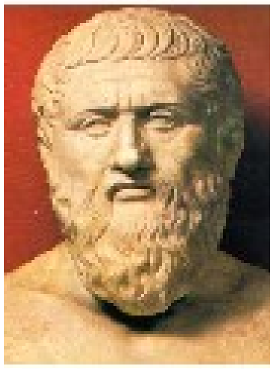
Die Dialektik von Zenon

Manfred Hörz



Zenon von Elea (490 - 430 v. Chr.) war der einflussreichste Schüler von Parmenides, der die Thesen seines Lehrers durch eine interessante Dialektik zu verteidigen suchte. Die Welt 2 (siehe unter dem Artikel über Parmenides) gilt ja als die Welt der Gegensätze, der Veränderung, der Bewegung, der Vielheit, des Unvollkommenen und des Vagen. Auf diese Welt bezieht sich vor allem auch Heraklit, der gemeinhin als Gegenspieler des Parmenides gesehen wird, obwohl diese Opposition nicht so selbstverständlich ist. Auf jeden Fall spricht die Welt der „viel erfahrenen Gewohnheit" klar gegen die Theorie des Parmenides.

So hat etwa Diogenes sich über Parmenides und Zenon lustig gemacht, und sie gleichzeitig ohne jede theoretischen Argumente, sondern nur durch Handeln ad absurdum führen wollen: Er ging einfach auf und ab und demonstrierte so die real existierende Bewegung.

Zenons Methode bestand darin, die Thesen oder Konstrukte der Alltagswelt dadurch zu widerlegen, dass er aus ihren Annahmen logische Widersprüche herleitete. Er folgert also aus einer Annahme A seiner Gegner einen Widerspruch der Form $B \wedge \neg B$. Dazu kann er sich logischer Argumente bedienen oder eben der Denkfiguren seiner Opponenten, da diese sie ja für richtig halten. Ich glaube, dass er vor allem aber logisch im Sinne des Parmenides argumentiert. [Siehe die Argumentationstechnik von Gödel (Unvollständigkeitssatz), die ganz ähnlich funktioniert].

Von Zenon ist nur sehr wenig erhalten und das nur in der Form von Zitaten und Berichten anderer Philosophen (Simplicius, Platon, Aristoteles,...) Es sollen 40 Argumentationen gegen die Vielheit gegeben haben, von denen uns nur noch zwei bis drei erhalten geblieben sind. Weiter gibt es noch vier Paradoxe in Bezug auf die Bewegung oder Veränderung, eines in Hinsicht auf den Raum und eines bezüglich des Schalls (der Hirse). Ich gehe hier nur auf die beiden ersten Gruppen ein.

Argumentation gegen die Vielheit

1. Vieles ist endlich und unendlich

Wenn Vieles ist, so muss notwendig so vieles sein, wieviel wirklich ist, nicht mehr, nicht weniger. Wenn aber so viel ist wie eben ist, so ist es wohl begrenzt. Wenn Vieles ist, so ist das Seiende unbegrenzt. Denn stets ist ein Anderes zwischen zwei Seienden und wieder Anderes zwischen jenen. Und also ist das Seiende unbegrenzt.

Zuerst muss nochmal darauf hingewiesen werden, dass das Seyn des Parmenides zwar, wie er sagt, die Grenze, das Ende in sich hat, aber das ist keine räumliche Grenze, sondern das Ende, das Ziel. Denn es ist nicht bedürftig, wie er als Argument hinzufügt. Anders gesagt, es ist vollkommen und hat daher keinen Grund sich zu bewegen oder zu verändern. Dass dieses Seyn kein rein körperliches ist, ist klar, es ist offensichtlich „beseelt", sonst könnte es nicht bedürfnislos sein.

Bei Zenon geht es nun ja um die Sinneswelt mit ihren Körpern und verschiedensten Dingen. Auf jeden Fall müssen sie sich unterscheiden, um Viele sein zu können. Die These B lautet nun: „Sie sind begrenzt viele". Sind es eben bspw. fünf, dann nicht sechs. Es ist die Eigenschaft des

