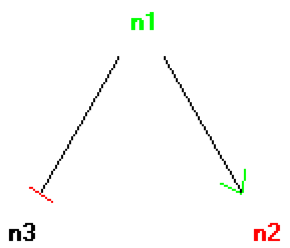
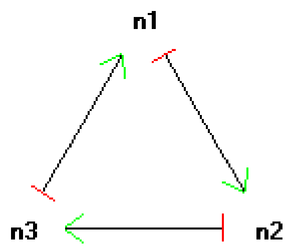
Graphentheorie

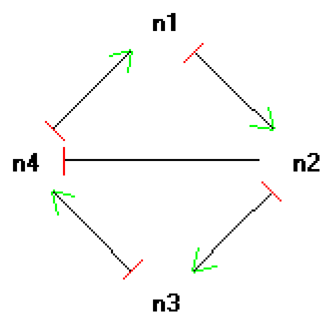
Manfred Hörz

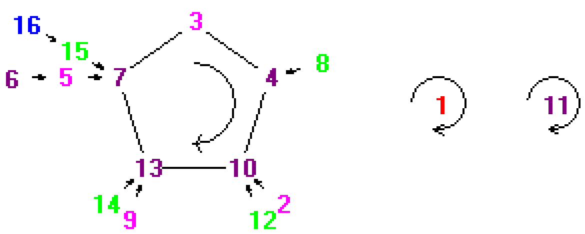
Die Graphentheorie hat heute viele Anwendungen (Chemie, Netze, Spieltheorie, Vierfarbenproblem, Konflikttheorie, …). Ich möchte hier aber nur im wesentlichen diejenigen Teile beschreiben, die mit der Bedürfnistheorie zu tun haben.

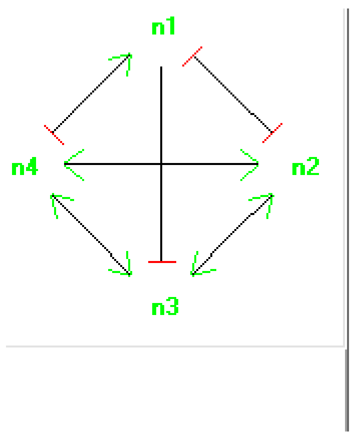
Zunächst einige Beispiele von Graphen, mit denen wir zu tun haben werden.

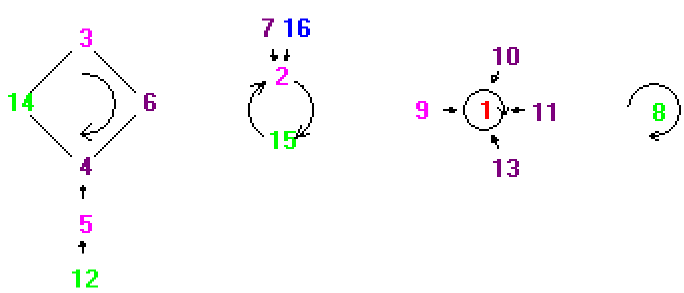












Ein **Graph** besteht aus Objekten (Bedürfnissen oder Situationen) und Relationen zwischen diesen Objekten (neutral, fördert, hemmt oder Folgesituation). Die Objekte nennt man auch **Punkte** oder Ecken oder auf Englisch vertices **P** und die Relationen auch **Linien,** Kanten oder auf Englisch Edges **L.**

Definition: Ein **Graph** G ist ein Tripel (P, L, R) der Menge der Punkte P, der dazu elementfremden Menge der Linien L und einer Funktion $R: L \to P \cup P_2$, die jeder Linie eine Menge von höchstens zwei Punkten zuordnet, wobei P_2 die Menge aller Zweierteilmengen von P ist. $R(L)$ heißt die Menge der **Randpunkte** von L

Eine Linie L heißt **Schleife** oder Loop, wenn $|R(L)|=1$, wenn er also genau einen Randpunkt besitzt.
Ein Punkt P hat die **Ordnung** O(P) = n, wenn er Randpunkt von genau n verschiedenen Linien ist.

Ein Graph G heißt **gerichtet**, wenn es eine Teilmenge der Randpunktmenge gibt, auf der eine Ordnungsrelation $\leq$ definiert ist. Gilt für $\{p, q\} = R(L) \cap P_2 \; : \; p \leq q$, so heißt p der **Anfangspunkt** und q der **Endpunkt** von L.

Für unsere Zwecke ist es aber günstiger, eine andere Definition für multipel gerichtete Grapen einzuführen.

Definition: Ein **multipel gerichteter Graph** $G=(P, b)$ besteht aus einer Menge von Punkten P, der Menge von geordneten Punktpaaren P^2 und einer Bewertungsfunktion $b: P^2 \to \mathbb{R}$, die jedem Punktepaar eine reelle Zahl zuordnet.
Ist $b(p, q)=0$, so sind p und q zueinander **neutral**. Ist $b(p, q)>0$, so **fördert** p q und im letzten Fall $b(p, q)<0$ **hemmt** (widerspricht, konfligiert) p q. Der Betrag von $b(p, q)$ gibt die Stärke der Relation zwischen p und q an.

