

# Ist Noethers Theorem ein Prinzip des Denkens?

Manfred Hörz

Emmy Noethers Theorem, so könnte man sagen, verbindet die beiden Elemente physikalischer oder allgemeiner naturwissenschaftlicher Forschung.

Es besagt, dass zu jeder kontinuierlichen, differenzierbaren Symmetrie ein Erhaltungssatz gehört und umgekehrt, dass jeder Erhaltungssatz eine solche Symmetrie definiert.

Eine kontinuierliche Symmetrie eines Systems bezeichnet die Stabilität des Systems unter einer gewissen kontinuierlichen Transformation. So bleibt ein Kreis unverändert, wenn man ihn um einen beliebigen (kontinuierlichen) Winkel um sein Zentrum dreht. Im Gegensatz dazu bleibt ein Quadrat nur bei den diskreten Drehungen um  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  und  $360^\circ$  um seinen Mittelpunkt invariant. Die letzteren Transformationen wären nicht kontinuierlich, sondern diskret. Wird ein Quadrat um  $100^\circ$  gedreht, so behält es zwar seine Form, seine Lage ist jedoch verändert. Die Invarianz bezieht sich in diesen Beispielen also auf Form und Lage. Eine Gerade wäre in diesem Sinne bei einer kontinuierlichen Verschiebung in der Richtung der Geraden invariant. D.h. die Gerade wäre bzgl. dieser Transformation kontinuierlich symmetrisch. Das gleiche gälte für Streckungen entlang der Geraden.

Erhaltungssätze sind bspw. der Energieerhaltungssatz. Er besagt, dass in einem geschlossenes System die Energiesumme invariant ist bzgl. der Zeit. Es geht keine Energie verloren und es kommt auch keine dazu. Ausgeglichene Bilanz. So wie bei einer Warenzirkulation  $W_1-G-W_2$  die Art der Ware zwar sich ändert, aber nicht der Wert, so kann sich zwar die Energieart ändern, aber ihr Äquivalenzwert bleibt erhalten.

Der Energieerhaltung entspricht die Zeitsymmetrie der Gesetze. Gesetze ändern sich nicht von heute auf morgen, sie sind zeitlich stabil, sonst würden wir sie nicht als Naturgesetze bezeichnen. Aus dieser Normierung folgt der Energieerhaltungssatz.

Aus der räumlichen Stabilität, Invarianz der Naturgesetze folgt der Impulserhaltungssatz.

Ein Naturgesetz ist für uns nur eines, wenn es nicht nur in Deutschland, sondern auch in England oder anderswo gilt. Diese räumlichen Symmetrie hat den Erhaltungssatz des Gesamtimpulses eines geschlossenen Systems zur Folge. Betrachtet man zwei interagierende Billardkugeln, und stößt eine frontal auf die zweite gleich schwere und ruhende, so überträgt sie ihre Geschwindigkeit voll auf die zweite und bleibt selbst dann stehen. Der Impuls des Systems aus den beiden Kugeln bleibt somit erhalten.

Da in der Relativitätstheorie Raum und Zeit zur Raumzeit integriert wurden, gelten diese beiden Erhaltungssätze logischerweise auch nicht mehr getrennt sondern nur noch in Kombination miteinander. Sollte sich herausstellen, dass noch eine weitere Größe integriert werden müsste zu einem untrennbaren Ganzen, so müsste der Energie-Impulserhaltungssatz komplettiert werden. Nehmen wir beispielsweise an, dass ein Ereignis, ein 'Raumzeitobjekt' nur existieren kann, wenn ein Masse-Energie-Betrag vorhanden ist, und damit eine Ladung, so müßte auch der Ladungserhaltungssatz mit in den Energie-Impulserhaltungssatz integriert werden.

Das Noether-Theorem ist von wirklich grundlegender Bedeutung. Die sogenannte Eichsymmetrie, wurde tatsächlich auch aufgrund des Noether-Theorems „gefunden“. Sie entspricht dem Ladungserhaltungssatz. Neue Grundsymmetrien müssten demzufolge auch neue Erhaltungssätze nach sich ziehen.

Symmetrien sind mathematische Prädikatoren und Erhaltungssätze Sätze über physikalische

Größen, deren Gültigkeit empirisch festgestellt werden kann. Im Noethertheorem erscheint also der intime Zusammenhang von Mathematik und Physik auf fundamentale und zugleich konkrete Weise.

