Darstellung linearer Abbildungen (Operatoren) als Matrizenmultiplikation

Manfred Hörz

A sei eine **lineare Abbildung** des Vektorraums V (Hilbertraums) in sich selbst:

$A: V \to V$ mit $A(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha A(\vec{u})+\beta A(\vec{v})$

für alle $\vec{u},\vec{v}\in V$ und alle $\alpha,\beta\in K$. K ist dabei der Körper des Vektorraums.

Es soll gezeigt werden, dass sich diese Abbildung auch als Matrix in dem Hilbertraum darstellen lässt (d.h. wir haben hier zusätzlich ein Skalarprodukt zur Verfügung).

In der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ ist der Vektor $\vec{v}$ darstellbar als:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}=v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+\ldots+v_n\vec{e}_n=\sum_{j=1}^{n} v_j\vec{e}_j$$

Dabei ist die k-te Komponente v_k eines Vektors $\vec{v}$ durch das Skalarprodukt $\vec{e}_k\cdot\vec{v}$ darstellbar: $\vec{e}_k\cdot\vec{v}=\vec{e}_k(v_1\vec{e}_1+\ldots+v_k\vec{e}_k+\ldots+v_n\vec{e}_n)=v_k$, da $\vec{e}_k\cdot\vec{e}_i=0, \mathit{falls}\, k\neq i$ und $\vec{e}_k\cdot\vec{e}_k=1$

Wegen der Linearität von A lässt sich der Vektor $A\vec{v}$ darstellen als:

$$A(\vec{v})=A(v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+\ldots+v_n\vec{e}_n)\overset{\text{Linearität von A}}{=}v_1A(\vec{e}_1)+v_2A(\vec{e}_2)+\ldots+v_nA(\vec{e}_n)=\sum_{j=1}^{n} v_jA(\vec{e}_j)$$

also gilt für die k-te Komponente des Vektors $A(\vec{v})$ entsprechend:

$$\vec{e}_k\cdot A\vec{v}=\vec{e}_k\sum_{j=1}^{n} v_jA(\vec{e}_j)=\sum_{j=1}^{n} v_j\underbrace{(\vec{e}_kA(\vec{e}_j))}_{a_{kj}}=v_1\underbrace{(\vec{e}_kA(\vec{e}_1))}_{a_{k1}}+v_2\underbrace{(\vec{e}_kA(\vec{e}_2))}_{a_{k2}}+\ldots+v_n\underbrace{(\vec{e}_kA(\vec{e}_n))}_{a_{kn}}$$

Es gilt: $$A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}\right)=A(\vec{v})=\begin{pmatrix} \vec{e}_1A\vec{v} \\ \vec{e}_2A\vec{v} \\ \ldots \\ \vec{e}_nA\vec{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_j v_j(\vec{e}_1A(\vec{e}_j)) \\ \sum_j v_j(\vec{e}_2A(\vec{e}_j)) \\ \ldots \\ \sum_j v_j(\vec{e}_nA(\vec{e}_j)) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_j v_ja_{1j} \\ \sum_j v_ja_{2j} \\ \ldots \\ \sum_j v_ja_{nj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Also ist die Abbildung A in dieser Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ als Matrix darstellbar:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

genauer ist : $A(\vec{v})=A\cdot\vec{v}$, wobei $\cdot$ die übliche Matrizenmultiplikation ist.