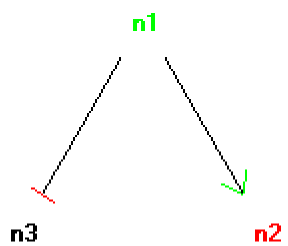
Ist $b(p, q)=0$, so wird eine *orientierungsfreie Linie* zwischen p und q gezeichnet, oder auch ganz weggelassen $p - q$

Ist $b(p, q)>0$, so wird die Förderrelation durch einen *Pfeil* symbolisiert $p \to q$

Ist $b(p, q)<0$, so bezeichnet ein *senkrechter Strich* die Hemmung $p \dashv q$.

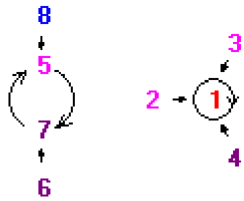
(p, p) bedeutet eine **Schleife,** die je nach Wert **anapoietisch** $b(p, p)>0$ (auch grün), **katalytisch** $b(p, p)<0$ (auch rot) oder **indifferent** $b(p, p)=0$ (auch schwarz) ist.

Der Graph



ist in n_1 anapoietisch, d.h. stimuliert sich selbst, in n_2 aber katalytisch, d.h. hemmt sich selbst und in n_3 indifferent sich selbst gegenüber. n_1 hemmt n_3, fördert aber n_2. n_3 ist sowohl gegenüber n_1 und n_2 neutral, n_2 ist neutral bzgl. n_1 und n_3

Bei diesem Beispiel handelt es sich um den Strukturgraphen der drei Bedürfnisse n_1, n_2 und n_3 .
Aus diesem lässt sich der Dynamikgraph



über die dem Strukturgraphen entsprechende Strukturmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ableiten.

Die Spaltenvektoren sind die Aktivvektoren, d.h. sie geben die Wirkung eines Bedürfnissen auf die beteiligten Bedürfnisse an, die Zeilenvektoren sind die Passivvektoren, sie geben das „Erleiden“ der Bedürfnisse an, d.h. die Wirkung die die (anderen) Bedürfnisse auf sie haben.

Multipliziert man die Strukturmatrix mit einem Vektor, der die Zustände der Bedürfnisse angibt, so erhält man einen Vektor, der die in der nächsten Zeiteinheit herrschenden Zustände angibt.

Man sieht an der Matrix, dass die Bewertungsfunktion des Strukturgraphen nur $-1, 0$ und 1 zulässt. Negative Werte kleiner oder gleich -0,5 müssen dann auf -1 normiert werden, Werte größer oder gleich 0,5 auf 1 und Werte über -0,5 und unter 0,5 auf 0.

Der Dynamikgraph hat eine andere Bewertungsfunktion. In ihr gibt es nur die Werte 0 und 1.
Die Punkte bezeichnen hier nicht Bedürfnisse, sondern Situationen, die angeben, welche Bedürfnisse jeweils befriedigt sind. Die farbige Zahl 1 für p bedeutet, dass kein Bedürfnis befriedigt ist, 8 dagegen, dass es alle sind.

Bezeichnet beispielsweise der Zustandsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Befriedigungssituation mit der Nummer 6, bei der das erste und dritte Bedürfnis befriedigt sind (Wert 1) , nicht aber das zweite (Wert 0), so ergibt die Matrizenmultiplikation $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Der Ergebnisvektor wird nach Normierung zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei die beiden ersten Bedürfnisse nun befriedigt sind, nicht aber das letzte. Diese Situation ist mit der Nummer 7 kodiert. Die Situation 6 geht also in die Situation 7 über, d.h. es gilt in der Sprache der Bewertungsfunktion des Dynamikgraphen: $b(6{,}7)=1$.

Oder $b(p,q)=1$ bedeutet, dass q die Folgesituation von p ist. $b(1{,}1)=1$ heißt, dass die Situation 1 ein Punktattraktor ist, also stationär bleibt, durch eine Schleife um 1 dargestellt.

$b(5{,}7)=1$ und $b(7{,}5)=1$ bezeichnen zusammen einen *Zweier-Zyklus,* also einen ständigen Wechsel von 5 nach 7 und umgekehrt. Man nennt das auch einen Grenzzyklus. Die Situationen 6 und 8 heißen zusammen das *Einzugsgebiet* des Zweierzyklus'. Die Situationen 2,3 und 4 bilden das Einzugsgebiet zum Punktattraktor oder Grenzwert 1.

Hier nun noch einige Definitionen von einfach gerichteten Graphen.

Definition: Ein Graph G heißt **einfach gerichtet (eg)** genau dann, wenn es genau eine Ordnungsrelation $\leq$ auf einer Teilmenge der Randpunktemenge gibt.

Sei G eg Graph. Ein Punkt $p \in P$ heißt **Vorgänger** von $q \in P$ genau dann, wenn $(p,q) \in \leq$

Sei G eg Graph. Ein Punkt $p \in P$ heißt **Nachfolger** von $q \in P$ genau dann, wenn $(q,p) \in \leq$

Sei G eg Graph. Ein Punkt $p \in P$ heißt **initial** genau dann, wenn p keinen Vorgänger hat.