Endlichen genau bestimmt zu sein, wenn es denn existieren sollte. Aus n = n + 1 würde folgen, dass 0 = 1 ist. Das wird als Argument in der 2.Welt anerkannt werden müssen, wenn man nicht total unvernünftig sein will (wie in der Welt 3). Die Antithese $\neg B$ heißt dann notwendig: „das Seiendes ist unendlich viel an der Zahl".
[Hierfür wird gelten, dass $\infty + 1 = \infty$.] Nehmen wir an, wir hätten zumindest zwei Seiende ("Dinge" oder Gedanken oder ...). Dann bedarf es deren aber sogar drei. Denn das Trennende ist das Dritte. Das zugleich auch das Vergleichende ist. Nehmen wir ein Beispiel. Eine Zahl heißt gerade, wenn sie durch zwei teilbar ist, sonst ungerade (nicht gerade):

$$\underset{m}{\exists}\, n = 2\mathrm{m}$$

oder konkreter: 10 ist gerade, weil es eine Zahl (das Dritte) gibt, nämlich die 5, so dass $10 = 2 \cdot 5$.
9 ist ungerade, weil es keine Zahl m gibt, die mit 2 multipliziert, 9 ergibt. „Ungerade" und „gerade" wird also durch eine (jeweils spezielle) Zahl m vermittelt und getrennt, durch ihre Existenz oder Nichtexistenzen.

Auf genau diese Art argumentiert ja auch Aristoteles dann gegen Platon, der zwei existierende Welten angenommen hat, die Sinneswelt und die Ideenwelt, und zwar mit dem „Argument des dritten Menschen". Wenn es zwei Menschen M_1 und M_2 gibt, einen realen und einen ideellen, die Idee des Menschen, dann muss es einen dritten M_3 geben, der sie vergleicht und trennt. Also gäbe es drei. Und nun das gleiche Argument für die drei.
Um M_1 mit M_3 zu vergleichen und zu trennen, muss es einen vierten M_4 geben, ebenso für den Vergleich von M_2 und M_3, also M_5. Das Spiel geht nun weiter. Also muss es unendlich viele Welten geben. Daraus folgert Aristoteles. Es gibt nur eine Welt (ganz im Sinne von Parmenides und Zenon, dessen Beweise er widerlegen wollte! Ironie der Unwissenheit!), denn das Unendliche (vor allem der Zahl nach) gilt den Griechen als unvernünftig. So hatten sie ja auch $\sqrt{2}$ nicht als Zahl (unendlicher Dezimalbruch) anerkannt. Da Logos nicht nur Sprache, Vernunft sondern auch Zahl heißt, nennen wir sie ja auch alogos, lateinisch irrational.

Wie nun Aristoteles argumentierte, so tut es vor ihm eben auch Zenon. Das Trennende, damit es trennen kann muss ein Seiendes sein und das heißt aus zwei wird drei. Das Dritte muss aber als Seiendes auch vom ersten Seienden unterschieden werden und das kann nur durch ein neues Kriterium, nämlich ein viertes Seiende gehen. Das heißt, eine Unterscheidung erzeugt - genauer hin gesehen - eine ganze Kette (Explosion) immer neuer Dinge oder Gedanken, die prinzipiell ohne Ende sind. Damit ist der Widerspruch perfekt und Vielheit logisch widerlegt.
Bei Parmenides jedoch hat man den Eindruck, dass er gerade dadurch mit die (dialektische) Grundlage gelegt hat, die (unendliche) sinnliche Welt aus der Dualität (Sein - Nicht) zu erzeugen, wie es im Übrigen ja auch Anaximander ähnlich gemacht hat.

Diese analytische Methode (aus Eins mach Zwei, aus Zwei mach Drei...) wurde durch Hegel perfektioniert und zum heutigen Begriff der Dialektik entwickelt. Seine Logik fängt mit dem Sein des Parmenides an (nicht mit seinem Seyn!). Dieses hat keinerlei qualitative Bestimmung in sich, es ist nur. Damit ist es das Gleiche wie das Nicht(s), nur dass dieses Nicht eben das der Welt 2 des Parmenides ist, das ist. (Das andere, zum Seyn passende, gibt es ja nicht!) Das, was das Sein und das Nichts trennt und verbindet, ist - als Gedanke - der vom Sein zum Nicht übergeht, eben der Übergang, das Werden. Diese Dritte (Werden), für Hegel aber kein Gegenargument, sondern die (analytische und damit begrifflich synthetische) Wahrheit von Sein und Nichts, wird nun mit dem Sein verglichen zum Entstehen und mit dem Nichts zum Vergehen. Auf diesen dialektischen Spiralen entwickelt er die ganze (dialektische) Logik der Begriffe.

