Heisenbergsche Unschärferelation

Manfred Hörz

Unter dem Erwartungswert eines hermiteschen Operators A bezogen auf den normierten Zustand $\langle\psi\rangle$ versteht man die reelle Zahl

$$\langle A\rangle=\sum_a P_\psi(a)a$$

Dabei ist P_ψ die bedingte Wahrscheinlichkeit und a die (reellen) Eigenwerte des Operators A .

Unter $\Delta_A:=A-\langle A\rangle:=A-\langle A\rangle\cdot E$ versteht man die Abweichung des Operators A von seinem Mittelwert (Erwartungswert). Sie ist wieder ein hermitescher Operator:

$$\Delta_A^\dagger=(A-\langle A\rangle E)^\dagger=A^\dagger-(\langle A\rangle E)^\dagger=A^\dagger-\langle A\rangle E=A-\langle A\rangle E=\Delta_A$$

Analog zur stochastischen Varianz einer Zufallsgröße wird nun der Erwartungswert des Quadrats der Abweichung betrachtet:

$$\langle\Delta_A^2\rangle=\langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle=\langle A^2-2\mathrm{A}\langle A\rangle+\langle A\rangle^2\rangle\overset{(1)}{=}\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2$$

Sie misst die mittlere quadratische Abweichung. Sie gibt also die sogenannte Unschärfe der Messung der Observablen A an.

Zu (1): Für die letzte Umformung wurde die Linearität des Erwartungswertes verwendet:

(a) $\langle A\pm B\rangle=\langle A\rangle\pm\langle B\rangle$

(b) $\langle\lambda A\rangle=\lambda\langle A\rangle$

(c) $\langle E\rangle=1$

(d) $\langle\lambda E\rangle=\lambda$

Zum Nachweis verwende ich die Formel $\langle A\rangle=\langle\psi|A|\psi\rangle$, die ich in unter „Erwartungswert eines Operators“ gezeigt habe.

Zu (a): $\langle A\pm B\rangle=\langle\psi|A\pm B|\psi\rangle=\langle\psi|\,A|\psi\rangle\pm B|\psi\rangle\,\rangle=\langle\psi|A|\psi\rangle\pm\langle\psi|B|\psi\rangle=\langle A\rangle\pm\langle B\rangle$
Zu (b): $\langle\lambda A\rangle=\langle\psi|\lambda A|\psi\rangle=\langle\psi|\lambda(A|\psi\rangle)\rangle=\lambda\langle\psi|A|\psi\rangle=\lambda\langle A\rangle$
Zu (c): $\langle E\rangle=\langle\psi|E|\psi\rangle=\langle\psi|\psi\rangle=1$, da $|\psi\rangle$ normiert.
Zu (d): $\langle\lambda E\rangle\overset{(b)}{=}\lambda\langle E\rangle\overset{(c)}{=}\lambda$

Damit lässt sich (1) zeigen:

$$\langle A^2-2\mathrm{A}\langle A\rangle+\langle A\rangle^2\rangle\overset{(a),(b)}{=}\langle A^2\rangle-2\langle A\rangle\langle A\rangle+\langle\langle A^2\rangle\rangle\overset{(d)}{=}\langle A^2\rangle-2\langle A\rangle^2+\langle A\rangle^2=\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2$$

Der Operator

$$[A, B] := AB - BA$$

heißt der **Kommutator** von A und B.

Es gelten folgende Gesetze:

Antisymmetrie: $[B, A] = -[A, B]$

Linearität: $[\lambda A + \mu B, C] = \lambda [A, C] + \mu [B, C]$

Jacobi-Identität: $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

Produktregel: $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

Die Linearität gilt auch rechts.

Im Allgemeinen ist das Operatorprodukt eben nicht kommutativ, sodass der Kommutator nicht der Nulloperator ist.

Unter dem **Antikommutator** von A und B versteht man den Operator $\{A, B\} := AB + BA$

Der Antikommutator ist symmetrisch und linear.

Zwischen dem Kommutator und dem Antikommutator bestehen folgende Zusammenhänge:

(1) $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$
(2) $[A, B] + \{A, B\} = 2\mathrm{AB}$

Die erste Regel entspricht der rechten Seite der „Produktregel für Antikommutatoren".

Wendet man die zweite Regel auf das Produkt der Abweichungen der Operatoren A und B an, so folgt:

$$\frac{1}{2}[\Delta_A, \Delta_B] + \frac{1}{2}(\Delta_A \Delta_B + \Delta_B \Delta_A) = \Delta_A \Delta_B$$

und da der Erwartungswert linear ist, folgt daraus:

$$\frac{1}{2}\langle [\Delta_A, \Delta_B] \rangle + \frac{1}{2}\langle (\Delta_A \Delta_B + \Delta_B \Delta_A) \rangle = \langle \Delta_A \Delta_B \rangle \qquad (*)$$

Der erste Erwartungswert ist rein imaginär, der zweite reell. Es gilt nämlich:

(1) $[\Delta_A, \Delta_B]^\dagger = (\Delta_A \Delta_B)^\dagger - (\Delta_B \Delta_A)^\dagger = \Delta_B^\dagger \Delta_A^\dagger - \Delta_A^\dagger \Delta_B^\dagger = -(\Delta_A^\dagger \Delta_B^\dagger - \Delta_B^\dagger \Delta_A^\dagger) = -(\Delta_A \Delta_B - \Delta_B \Delta_A)$
$= -[\Delta_A, \Delta_B]$, also ist dieser Kommutator „**antihermitesch**".