Sei G eg Graph. Ein Punkt $p \in P$ heißt **final** genau dann, wenn p keinen Nachfolger hat.

Ein eg Graph G heißt **irreflexiv** genau dann, wenn $\bigwedge_{p \in P} (p,p) \notin \leq$.

Ein eg Graph G heißt **vollständig** genau dann, wenn $\bigwedge_{p,q \in P} (p,q) \in \leq \vee (q,p) \in \leq$

Definition: Ein Graph $H=(P_H, L_H, R|L_H)$ heißt **Teilgraph** von $G=(P, L, R)$ genau dann, wenn $P_H \subseteq P$ und $L_H \subseteq L$ und $R|L_H$ die Einschränkung von R auf L_H ist.
Die Ordnungsrelation wird gegebenenfalls mit übertragen.

Ein Teilgraph $Z=\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ von G heißt **r-Zyklus in G** genau dann, wenn es eine Permutation $<p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r}>$ von Z gibt mit $p_{i_1} \leq p_{i_2} \leq \ldots \leq p_{i_r} \leq p_{i_1}$.

Ein eg Graph G heißt **r-zyklenfrei** genau dann, wenn er keinen r-Zyklus besitzt.

Ein eg Graph G heißt **zyklenfrei** genau dann, wenn er für alle $r \in \{1, \ldots, |P|\}$ keinen r-Zyklus besitzt.

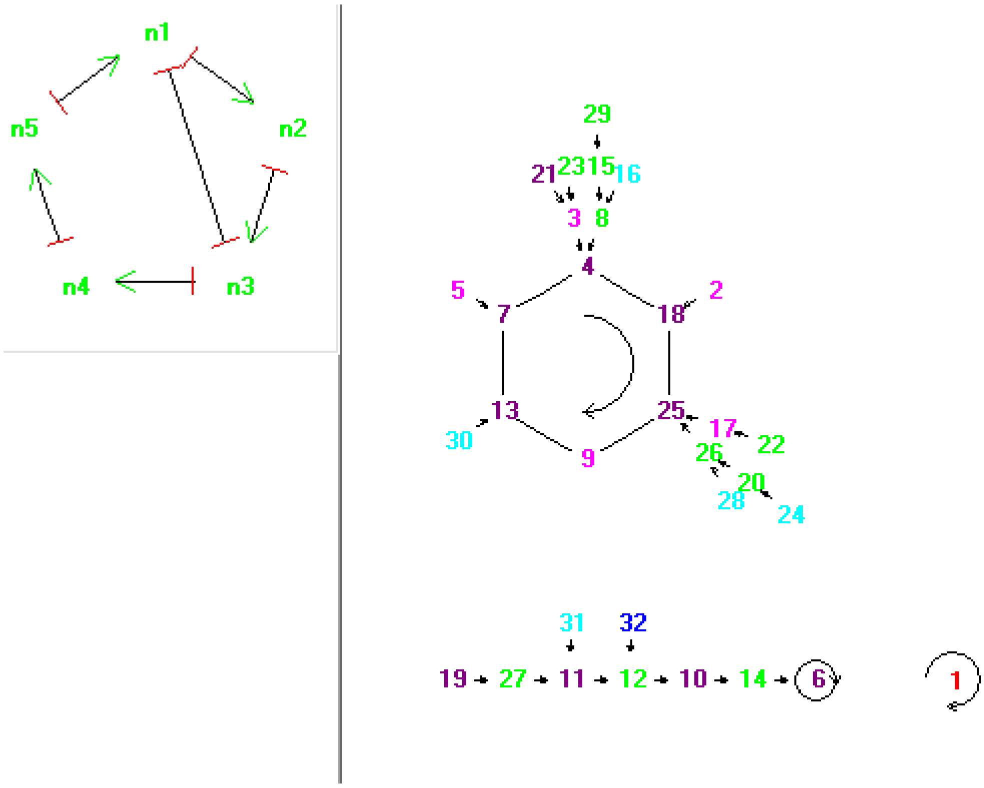
Ein Teilgraph $K=\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ von G heißt **r-Kette in G** genau dann, wenn es eine Permutation $<p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r}>$ von K gibt mit $p_{i_1} \leq p_{i_2} \leq \ldots \leq p_{i_r}$ und $\neg(p_{i_r} \leq p_{i_1})$

Ein Teilgraph $E=\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ von G heißt **Einzugsgebiet** des Teilgraphen $H=\{q_1, q_2, \ldots, q_s\}$ von G genau dann, wenn es für jedes $p \in E$ eine Kette in E gibt, deren finales Element Vorgänger in G eines Elements $q \in H$ ist.

Unter der **Ordnung** ord G eines Graphen G versteht man die Mächtigkeit seiner Punktmenge.

Ein Teilgraph heißt **rein**, wenn sein Einzugsgebiet der Ordnung 0 ist, also aus der leeren Menge besteht.

Ich möchte einige der hier eingeführten Begriffe an dem unten angeführten Beispiel verdeutlichen.