Aus der Teilbarkeit des Seins in der Welt 2 also ergab sich der Widerspruch. Man könnte von daher auch folgendermaßen argumentieren, was Zenon an anderer Stelle auch tut: Ist die Einheit teilbar und der Teil ja wieder eine Einheit, so ist sie prinzipiell unendlich oft teilbar.
So wie bei der Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \cdots$. Warum aber soll jede Einheit teilbar sein? Weder die Natur noch der Gedanke scheint von dieser Art zu sein. Bei Hegel liegt keine unendliche Dialektik vor, sondern eine äußerlich (der Zahl nach) endliche. In der Natur gibt es auch kein Unendliches, zumindest sieht es so die Quantenlooptheorie. In der Mathematik gibt es objektiv auch

kein Unendliches (vgl.> diskrete Mathematik, das Unendliche). Aus der prinzipiell beliebigen Wiederholbarkeit eines Schemas (der Halbierung etwa), folgt weder die potentielle und noch viel weniger die aktuelle Unendlichkeit. Dadurch, dass ich das Handlungsschema des „einen Fuß vor den andern zu setzen“ beherrsche, kann ich es weder potentiell (der Möglichkeit nach) noch real (der Wirklichkeit nach), ich kann es nur der Fähigkeit nach (der irrealen Möglichkeit nach, wenn man will). Also sind doch jeder Zeit die Dinge oder Gedanken endlich und genau so viel, wie sie eben sind. Das war These B. Dass diese Anzahl sich vergrößert, heißt nicht, dass sie zum gleichen Zeitpunkt sich (beliebig) vergrößert, sondern eben danach. Es ist eine zeitliche Veränderung der Zahl und keine momentane, die erst diesen Widerspruch streng genommen ergeben würde. Die Zeit und die Veränderung bzw. die Bewegung ist daher als nächstes zu untersuchen.

Da Bewegung m.E. der zugrundeliegende Begriff ist und Zeit und Raum nur Aspekte der Bewegung und nicht selbstständig, sondern eben nur Momente (oder Abstraktionen) sind, so ist das wichtigste Paradox das der Bewegung.

Doch zuvor noch ein weiteres Argument gegen die Vielheit:

2. Vieles ist, wenn es ist, unendlich groß und zugleich unendlich klein.

Er zeigt zuerst, dass *wenn das Seiende keine Größe besitze, es auch nicht sei. Dann fährt er fort: Wenn es aber ist, so muss notwendigerweise ein Jedes eine gewisse Größe und Dicke und Abstand haben. Und von dem vor jedem liegenden Teile gilt die selbe Behauptung. Auch dieser wird nämlich Größe haben und es wird ein anderer vor ihm liegen. Die gleiche Behauptung gilt nun ein für allemal. Denn kein derartiger Teil desselben (des Ganzen) wird die äußerste Grenze bilden, und nie wird der eine ohne Beziehung zum anderen sein. Wenn also Vieles ist, so muss es notwendig zugleich klein und groß sein: klein bis zur Nichtigkeit und groß bis zur Grenzenlosigkeit.*

These 1: Viel Seiendes hat keine Größe (ist unendlich klein) [und ist demnach nicht].
These 2 Viel Seiendes ist unendlich groß.

Daraus folgt dann der Schluss, dass Vieles aufgrund dieses Widerspruchs nicht sein kann.

Den Beweis zu These 1 haben wir nicht mehr. Wie könnte er ausgesehen haben? Ich meine so: wenn wir ein sinnlich Wahrnehmbares haben, das also aus Welt 2 oder 3 stammt, so hat es Teile. Nehmen wir einen Körper. Etwa einen Stein, einen Quader, ein dreidimensionales Gebilde. Er ist begrenzt im Raum sonst wäre er alles und mithin das Seyn. Ist er aber begrenzt, so hat er eine Grenze, die ihn umgebende Fläche, die Grenzfläche, die aus sechs Rechtecken besteht. Jedes Rechteck davon ist eine zweidimensionale begrenzte Fläche. Diese haben demnach wieder ihre Grenzen, und das sind jeweils vier eindimensionale begrenzte Linien. Ihre Begrenzungen sind Punkte (die Ecken des Quaders). Diese aber sind null-dimensional, unendlich klein, d.h. haben keinerlei Ausdehnung. Also existieren sie nicht. Wenn Punkte in der Sinneswelt nicht existieren, so kann auch die begrenzte Linie nicht existieren, da ihre Grenzen nicht sind. Weiter können begrenzte Flächen nicht sein, da ihre Grenzen (Linien) nicht sind. Schließlich folgt daraus, dass auch der Körper, der Quader nicht existieren kann, da eben seine Ränder (Ebenen) nicht sind.