(2) Die Erwartungswerte antihermitescher Operatoren sind rein imaginär, denn es gilt:

$$\langle\psi|A|\psi\rangle=\langle\psi|-A^{+}|\psi\rangle=-\langle\psi|A^{+}|\psi\rangle=-\langle\psi|A|\psi\rangle^{*}$$

Die Erwartungswerte hermitescher Operatoren sind reell:

$$\langle\psi|A|\psi\rangle=\langle\psi|A^{+}|\psi\rangle=\langle\psi|A|\psi\rangle^{*}$$

Da für komplexe Zahlen $z=a+ib$ mit reellem a und rein imaginären ib gilt:

$$|z|^2=a^2+b^2=|a|^2+|b|^2$$

folgt aus Gleichung (*) durch termweise Betragsquadrieren:

$$\frac{1}{4}|\langle[\Delta_A,\Delta_B]\rangle|^2+\frac{1}{4}|\langle(\Delta_A\ \Delta_B+\Delta_B\Delta_A)\rangle|^2=|\langle\Delta_A\Delta_B\rangle|^2$$

oder

$$\frac{1}{4}|\langle[\Delta_A,\Delta_B]\rangle|^2=|\langle\Delta_A\Delta_B\rangle|^2-\frac{1}{4}|\langle(\Delta_A\ \Delta_B+\Delta_B\Delta_A)\rangle|^2\le|\langle\Delta_A\Delta_B\rangle|^2 \quad (**)$$

Für hermitesche Operatoren A, B gilt: $\langle A|\psi\rangle\ |B|\psi\rangle\ \rangle=\langle AB\rangle$, denn:

$$\langle A|\psi\rangle\ |B|\psi\rangle\ \rangle=\langle\psi|A^{+}B|\psi\rangle=\langle\psi|A\,B|\psi\rangle=\langle AB\rangle$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle v|w\rangle|^2\le\langle v|v\rangle\langle w|w\rangle$ auf die Vektoren $\Delta_A|\psi\rangle$ und $\Delta_B|\psi\rangle$ angewandt, ergibt:

$$|\langle\ \Delta_A|\psi\rangle|\Delta_B|\psi\rangle|^2\le\langle\Delta_A|\psi\rangle|\ \Delta_A|\psi\rangle\rangle\cdot\langle\ \Delta_B|\psi\rangle|\Delta_B|\psi\rangle\rangle$$

$$|\langle\Delta_A\Delta_B\rangle|^2\le\langle\Delta_A^2\rangle\langle\Delta_B^2\rangle$$

Aus Ungleichung (**) folgt damit

$$\frac{1}{4}|\langle[\Delta_A,\Delta_B]\rangle|^2\le\langle\Delta_A^2\rangle\langle\Delta_B^2\rangle$$

Weiter gilt: $$[\Delta_A,\Delta_B]=[A,B]$$

denn: $[\Delta_A,\Delta_B]=(A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)-(B-\langle B\rangle)(A-\langle A\rangle)=AB-A\langle B\rangle-\langle A\rangle B+\langle A\rangle\langle B\rangle$
$-BA+B\langle A\rangle+\langle B\rangle A-\langle B\rangle\langle A\langle=AB-BA=[A,B]$

Und damit schließlich die **Heisenbergsche Unschärferelation**:

$$\frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2\le\langle\Delta_A^2\rangle\langle\Delta_B^2\rangle$$

Wenn die Operatoren A, B kommutieren, der Kommutator $[A, B]$ also 0 ist, unterliegt das Produkt der Messunschärfen der beiden Observablen keiner Bedingung, sind also präzis bestimmbar. Kommutieren die Operatoren nicht, dann ist das Produkt der Messunschärfen mindestens $\frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2$.

Beispiel: Der Spin S eines Elektrons kann in jeder Raumrichtung nur zwei Werte annehmen, z.B. in x-Richtung hat der Spin S_x die Werte S_x+ und S_x- . Für dieses System bildet man den Hilbertraum mit den beiden Basisvektoren $|S_x+\rangle$ und $|S_x-\rangle$. Das sind die beiden Eigenvektoren des Operators S_x mit den Eigenwerten $\frac{\hbar}{2}$ bzw. $-\frac{\hbar}{2}$. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Raumrichtungen.

Die Operatoren S_x und S_y kommutieren nicht, ihr Kommutator ist

$$[S_x, S_y] = -\frac{\hbar}{i} S_z$$

Das heißt der Spin in x-Richtung und in y-Richtung sind nicht gleichzeitig präzis bestimmbar. Für das Produkt ihrer Messunschärfen gilt:

$$\langle \Delta_{S_x}^2 \rangle \langle \Delta_{S_y}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \left\langle \frac{\hbar}{i} S_z \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left| \frac{\hbar}{i} \langle S_z \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \hbar^2 \langle S_z \rangle^2$$

$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\langle S_z \rangle = \langle \psi | S_z | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} | \psi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\hbar}{2}$, also gilt $\frac{1}{4}\hbar^2 \langle S_z \rangle^2 = \frac{\hbar^4}{16}$ und demnach gilt für die komplementären Spins:

$$\langle \Delta_{S_x}^2 \rangle \langle \Delta_{S_y}^2 \rangle \geq \frac{\hbar^4}{16}$$

Anstatt des Vektors $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |S_z+\rangle$ hätte man für $|\psi\rangle$ auch den anderen Basisvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |S_z-\rangle$ wählen können, mit gleichem Ergebnis