Keiner der vollen Graphen hier ist zyklenfrei. Der linke Strukturgraph hat bezüglich der Ordnungsrelation $\rightarrow$ den 5-Zyklus $<n_1, n_2, n_3, n_4, n_5>$ und bzgl. der Ordnungsrelation $\dashv$ den 5-Zyklus $<n_1, n_5, n_4, n_3, n_2>$, den 4-Zyklus $<n_1, n_5, n_4, n_3>$ und den 3-Zyklus $<n_1, n_3, n_2>$. Der rechte Dynamikgraph besteht aus drei disjunkten Teilgraphen, dem oberen 6-Zyklus $<4, 18, 25, 9, 13, 7>$. $E=\{n_2\}$ ist Einzugsgebiet des Zyklus $<n_1, n_5, n_4, n_3>$, $E=\{n_5, n_4\}$ ist Einzugsgebiet von $<n_1, n_3, n_2>$. Beim Dynamikgraphen gibt es folgende Einzugsgebiete:

$E=\{16,8,29,15,23,3,21,5,30,28,26,24,20,22,17,2\}$ vom 6-Zyklus $<4,18,25,9,13,7>$

$E=\{19,27,31,11,32,12,10,14\}$ vom 1-Zyklus $<6>$. Der 1-Zyklus $<1>$ hat die leere Menge als Einzugsgebiet, ist also rein.

Definition: Zwei Teilgraphen H, K von G heißen **disjunkt**, wenn es kein Element $p \in P_H$ und kein Element $q \in P_K$ gibt mit $(p,q) \in \leq \vee (q,p) \in \leq$.

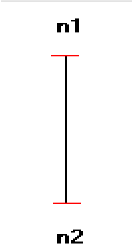
Ein Teilgraph H heißt **separabel**, wenn er in zwei disjunkte Teilgraphen K_1, K_2 zerlegt werden kann, d.h. wenn gilt : $H = K_1 \cup K_2$ und $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

Eine Menge von Teilgraphen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ von G heißen **Zerlegung** von G genau dann, wenn $G = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$ und die H_i paarweise disjunkt sind.

Der Dynamikgraph ist zerlegbar in die beiden unreinen Zyklen der Ordnung 6 und 1 mit Einzugsgebieten und in den reinen 1-Zyklus. Der Graph ist separabel, etwa in den unreinen 6-Zyklus mit Einzugsgebiet und in den Rest. Der Strukturgraph ist nicht separabel weder für die unterstützende Ordnungsrelation noch für die hemmende. Der Zyklus hat zwei Teilwirbel (Zyklen) bezüglich der hemmenden Relation. Bei n_3 fließt er auseinander in zwei Wirbel, die in n_1 wieder zusammentreffen.

Interessant ist noch beim Dynamikgraphen, dass aufgrund spontaner innerer oder äußerer Prozesse von einem disjunkten Teilgraphen auf einen anderen gesprungen werden kann.
Befindet sich das System im Zustand 9, d.h. dem Zustand, in dem nur Bedürfnis n_2 befriedigt ist und kommt nun durch äußere oder innere Veränderungen die Befriedigung von n_5 hinzu, dann springt die Dynamik aus dem 6-Zyklus auf das Einzugsgebiet des 1-Zyklus $<6>$ auf Situation 10 über. Fast vergleichbar mit einer Mutation oder dem spontanen Übergang von einem Zustand eines Atoms auf einen anderen durch Absorption (oder Emission) eines Photons. Die Prozesse innerhalb eines Zyklus haben so etwas wie Gesetzmäßigkeit und die sprunghaften Veränderungen etwas von Zufall, weil sie nicht im System allein erklärbar sind. Man mag da auch an Gewohnheiten gesunder oder krankhafter Art wie bei Zwangshandlungen denken, die sich in sogenannten habit changes verändern.

Innerhalb der Bedürfnistheorie, in deren Rahmen die Graphentheorie hier interessiert, gibt es das Hauptproblem, wann ein Satz von Bedürfnissen befriedbar ist. Drei Konzepte spielen hier eine Rolle, Zeit, Raum und Komplexität. Rein theoretisch lassen sich Bedürfnisse innerhalb einer Struktur am einfachsten befriedigen, wenn sie *zeitlich* entzerrbar sind. Die Ordnungskategorie der Zeit ist fast allgegenwärtig. Angefangen bei der Geburt, die anthropologisch die primäre Ordnung ist, die Trennung zweier Wesen. Dieser Einschnitt wird sich auf der ganzen Entwicklung stets in anderen Gestaltungen wiederholen. Er ist zum Teil verantwortlich dafür, dass es überhaupt (artikulierte) Bedürfnisse gibt.
Betrachten wir zunächst ein simples Problem einer Bedürfniskomplikation: $n_1 \dashv n_2$. Wenn das Bedürfnis n_1 befriedigt wird, verhindert es die Befriedigung von n_2 . Da aber n_2 dem Bedürfnis n_1 neutral gegenüber steht, hat es keinen negativen Einfluss auf es. Wenn daher n_2 zuerst befriedigt und dann (nach einer angemessenen Zeit) n_2 , so ist der Konflikt dadurch behoben. Diese zeitliche Entzerrung bietet also hier die einfachste Möglichkeit. Im nächsten Fall