Gegen diese Art von Argumentation wäre aber die Kugel immun. Sie besitzt zwar auch eine Begrenzung, die sie umhüllende Fläche, der Kugelmantel, aber sie, die Fläche, hat keinen Rand, ist unendlich. Hier können wir nicht mehr herabsteigen bis zu den Begrenzungspunkten, die als dimensionslose nicht existieren können. Vielleicht ist das auch der Grund, dass Parmenides sein Seyn als quasi kugelförmig bezeichnet. Aber wenn jedes Seiende doch auch eine Dicke haben muss, wie Zenon in der Argumentation zur These 2 sagt, dann hat diese

Dicke die Begrenzungsfläche nicht. Also existiert sie so gesehen auch nicht und damit auch nicht die Kugel und kein räumlicher Gegenstand. Die Begrenzung ist notwendig, wenn nicht nur ein Seiendes existiert, nämlich als Abgrenzung zum anderen hin.
Und als Abgrenzung ist es immer eine Dimension tiefer, die aber gar nicht existiert, da es nur Dreidimensionales in der Wirklichkeit unserer Sinnenwelt gibt. Die einzige Möglichkeit ohne diesen Widerspruch ist ein einziges Seiendes, so wie es Parmenides beschreibt (und im übrigen streng genommen auch die Quantenphysik, die die Existenz getrennter Objekte verneint (alles hängt mit allem zusammen!).

Hinzufügen lässt sich jetzt noch problemlos, dass Körper der Sinneswelt, die begrenzt sind, aber keine Grenze haben können, zu Punkten zusammenschmelzen und die Größe Null haben müssen und damit nicht existieren. (Obwohl man auf deren Nichtexistenz auch direkt schließen kann wegen des Widerspruchs: Begrenzt sein, aber keine Grenze haben.)

Eine zweite weniger plausible Art zu argumentieren wäre die übliche mit der 'unendlichen' Teilung eines Körpers - wie es der Kommentar von Simplicius in der Tat suggeriert. Nehmen wir der Einfachheit halber anstatt eines Quaders eine Strecke, eine Einheitsstrecke. Wenn wir diese Strecke halbieren und die beiden Hälften wieder halbieren und die vier Viertel wieder halbieren und diese Methode nun ständig anwenden, so erhält man nach der n-ten Teilung 2^n gleich große Teile, jedes von der Größe $\frac{1}{2^n}$. Sind diese Teile Seiendes, so sind sie wieder Vieles (in der Welt 2-3) und ich kann sie weiter teilen oder sie sind weiter geteilt. Ihre Größen werden immer kleiner, sie streben gegen Null. *Entweder* lande ich bei Teilen, die die Größe Null haben (so genannte Infinitesimale, vgl. das Leibnizsche Kalkül der Differenzial- und Integralrechnung), dann müssen diese Nullteile aufsummiert wieder Null ergeben (auch wenn sie 'überabzählbar unendlich' sind!). So argumentiert Zenon völlig richtig an anderer Stelle zur Begründung der Nichtexistenz von Nullteilchen, dass eine Aufsummierung von einem Nullteil (Teil der Länge Null) zu einem Teil, diesem nichts hinzufügt und ihn nicht verändert, also wirkungslos ist, also nicht existiert. (Dahinter steht der vernünftige Satz, dass etwas, das keinerlei Wirkung zeigt, auch nicht existiert.). *Oder* sie haben nicht die Größe Null, was richtig ist. Denn Punkte als selbstständige Objekte der Sinnenwelt gibt es nicht!
Also müsste es logischerweise Teile geben, die nicht weiter teilbar sind, Atome, (keine Punkte, wie die aktuelle Physik zum Teil immer noch unvernünftigerweise [wie Newton und Einstein] annimmt) die fast den Status des Seyns haben.

Hier ist vielleicht doch anzumerken, wie später die Theorie, sehr wahrscheinlich durch die Argumentationen von Zenon zu dem Schluss kam, dass es Atome gibt (Vervielfältigung des parmenideischen Seyns), wie bspw. Leukipp und Demokrit. Ganz ähnlich ist auch Leibniz mit seinen Monaden gegenüber dem Spinozistischen Deus sive natura (einer unendlichen Substanz, die die beiden Aspekte des Geistes / Subjekts (deus) und der Ausdehnung / Objekt (natura) in sich trug) fortgeschritten.