Ich vermute nun, dass dieses Theorem vielleicht von noch grundlegenderer Bedeutung sein könnte, als es ohnehin schon ist. Ist es nicht vielleicht eine – um mit Kant zu reden - transzendente Bedingung für Wahrnehmung und Erkenntnis überhaupt? Zeigt sich in ihm nicht eventuell die intime Verknüpfung von menschlichem Denken und empirischen Tatsachen, die gar nicht getrennt werden kann und anderswo für soviel Verwirrung verantwortlich war und ist: In der Relativitätstheorie und der Quantentheorie, die beide immer noch das menschliche qualitative Verstehen transzendieren?

Das könnte ein Hinweis darauf sein, dass das menschliche Verstehen sich selbst noch nicht verstanden hat. Nicht nur, dass es die kopernikanische Wende Kantscher Prägung immer noch nicht vollzogen hat und von empirischen Tatsachen unabhängig vom menschlichen Verstand spricht und ausgeht, vom 'primitiven' Realismus, sondern dass der Verstand seine eigene Ambivalenz nicht zur Kenntnis nehmen will. Um welche es sich handeln könnte, will ich gleich nachher versuchen, darzustellen. [Stetigkeit und Diskretheit]

Nehmen wir zunächst ein einfaches Beispiel, das die methodische Verallgemeinerung des Noether-Theorems veranschaulichen soll.

Ein kleiner Satz aus der Elementargeometrie möge das illustrieren. Nehmen wir den mathematischen Satz, dass die Winkelsumme eines ebenen Dreiecks  $180^\circ$  sein soll.

Wie überzeugen wir uns von der Richtigkeit dieses Satzes? Ich meine, letzten Endes über eine stetige Symmetriebetrachtung.

Wir zeichnen ein konkretes Dreieck. Fügen dann durch die Spitze des Dreiecks eine zur Hypotenuse parallele Gerade hinzu und entdecken, dass die drei Winkel die Katheten untereinander und mit der Parallelen bilden, insgesamt den Winkel einer Geraden, also  $180^\circ$  ergeben. Dabei sind die beiden Winkel, die die Katheten mit der Parallelen bilden, Wechselwinkel der Basiswinkel. Um mich zu überzeugen, dass diese Beziehung nicht nur in diesem Dreieck, sondern in jedem Dreieck besteht, muss das Dreieck variiert werden. Dazu sagt man, man betrachte ein ganz *beliebiges* zweites Dreieck und überzeugt sich, dass sich nichts Wesentliches, d.h. die Eigenschaften und Beziehungen, die man im ersten Fall betrachtet hat, nicht verändern.

Doch wie weiß ich, dass ich ein ganz *beliebiges* zweites Dreieck gewählt habe. Es ist nur wieder ein anderes konkretes. Für alle Dreiecke kann ich es nicht zeigen, da es beliebig viele, um nicht zu sagen unendlich viele gibt. Also muss ich eine Regel angeben, wie ich aus dem ersten das zweite und damit alle anderen erhalte, wobei sich die verwendeten Beweismittel nicht verändern. Ganz ähnlich geht man auch bei der vollständigen Induktion vor. Die Regel ist die kontinuierliche, stetige Transformation, hier Deformation des ersten Dreiecks in das zweite. Eine topologische Abbildung.

Dabei setzt man voraus, dass die Wechselwinkel gleich groß sind. Auch das zeigt man nicht zirkulär durch eine stetige Drehung um  $180^\circ$ , was wieder eine Symmetriebetrachtung ist. Dass diese Transformation den Winkel invariant lässt, also tatsächlich eine Symmetrie nachweist, ist allerdings ein Postulat. Eine alternative Spiegelung ändert daran nichts.

Fassen wir zusammen: Wir machen uns zunächst an einem Beispiel klar, dass der Satz dafür gilt. (Das entspricht dem Induktionsanfang bei der vollständigen Induktion). Um die Allgemeingültigkeit dieses Sachverhaltes nachzuweisen, führen wir Symmetriebetrachtungen durch, die zum Teil normativ sind, die also postulieren, dass sie relevanten Eigenschaften invariant lassen. Dies entspricht dem Induktionsschritt. Dadurch sind wir überzeugt, dass der Satz gilt, d.h. dass die

Eigenschaften, die der Satz behauptet, invariant gelten.