eines 2-Zyklus ist das Problem schon ernsthafter. Eine zeitliche Entzerrung gibt es da nicht mehr und auch eine gute Problemlösung ist hier nicht zu finden, außer es wird räumlich getrennt. Die beiden Situationen, in denen die Bedürfnisse vorkommen, müssen getrennt werden, was nur möglich ist, wenn sie zu verschiedenen Personen gehören. Bei der gleichen Person treten wahrscheinlich geistige Trennungen auf, das Bewußtsein wird gespalten, oder zunächst wird das schwächere Bedürfnis verdrängt, unterworfen. Einen ähnlichen radikalen Prozess findet man in der Gesellschaftstheorie von Hobbes, der in einem Unterwerfungsstaat mit weitgehender Entmündigung endet. Auf das Nähere will ich hier nicht eingehen. (Vgl. hierzu Hobbes' Staatsphilosophie in http://philmath.org/wordpress/wp-content/uploads/2012/07/Hobbes.pdf)

Das ist in der Tat der schwierigste Fall, falls die räumliche Trennung nicht vollzogen werden kann. Falls die Zyklen höherer Ordnung sind gibt es allerdings Lösungsmöglichkeiten, die hier allmählich vorbereitet werden sollen. Für die Möglichkeit zeitlicher Entzerrung ist der folgende Begriff nützlich.

Definition: Sei G eg Graph mit $P=\{p_1, \dots, p_r\}$ und der Ordnungsrelation $\dashv$. Eine Permutation $(p_{i_1}, \dots, p_{i_r})$ heißt **Matrisieranordnung (M-Anordnung)** auf G, wenn nach p_{i_ν} kein p_{i_μ} aufgeführt ist, das Nachfolger von p_{i_ν} bzgl. G, d.h. wenn

$\bigwedge_{\nu}(1\leq\nu\leq r\to(\nu<\mu\leq r\to(n_{i_\nu},n_{i_\mu})\notin\dashv))$

P heißt **diachron befriedigbar** genau dann, wenn es eine M_Anordnung auf G gibt.

Vorausgesetzt ist die ganze Zeit, dass alle p aus P für sich befriedigbar sind.

Hilfsatz 1: Sei G = (P, L, R) ein Graph mit $2\leq ord\ G$ mit der Ordnungsrelation $\dashv$.
G zyklenfrei $\Rightarrow$ P hat finale (initiale) Elemente in G.

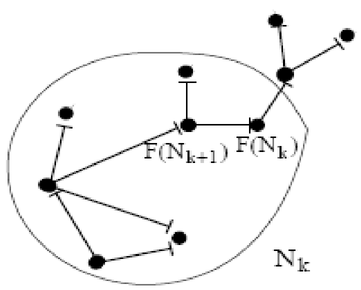
Beweis: Annahme: es gäbe kein finales Element.
Da $2\leq ord\ G$ $\Rightarrow$ es existiert ein $(n_{i_1},n_{i_2})\in G$
Da G zyklenfrei, ist $n_{i_1}\neq n_{i_2}$: $n_{i_1}\dashv n_{i_2}$. Da n_{i_2} nicht final, existiert ein $n_{i_3}\in P$ mit $(n_{i_2},n_{i_3})\in G$ (und $n_{i_3}\neq n_{i_2}$ und $n_{i_3}\neq n_{i_1}$, da G zyklenfrei: $n_{i_1}\dashv n_{i_2}\dashv n_{i_3}$. Da n_{i_3} nicht final, existiert ein $n_{i_4}\in P$ mit $(n_{i_3},n_{i_4})\in G$ (und $n_{i_4}\neq n_{i_3}$ und $n_{i_4}\neq n_{i_2}$ und $n_{i_4}\neq n_{i_1}$ da G zyklenfrei) : $n_{i_1}\dashv n_{i_2}\dashv n_{i_3}\dashv n_{i_4}$; etc. bis alle Elemente aus P aufgebraucht sind (P endlich !). Für das letzte Element n_{i_r} müsste es also ein weiteres geben, was dann aber der Zyklenfreiheit widerspricht. Der Beweis für initiale Elemente geht ganz analog.

Hilfsatz 2: Jeder Teilgraph eines zyklenfreien Graphen ist wieder zyklenfrei.

Beweis: Sei H Teilgraph von G. Ist ord H = 0, so ist H zyklenfrei. Ist ord H = 1, so ist H ebenfalls zyklenfrei, ansonsten hätte G einen 1-Zyklus. Sei nun $ord\ H\geq 2$ und sei $<n_{i_1},\ldots,n_{i_s}>$ Zyklus in H $\Rightarrow$ $<n_{i_1},\ldots,n_{i_s}>$ Zyklus in G $\Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung.

Hilfsatz 3: Sei G = (N,L,R) Graph mit $ord\ G\geq 2$, dann gilt:
G zyklenfrei $\Rightarrow$ N lässt sich M-anordnen.