Wenn dies aber das Resultat ist, so wäre innerhalb der Sinneswelt ein Seiendes (Atom), was nur durch den Logos bestimmbar ist. Das hat soweit ich weiß, Zenon nicht angenommen.
Trifft das zu, so würde diese zweite Argumentation nicht passen, denn durch sie landen wir bei dem Resultat, dass Körper unendlich klein, die Größe Null haben. Diese geht nur mit der ersten Argumentation.
Wie oben bereits gezeigt, folgt, dass Seiendes, das keine Größe hat, wirkungslos und somit keine Wirklichkeit hat, nicht existiert.

Die Argumentation von These 2 - dass Seiendes, wenn es Vieles ist, auch unendlich groß sein muss - wird von Zenon vorgeführt:

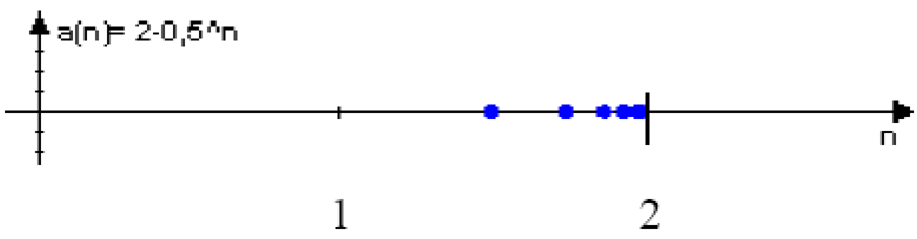
Aus der vorigen Argumentation kann man entnehmen, dass Seiendes eine Größe haben muss, sonst wäre es ja nicht. Darüber hinaus hat es auch Dicke und Abstand von anderem Seienden. Das Seiende vor diesem Seienden hat das wieder und so fort.

Ich interpretiere diesen Gedanken nicht als fortgesetzte interne Teilung, wie es andere machen und dabei letztlich auf *Punkte* als Atome kommen und dann den Unsinn diskutieren, wie lang eine Strecke ist, wenn sie aus Punkten besteht. Und zwar aus zwei Gründen nicht:
Erstens glaube ich nicht, dass Zenon so argumentiert, denn ein Punkt hat ja keine Größe und existiert mithin nicht. Zweitens ist die Rede, dass eine Gerade aus den Punkten zusammengesetzt ist, die auf ihr liegen ein platter Empirismus mathematischer Form, der voller Widersprüche selbst ist. Siehe mathematischer Teil: finite Mathematik. Jene stetige Mathematik eignet sich nicht als Analyseinstrument.

Nun Zenon geht von Seiendem aus, das eine endliche Größe hat. Da es Vieles gibt, muss jedes eine Grenze haben, sonst gäbe es nur eines.

Ich spreche hier nicht von topologischen Mengen (offenen Mengen oder abgeschlossenen Mengen), wo in der Tat eine offene Menge keine Grenze hat und problemlos eine andere offene enthalten kann, sondern von endlichen Größen bzw. unendlichen.

Denn ist es unendlich nach allen Richtungen hin (und nicht zumindest teilweise begrenzt) so kann es kein weiteres Seiendes geben, das außerhalb seiner ist. Also muss es begrenzt sein.
Der Einfachheit halber stelle man sich wieder eine Strecke, bspw. eine Einheitsstrecke, eine Stecke der Länge 1. Vor ihr liegt wieder etwas durch das es seine Begrenzung erhalten hat. Sagen wir eine weitere Strecke. Nehmen wir an, die Strecken die wir auf diese Art vorne anreihen würden immer kleiner der Länge nach und zwar so, dass sie - modern gesprochen einen Grenzwert hätten. Wir könnten hierzu etwa eine zweite Strecke der Länge $\frac{1}{2}$ haben und vor ihr eine der Länge $\frac{1}{4}$ und so weiter. Dann hätte das Ganze, das so aus diesen Teilen entstünde eine Länge, die 2 nicht überschreiten würde (ganz ähnlich wie später bei Achilles).



