wissens.

In unserer Welt funktioniert Sprache nur in der Kombination von Nominatoren und Prädikatoren. Selbst Einwort-Sätze wie „Schön!“ bezeichnen eine Situation, die aus dem Kontext ersichtlich ist oder als solche vorausgesetzt ist (impliziter Nominator) und sagt über sie aus, dass sie schön ist.

Meines Erachtens lässt sich der Gödelsche Beweis des Unvollständigkeitssatzes auch so verstehen: dass ein rein formales System (das reichhaltig genug ist) nicht alles 'sagen' kann, oder genauer: nichts. Umgekehrt sind Objekte allein blind, wie Kant es formulierte. Ein Nominator'satz', der ausschließlich aus einem Nominator besteht, wie bspw. die ausgestreckte Hand eines Babys oder stilisiert sein Zeigefinger, heißt genauer: „Gib mir bitte dies!“ Würden wir diese Geste als pure Zeigegeste verstehen, wäre sie bedeutungslos. Der 'Satz' „dies“ ist sinnlos. Und das hat seinen Grund in der Verflechtung von Begriff und Gegenstand. (Dabei unterscheide ich nicht zwischen Funktion, Begriff, Form, Prädikator etc.) Und daher kommt auch die Bedeutung der Funktion, die Macht des Idealismus'.

In der Frühphase der Entwicklung sind freilich Begriff und Gegenstand das Gleiche. Daher ihre scheinbare Auswechselbarkeit.

Es ist die Sehnsucht des Kindes, die es Objekte konstruieren lässt. Nach der Geburt existiert für das Kind nur eine Unterscheidung, seine eigene. Die von der Mutter. Seine Trennung, die es erlebt hat und dessen Sehnsucht (unter *einem* gewissen Aspekt) die verlorene Einheit wieder zu erleben. Es erlebt so zwei Situationen, die des Unbehagens U und die des Behagens B und den inneren Drang f zum Behagen. Das ist die Grundlage der semiotischen Funktion. Ihre Magie und ihre Schöpfungskraft alles weiteren.

$$f : U \to B$$

Da die Behagenssituationen nur relative sind, wird der Prozess quasi von selbst angetrieben.

$$U_{1,} B_{1,} U_{2,} B_{2,} U_{3,} B_{3,...}$$

Das qualitative Manko wird im Gedächtnis, (dem 'Gedenknis') der Vorform des Denkens, durch die Überlagerung der bisherigen Behagenssituationen ausgeglichen. Bis schließlich sich unter günstigen Verhältnissen (einer gewissen Konstanz des mütterlichen und väterlichen Verhaltens) eine Struktur herausschält: das erste Präobjekt: Mutter mit Flasche bspw.
Hier lässt sich Objekt von Begriff nicht trennen. Mutter mit Flasche ist sowohl Objekt als auch Begriff. Sie wird der psychologischen Erwartung (nach Behagen) während der nächsten Unbehagenssituation nun eine logische hinzufügen, nach dem artikulierten, bestimmten Behagen: „Mutter mit Flasche“. Das Bedürfnis ist geboren. Es besitzt sowohl den Pfeil der Funktion f nach Behagenserwartung, als auch sein Objekt und seinen Begriff. Und es erzeugt ineins die Artikulierung des Unbehagens als bspw. Hunger.

Die Objekte sind in den Situationen vorgeformt und der Drang ist die Grundfunktion, die Grundintention, der Pfeil, der alle Operationen und Handlungen entstehen lässt.

Hierin ist auch der Zeitpfeil begründet und Zeit überhaupt.

Das, was gewünscht wird ist die innere Unendlichkeit, das Paradies, aus dem man vertrieben wurde. Es ist das Sein des Parmenides und die aus ihm entstandenen Theorien des Unendlichen, die sein Schüler Zenon zur Genüge demonstriert hat. Es ist das Reich Gottes, aus dem sich diesmal die Mathematiker, nachdem sie das neue, diesseitige zahlenmäßig erzeugte erfunden haben nicht mehr vertreiben lassen wollen. Nicht noch einmal. (Hilbert) Ein gefährliches Surrogat. So gefährlich wie die ganze kulturelle Struktur, die sich daraus ergibt und die Freud in der Nachfolge Nietzsches erneut diagnostiziert hat in seiner These vom „Unbehagen in der Kultur“. Dieser Gott ist tot und lassen wir ihn doch ruhen.
Es gibt schönere Götter. Götter des Endlichen. Denn sie sind liebende Götter.

Nachtrag: Man könnte Gödels Beweis auch so formulieren, dass er zur Widerlegung des Unendlichen wird: Formalismus + Unendliches + Inhaltliches erzeugt mittels der Diagonaliserungsfunktion einen Widerspruch. Worauf wollen wir verzichten? Auf den Begriff, auf das Inhaltliche (Objekte) oder auf das Unendliche? Man braucht nicht einmal auf das Unendliche zu verzichten, lässt man es im Reich der Theologie, denn

Credo quia absurdum est.

4. Der fatale Nutzen und der Zauber des Unendlichen in der Mathematik

Den Ursprung des Zaubers habe ich verortet in der Magie der Schöpfung des Kindes, der Allmacht seiner Gedanken, doch wieder näherungsweise ins Paradies zu kommen.

1. **Kant** hat das aufgegriffen mit seiner kritischen Metaphysik. Denn seine Ideen von der

Welt, der Seele und von Gott sind alles regulative Ideen, die Einheit stiften aber nur grenzwertig.

Es ist sinnlos von der Welt als Ganzes zu sprechen, wie es heute die Physiker wieder versuchen, die Unsterblichkeit der Seele beweisen zu wollen, wie es Platon unternahm oder die Existenz Gottes zu begründen, worin sich u.a. Descartes gefiel. Alte und schlechte Metaphysik. Der Metaphysik hat sich Kant allerdings nicht komplett entledigt. Sein Mittel ist die Unendlichkeit. Und man kann diesem Denken nicht die Eleganz und Schönheit absprechen. Ich liebe es. Auch wenn es falsch ist. Auch Falsches kann schön sein.

Meines Erachtens ist der Grenzwertgedanke das Zauberwort der kantschen kritischen Metaphysik. Wie kann ich noch Sinnvolles über das Jenseits aussagen, mit den Mitteln unseres Verstandes und unserer Vernunft? Die Mathematik wie immer lehrt es uns. Die Struktur der Folgen, das Diesseits, ist auf das Jenseits, von uns her gesehen das Reich der Grenzwerte, der regulativen Ideen, übertragbar. Die Grenzwertsätze sagen es klar: Der Grenzwert einer Summe von Folgen ist die Summe der Grenzwerte eben dieser Folgen. Usw. Der Grenzwertoperator ist ein Homomorphismus. Das Diesseits hat also eine dem Jenseits ähnliche Struktur. Das sagt ja bereits der Schöpfungsbericht. Der Mikrokosmos spiegelt den Makrokosmos wieder. Ebenso lässt sich die Struktur der rationalen Zahlen auf die der irrationalen, jenseitigen (nicht transzendenten) mittels des Grenzwertbegriffs übertragen.

2. Logik und Stetigkeit (Illusion), Logik ist nicht unabhängig vom Menschen, sondern nur Verfestigung einiger Grundverhaltensweisen. Der Logizismus.

(Noch: 3**.** Weltwirtschaft und Mathematik, Luftblasen, Kettenbriefe, verwenden von Ressourcen die man noch nicht und nie haben wird, abgehobene Mathematik, der kleine Gott: Schöpfung aus dem Nichts)