Beweis: G zyklenfrei $\overset{\text{Hilfsatz 1}}{\Rightarrow}$ N besitzt finale Elemente. Für $A\subseteq N$ sei $F(A)$ die Menge aller finalen Elemente von A . $N_1:=N\setminus F(N)$ $|N_1|<|N|$, da G zyklenfrei. $G_1=(N_{1,}L_{N_1},R|L_{N_1})$ ist zyklenfreier Teilgraph von G nach Hilfssatz 2 $\Rightarrow$ N_1 besitzt finale Elemente nach Hilfssatz 1. $N_2:=N_1\setminus F(N_1)$ $G_2=(N_{2,}L_{N_2},R|L_{N_2})$ ist wieder zyklenfreier Teilgraph nach Hilfssatz 2 $\Rightarrow$ N_2 besitzt finale Elemente nach Hilfssatz 1 usw. bis: $N_s:=N_{s-1}\setminus F(N_{s-1})$ $|N_s|<|N_{s-1}|$ is $G_2=(N_{2,}L_{N_2},R|L_{N_2})$ t zyklenfreier Teilgraph nach Hilfssatz 2. Da N endlich ist, bricht die Kette irgendwann ab. Sei N_s das letzte Element dieser Kette mit $N_s\neq\emptyset$ (dann ist $N_{s+1}=\emptyset$). Die $F(N_i)$ mit i = 1, … , s seien beliebig angeordnet und $(F(N_i))$ diese jeweilige Anordnung. Dann ist $((F(N)),(F(N_1)),\ldots,(F(N_s)))$ eine M-Anordnung.
[Denn sei $k\in\{0,1,\ldots,s\}$ beliebig, wobei $N_0:=N$. Alle Elemente aus $F(N_k)$ sind final aus N_k bzgl. $G_k=(N_k,L_{N_k},R|L_{N_k})$. Seien diese angeordnet als $(n_{k_1},\ldots,n_{k_k})$, wobei kein Glied hiervon Nachfolger eines anderen dieses k-Tupels bzgl. G_k ist, da alle final bzgl. G_k . Keines hiervon besitzt aber auch Nachfolger aus $F(N_\rho),\rho>k$, da $F(N_\rho)\subset N_k$, $\rho>k.$. Denn



$$\begin{array}{ccc} N_k & \supset & F(N_k) \\ \cup & & \\ N_{k+1} & \supset & F(N_{k+1}) \\ \cup & & \\ N_{k+2} & \supset & F(N_{k+2}) \\ \cup & & \\ N_{k+3} & \supset & F(N_{k+3}) \\ \ldots & & \ldots \end{array}$$

]

Hilfssatz 4: Ein vollständiger Graph G = (N, L, R) mit der Ordnungsrelation $\dashv$, der 1-, 2- und 3-zyklenfrei ist, ist zyklenfrei.

Beweis: indirekt: Besitze G einen Zyklus. Sei M die Menge aller Zyklen, die zerlegt werde in nichtleere Mengen M_k der vorhandenen k - Zyklen $(k>3)$. Sei k_0 das kleinste dieser k's . Sei $<n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_{k_0}}>$ ein k_0 - Zyklus. Wäre $(n_{i_3}, n_{i_1}) \notin \dashv$, dann wäre $<n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}>$ ein 3-Zyklus. Also ist $(n_{i_3}, n_{i_1}) \in \dashv$ $\Rightarrow$ $<n_{i_1}, n_{i_3}, \dots, n_{i_{k_0}}>$ ist $k_0 - 1$ - Zyklus im Widerspruch zur Minimalität.

Nun lässt sich der wichtige Satz beweisen.

Satz 1: Eine Menge N von Bedürfnissen ist genau dann (diachron) befriedigbar (oder besitzt eine M- Anordnung) , wenn sie keine k-Zyklen bzgl. der Ordnungsrelation $\dashv$ besitzt.

Beweis: 1) Sei N diachron befriedigbar, dann gibt es eine M-Anordnung $(n_{j_1}, \dots, n_{j_r})$ von N. Angenommen, es gäbe keinen k-Zyklus $<n_{i_1}, \dots, n_{i_k}>$. Sei n_{j_p} das erste Glied aus der M-Anordnung, das aus dem k-Zyklus stammt. Sei n_{i_1} dieses Element aus dem k-Zyklus. Da n_{i_1} aber wegen der Zyklizität einen Nachfolger n_{i_m} besitzt, muss dieser wegen der Definition der M-Anordnung vor dem n_{j_p} stehen. Widerspruch zur Minimalität von n_{i_1} in der M-Anordnung. Also gibt es keinen k-Zyklus.

2) $G = \emptyset$ $\Rightarrow$ N besitzt eine M-Anordnung (jede beliebige Permutation von N).
$G \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ G zyklenfrei (da N keine k-Zyklen besitzt) $\overset{\text{Hilfsatz 3}}{\Rightarrow}$ M besitzt M-Anordnung. Insgesamt folgt dann nach Definition der diachronen Befriedbarkeit dass N diachron befriedigbar ist.

Unter gewissen Bedingungen lässt sich dieser Satz noch enger fassen, d.h. zur Befriedbarkeit reicht aus, dass er keine k-Zyklen mit $k \leq 3$ besitzt.

Satz 2: Sei G = (N, L, R) ein bzgl. Der Ordnungsrelation $\dashv$ vollständiger Graph, der weder 1-Zyklen, noch 2-Zyklen noch 3-Zyklen besitzt. Dann besitzt er eine M-Anordnung, d.h. N ist diachron befriedigbar.