Zunächst sieht es so aus, als ob das durchaus der Zenonschen Denkweise entsprechen würde. *Denn kein Teil wird die äußerste Grenze bilden*, wie er sagt. Dieser Raum wird von innen nicht überschreitbar, wie wir bei Achilles und der Schildkröte sehen werden. Aber gerade dort sehen wir auch, dass Achilles sehr wohl auch die Schildkröte überholt, von außen her gesehen. Und genau dieser Perspektivenwechsel kommt hier zum Tragen. Von außen her kann ich die Strecke mit ihrem Grenzwert 2 betrachten und bemerke diese Grenze. Sobald diese Grenze beobachtbar ist, so erfordert sie ein neues Seiendes. Also befindet sich vor diesem Ganzen wieder ein Teil, egal ob er wieder mit anderen einen Grenzwert bildet oder nicht. Die Strecken müssen immer größer wachsen bis ins Unendliche.

Man könnte einwenden, dass die Streckengrenzwerte die hinzukommen, selbst immer kleiner werden, etwa jeweils die Hälfte der jeweils Vorigen. So erhielte man einen Grenzwert von

Grenzwerten von Folgen von Strecken. Der wäre wieder

$$2=1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...\right)+...$$

Jeder solche Grenzwert würde aber stets wieder neues Seiendes erfordern, da er nicht die äußerste Grenze sein kann. (Allerdings wäre das schon auf der 2. Metaebene.)

Der Opponent würde da entgegnen, schon, aber es braucht nur so Kleines hinzukommen, dass eine gewisse Größe nicht überschritten wird. Will man nun nicht einen endlosen Wechsel von Argumenten, so muss der Proponent die Strategie wechseln. Er führt den Beweis indirekt, indem er probeweise dem Opponenten Recht gibt. Man nehme an, es gäbe eine äußerste Grenze, nennen wir sie g. Dann braucht man ja nur noch ein beliebig kleines Stück hinzu zu fügen und schon ist die Annahme widerlegt. So „beweist" man ja auch klassischerweise, dass es unendlich viele Zahlen gibt.
Aber woher wissen wir, dass es noch Gegenstände gibt, die man hinzu fügen kann? Und kann ich immer den äußeren Standpunkt einnehmen? Es könnte ja auch andrerseits sein, dass ich beim nächsten Seienden, das ich betrachte, wieder beim ersten ankomme und sich der Kreis schließt! Dass ich das Unendliche so erreicht habe, aber nicht das unendlich Große.
Man wird hier entgegnen können, wir seien von einer Dimension nur ausgegangen. Ein Kreis kann es aber nur in einer zumindest zweidimensionalen Welt geben. Gehen wir in die dreidimensionale Welt!. Dort wählen wir dreidimensionale Körper anstatt Strecken. Aus Würfeln bspw. können wir doch auch eine Kette bilden, wird man sagen. Das aber reicht nicht.Wir müssen nach jeder Begrenzungsfläche hin Erweiterungen setzen, da jede Begrenzung nur ist durch Anderes. Wenn wird das aber gleichzeitig tun, so bekommen wir einen immer größeren Würfel, der genauso wächst, wie zuvor die Strecke. Wenn wir hier das Argument des Unendlichen als Sättigung der Grenzen verwenden wollten, dann müssten wir eine vierte Dimension zur Krümmung des Raumes verwenden, wenn man nicht von einer inneren Geometrie einer Raumkrümmung reden möchte. Die ist aber nicht möglich, oder bei irgendeiner Dimension zumindest müsste Halt gemacht werden (mit höher dimensionalen Gegenständen). Das führt nicht weiter.

Mir scheint, dass die Argumentation der These 2 nicht unbedingt zu gewinnen ist!

In der Stanford Encyclopedia of Philosophy wird die andere Version mit unendlicher Teilung einer Strecke versucht. Das ganze Seiende ist dort die Strecke. Ich will dies kurz referieren und diskutieren. Aber es führt auch nicht weiter, wie wir sehen werden.
Das erste Problem besteht darin, dass von aktual unendlich vielen kleinsten Teilen einer Einheitsstrecke ausgegangen wird. Mal ganz davon abgesehen, dass diese Theorie unsinnig ist, so gibt es zwei Möglichkeiten:
Erstens: die "Atome" haben eine endliche Größe.
Haben alle die gleiche Größe, ...[]