Diese für die (konventionelle) Wissenschaft typischen (unendlichen) Allaussagen lassen sich nur - so meine ich - durch solche Symmetrieabbildungen nachweisen. Es ist diese Art, die Welt zu sehen und sie dadurch sicher zu machen, zu beherrschen. Eine Wissenschaft, die laut Bacon, Macht vermittelt.

Eine andere edlere Wissenschaft müsste wohl auf diesen Ansatz verzichten.  
Zur Zeit sind das aber weitgehend unsere Wahrnehmungsbedingungen für dies Interesse der Verfügbarkeitsmachung.

Es herrschen zur Zeit zwei Paradigmen, das klassische stetige und das diskrete.

Vor der Quantentheorie war es selbstverständlich, dass die Natur keine Sprünge macht, also stetig ist. Ich meine, sie liegt einer Bedürfnisart zugrunde, die der Haupttenor unserer Lebensweise ist. Es sind dies die matrialen Bedürfnisse, wie ich sie genannt habe. Sie erwachsen aus einer Dialektik von Situationen, die selbst der anthropologische Grund der stetigen Betrachtungsweise sind. Die ursprünglichen Situationen sind in sich undifferenziert, sozusagen kontinuierlich. Parmenides hat sie als erster identifiziert und sie das Sein genannt. Er hat sie sich quasi als Kugel vorgestellt, die keine innere Struktur besitzt, und in sich vollkommen, das Ziel in sich hat. Sie ist bedürfnisfrei, wie er sagt: das durch eine Göttin offenbarte uterale Sein. Sie ist ganzheitlich und einzig. Frei von Zeit (und Raum). Sie ist die anthropologische Basis der stetigen Feldtheorien.

Demgegenüber tritt mit der Vertreibung aus dem innerlich unendlichen Paradies durch die Geburt die Trennung ein: die anthropologische Basis der Einheiten, der Struktur, der Zahlen und Quanten, der Korpuskel, Atome, der diskreten Theorien. Diese zerrissene Situation und ihre Tendenz zur ganzheitlichen vage erinnerten Situation ist die des späteren matrialen Bedürfnisses. Mathematisch zeigt sich das bspw. in der Konstruktion der natürlichen Zahlen (diskret) als unendliche (Voraussetzung der dadurch ermöglichten Verdichtung zum Zahlenkontinuum der reellen Zahlen). Das Diskrete hat die Tendenz zum Stetigen. Man sieht das auch in unserer Wahrnehmung. Nach heutigem Wissenstand der Neurobiologie nehmen wir nur einzelne Situationen auf (Diskretes) die wir zu einem stetigen Film, dem Prozess integrieren: der Bewegung und kontinuierlichen Veränderung. Raum und Zeit treten hier als bloße Aspekte der Bewegung wiederum auf. Das ist auch der Grund ihrer Integrierbarkeit in der Relativitätstheorie auf der Basis der Lichtbewegung, Lichtgeschwindigkeit. Wellentheorie und Korpuskulartheorie des Lichts sind wiederum die beiden Sichtweisen der beiden konträren Situationen. Es ist der menschliche Geist, der diese ermöglicht, kantisch gesprochen. Bohr hat die richtige Intuition m.E. gehabt, wenn er hier von einem generellen Komplementaritätsprinzip redet. Es gründet in dieser dialektischen Struktur des menschlichen Bewusstsein, Geistes und seiner fundierenden Bedürftigkeit. Das stetige und diskrete Paradigma sind nur zwei Seiten der gleichen Medaille, wie sich noch genauer herausstellen wird. Analog zur Elektrizität und zum Magnetismus als inverse Aspekte einer gemeinsamen Relation (spezielle Relativitätstheorie), oder zum Integral und Differential (Barrow) oder zum Raum und zur Zeit, deren genauerer Zusammenhang ebenfalls in einer gemeinsamen Relation gründet und sie einzeln nur als Standpunkte innerhalb derselben erscheinen lässt. Zeit ist das diskrete und Raum das kontinuierliche. Je nach Aspektverlagerung interessiert oder kommt in den Blick das eine oder das andere. Raum ist retrospektiv und integrativ und Zeit prospektiv unter der Bedingung des matrialen Bedürfnisses. Hier herrscht Notwendigkeit und das Diskrete wird integriert. Erlebt man das inverse, das tekiiale Bedürfnis, das ästhetische Bedürfnis nach Freiheit und Differenz, so erscheint der Raum als Begrenzung, Einengung und die Zeit als Befreiung. Denn sie gebiert das Kunstwerk, die Zahlen, die Quanten, den Zufall und die Freiheit.