Beweis: G erfüllt die Voraussetzungen von Hilfssatz 4. Also ist G zyklenfrei. Also besitzt er nach dem letzten Satz 1 eine M-Anordnung.

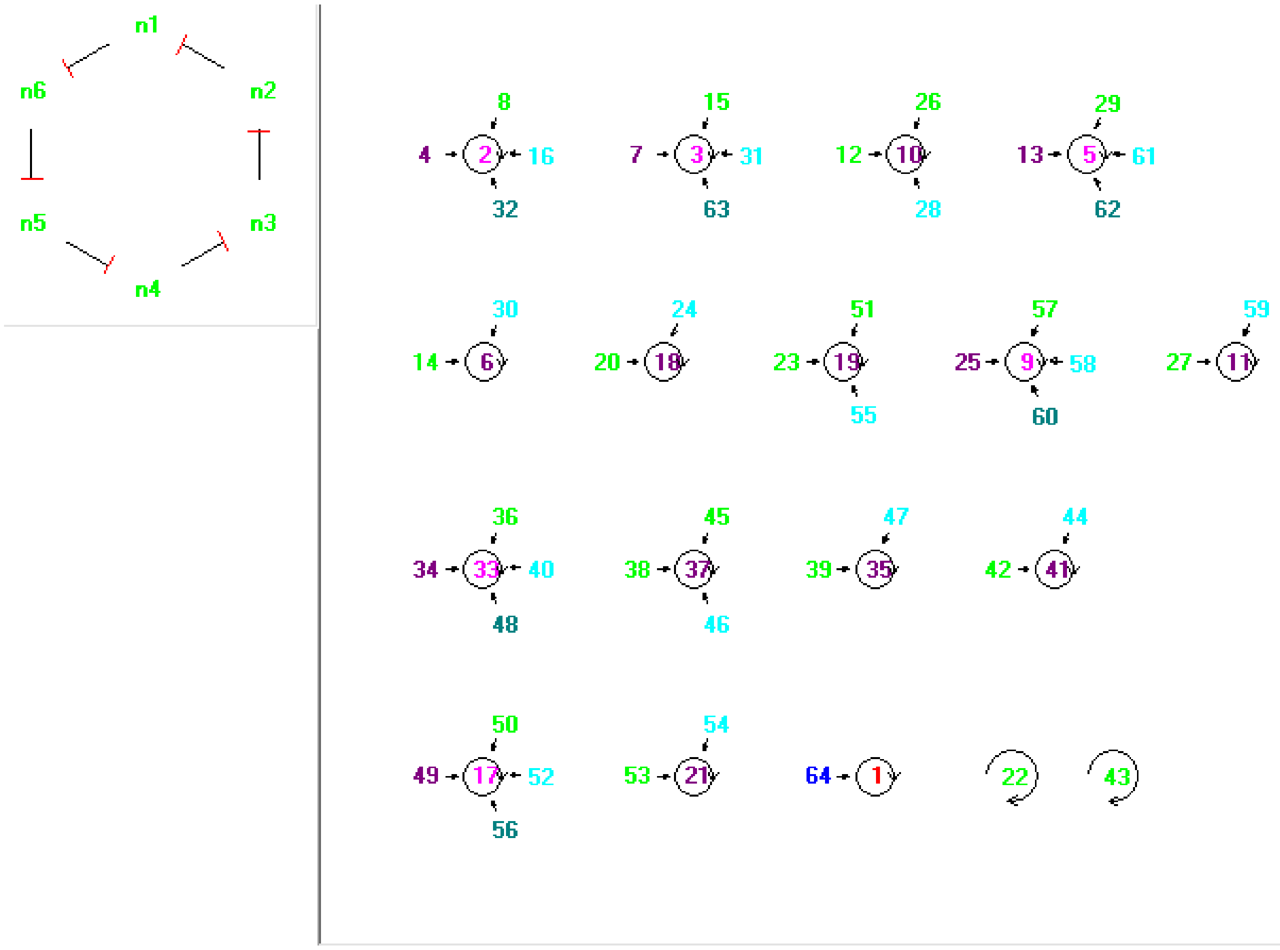
In einer Gesellschaft, die sehr konfliktuell ist, deren Bedürfnisgraph also vollständig bzgl. $\dashv$ ist, befinden sich die wesentlichen Probleme in 2- und 3-Beziehungen, also im Privaten oder fast im Privaten. Die 3-Beziehungen sind zwar der Anfang der Sozialität, aber diese Beziehungen sind oft familiärer Art. Diese Gesellschaften verschieben also die Probleme, die meist gesellschaftlichen Ursprungs sind, ins Private und befreien sich so von der Notwendigkeit zu Veränderungen.

Interessant in diesem Zusammenhang ist, dass die beiden großen Gesellschaftstheorien von Hobbes und Rousseau genau auf diesen Zyklen aufbauen. Bei Rousseau gibt es jedenfalls auch höhere, aber der Dreierzyklus ist der Paradefall.