[Aber das ist ein ganz legitimes Argumentationsmittel, da er ja nur die Widersprüche in ihrem Weltbild aufweisen will und es so widerlegen möchte. Der indirekte Beweis funktioniert ja auch so, indem er Annahmen macht, die zum Widerspruch geführt werden. Ein berühmter Satz aus dem Anfang des 20. Jahrhunderts verfährt ganz analog: der Unvollständigkeitssatz von Gödel. Er weist nach, dass in einer formalen (mathematischen) Theorie, die mindestens die (unendlich vielen) natürlichen Zahlen beinhaltet nicht alle wahren Sätze (aus ihrem Axiomensystem) abgeleitet werden können, zumindest nicht unter Strafe eines Widerspruchs.
Dabei muss man nicht der Auffassung sein (wie bspw. ich), dass es unendlich viele Zahlen gibt, darf aber trotzdem dies voraussetzen und verwenden, da der Gegner (u.a. David Hilbert) ja gerade dieses System aufbauen wollte, um gesichert über Unendlichkeiten reden zu können. Akzeptiert man das

Unendliche nicht, dann ist der Satz von Gödel falsch, aber dann braucht man ihn auch nicht mehr. In endlichen Systemen lässt sich alles formalisieren.
Wenn also bei Zenon Voraussetzungen gemacht werden, dann heißt das nicht, dass er sie für richtig hält, aber seine Gegner müssen das schon tun, sonst sind die Beweise hinfällig.]

Argumente gegen die Bewegung

1. Achilles und die Schildkröte

Achilles, bekannt als Zentralfigur und schneller Läufer aus Homers Ilias, macht mit der Schildkröte, bekannt als besonders langsames Tier, einen Wettlauf, bei dem Achilles der Kröte großzügig und siegessicher einen Vorsprung gewährt. (Er kannte Zenon noch nicht, sonst hätte er es sich noch einmal überlegt!)
Nehmen wir der Einfachheit an, dass Achill nur doppelt so schnell ist wie die Schildkröte.
Beide starten gleichzeitig.

These A : Achilles holt die Schildkröte ein.

Hierzu muss keine Begründung angegeben werden, da es unserer „vielerfahrenen Gewohnheit" entspricht. Der übliche Beweis über Grenzwerte ist überflüssig, da hieran niemand zweifelt.

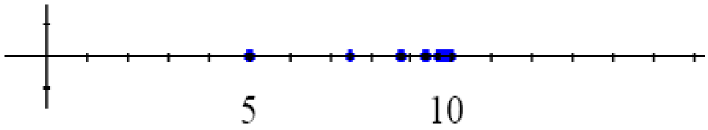
Antithese $\neg A$: Achilles holt die Schildkröte nicht ein.

Beweis: Während Achilles den Vorsprung der Schildkröte einholt, erläuft letztere einen neuen Vorsprung, der genau halb so groß ist wie der vorige (weil sie nur halb so schnell ist wie Achilles). Das gleiche Spiel wiederholt sich jetzt, so dass der Vorsprung stets halbiert wird, aber eben nie Null wird. D.h. Achilles überholt die Schildkröte nicht.


(Achill rechnet seine Chancen gegenüber der Schildkröte aus und bleibt sitzen :-)

Nehmen wir an, der Anfangsvorsprung sei $a_1=5.$, der nächste wird dann $a_2=\frac{5}{2}$ sein, dann $a_3=\frac{5}{4}$ und so weiter, allgemein der n-te Vorsprung ist $a_n=\frac{5}{2^{n-1}}$. Diese Folge strebt gegen

Null, aber kein Folgenglied ist Null.



Die Strecken, die Achilles zurücklegt sind sukzessive $s_1=5=a_1,\ s_2=5+\frac{5}{2}=a_1+a_2,$

$s_3=5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}=a_1+a_2+a_3,$ allgemein $s_n=a_1+a_2+...+a_n=5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+...+5\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$

$$5(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}})\Rightarrow 2\mathrm{s}_n=5(2+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-2}})$$

$$-s_n=5(-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{2^{n-1}})$$

$$s_n=5(2-\frac{1}{2^{n-1}})\rightarrow 10$$

Diese sogenannte Reihe strebt gegen 10. D.h. Achilles nähert sich in Richtung der Wegstrecke der Länge 10 immer mehr der Schildkröte, ohne sie jedoch zu überholen.

Demnach gibt es den Widerspruch $A\wedge\neg A$. Daraus folgert Zenon, dass Bewegung als widersprüchliches Phänomen nur eine Illusion, aber nicht real ist. Man beachte hier den viel gemachten Fehler, dass man $\neg A$ nicht mit dem Hinweis, dass A gilt, widerlegen kann.

Üblicherweise wird dagegen argumentiert, dass mit der Strecke auch die Zeit gegen Null strebt. Was folgt daraus? Das gleiche Problem wie mit dem Raum so auch mit der Zeit. Dass die Geschwindigkeit als $\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ konstant ist, interessiert niemanden, wird ja auch nicht geleugnet. Daraus abzuleiten, dass Achilles die Schildkröte überholt, geht nur, wenn ich eben die Zeit *nicht* infinitesimalisiere, sondern sage, dass die Zeit unabhängig in gleich großen Abschnitten weiter 'vergeht' und damit die Streckeninfinitesimalisierung irreal ist, nur eine ideale und irreale Operation bleibt. Aber dann behaupte ich, dass diese Teilung nicht vollzogen werden kann, weder mit der Zeit noch mit dem Raum. Man möge hier bitte keine physikalischen empirischen Theorien über die Bewegung bringen (auch wenn sie mathematisiert auftreten), denn dann geht man an dem Problem vorbei. Das Problem ist fundamentaler. Oder wenn man schon physikalisch argumentieren will, denke man an die Quantenlooptheorie, in der Zahlen einer Supermatrix (der Weltzustand) pro Zeiteinheit in eine andere übergeht (der Weltzustand wechselt) und kontinuierliche Bewegung und damit Bewegung auch nicht mehr existiert, so ähnlich wie in einem Film, wo ein statisches Bild auf ein anderes folgt. Ist Raum und Zeit gequantelt, gibt es keine klassische Bewegung mehr.

Liest man die Unschärferelation liberal (was häufig sehr fruchtbar ist), so muss Zeit gequantelt sein, da wegen

$$\Delta E\cdot\Delta t\geq\frac{h}{4\pi}\Rightarrow\Delta t\geq\frac{h}{4\pi\Delta E}\quad .$$

Gäbe es Zeit“punkte“, müsste die Energieunschärfe beliebig groß werden und damit die Energie selber, was aber unmöglich ist.
Ist aber die Zeit gequantelt, so muss es aus den gleichen Überlegungen auch der Raum sein:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} \Rightarrow \Delta x \geq \frac{h}{4\pi \Delta p}$$

So gesehen könnte Achilles tatsächlich die Schildkröte „überholt haben“, aber es gibt keine klassische Bewegung mehr.
Oder man geht von einem *Kontinuum* aus (entgegen der vorigen Überlegungen) (was m.E. mathematisch falsch ist) und dann ist in den Überlegungen von Zenon kein Fehler zu erkennen. Die Infinitesimalrechnung beweist hier gar nichts. Sie behauptet nur, was die Anschauung eh schon weiß. Aber einen Fehler in der Argumentation von Zenon kann sie nicht begründen. Behaupte ich, irgendwann ist soviel Zeit vergangen (die Zeit, die Achilles braucht um bspw. 20 Längeneinheiten zurückzulegen), so hat er sie doch überholt. Richtig, wenn ich annehme, dass es eine Vergleichsbewegung gibt, die solange dauert, was man nicht ernsthaft bezweifeln wird. Dann hat man begründet, was die Erfahrung uns sagt. Aber das wird ja nicht bestritten. Hat diese Zeitmessung denn eine Priorität vor der anderen? Sie ist so richtig wie die andere. Daher ja auch der Widerspruch! Aus dieser zweifachen Argumentation würde sogar die Widersprüchlichkeit des Kontinuums folgen. Und damit wäre man wieder bei der notwendigen Quantelung, die keine Bewegung zulässt. Das alles unter der Prämisse der Vielheit. Ob ich sie diskret oder kontinuierlich sehe, es ist die Vielheit, die die Bewegung ausschließt. Und lasse ich Vielheit nicht zu, so ist sie erst recht ausgeschlossen. Oder nicht?
Auf jeden Fall, so *wie* wir sie sehen. *Artikulieren* wir Bewegung nicht, sondern nehmen sie als ganzheitliches ununterschiedenes Phänomen, so wird sie wieder möglich.
Dann kann ich sie aber von Ruhe nicht unterscheiden. Und dann sind wir wieder in Welt 1, von der man streng genommen natürlich auch nicht sagen könnte, dass sie in Ruhe ist, sowenig man streng genommen sagen kann, dass sie Eine ist etc..

2. Der fliegende Pfeil

In jedem kleinsten Moment, so lautet dieses verwandte Paradoxon, ist der Pfeil in Ruhe, weil zur Bewegung bedürfte es zumindest einer Zeitspanne. Da aber die …

[Ansichten, die Zenon vom Gegner argumentativ übernimmt
Quanten-Zenon-Effekt: noch zu bearbeiten]