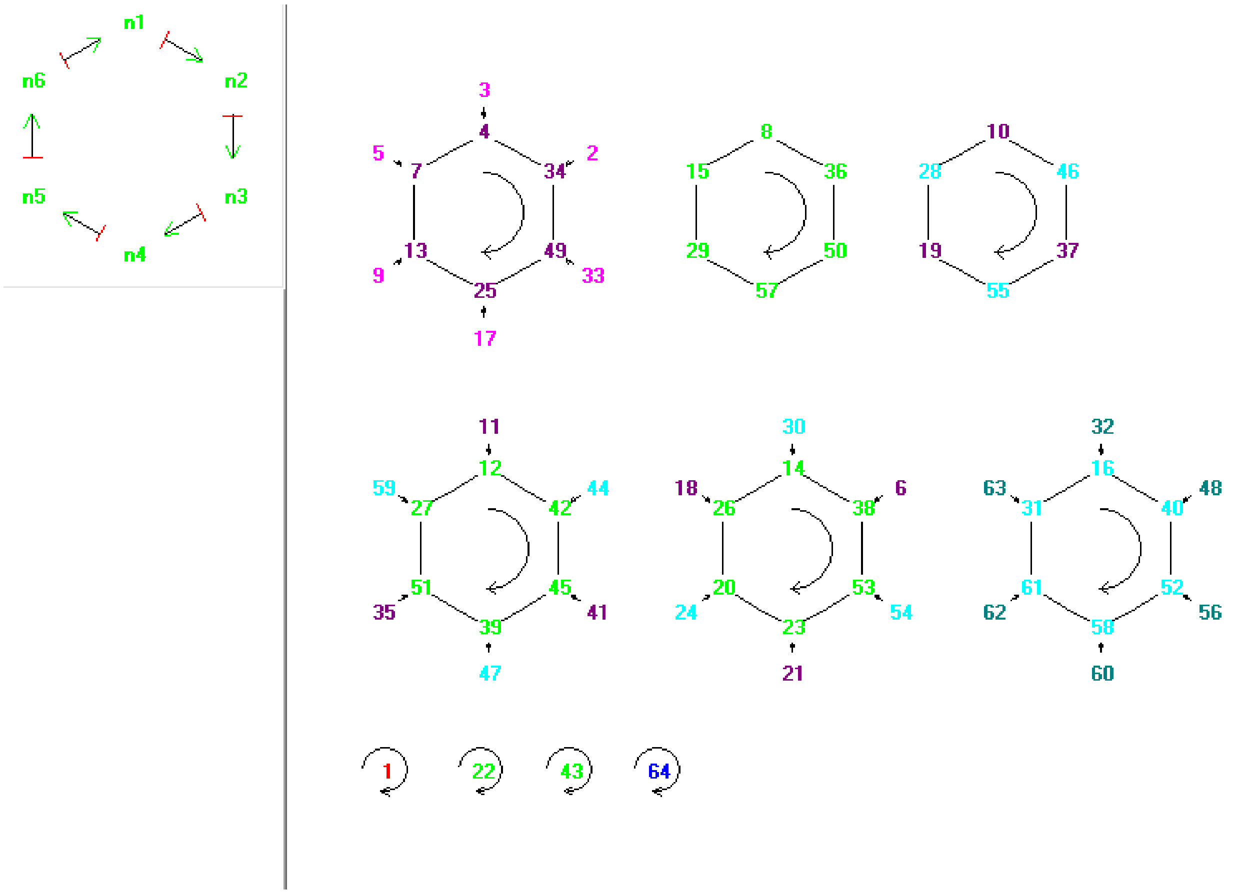
Ich möchte hier nur noch die Lösungsmöglichkeiten von k-Zyklen mit $k \geq 3$ andeuten, die nicht mehr komplett in der Graphentheorie zu lösen sind. Dazu muss man tiefer gehen und zunächst genauer definieren, was ein Bedürfnis ist.
Es zeigt sich dann, dass Bedürfnisse „verallgemeinert“ werden müssen (mengentheoretisch ist das eine Spezialisierung) , d.h. einige Situationen, die zur Definition (Artikulation) gehörten, müssen

eliminiert, „verdrängt“ werden. Hemmnisse können dadurch aufgelöst werden, ohne dass die übrige Struktur verändert wird. Das ist aus der Psychoanalyse bekannt, dass bei Konflikten der Schwächere verdrängt. Verdrängung lässt sich so genau mathematisch über den Bedürfnisbegriff definieren.
Zu Zyklenordnungen größer als 2 gibt es aber noch eine Softmethode, die nicht in die Bedürfnisstruktur eingreift. Das ist vorallem in der Gesellschaftstheorie wichtig. Es lässt sich zeigen, dass durch sogenannte Epizyklen, die zu den Hinderungsrelationen gegenläufig unterstützen („Epikureische Zyklen“) die beste Lösung gegeben ist. Das entspricht im wesentlichen der Rousseauschen Aufgabe der Bedürfnisverwirklichung aller, ohne Bedürfnisse zu unterdrücken, d.h. so frei zu bleiben wie zuvor, nun aber mit der „sittlichen“ Gewinn, dass alle ihre Bedürfnisse realisieren können. (Siehe hierzu genauer die „Mathematische Skizze einer matrialen Bedürfnistheorie“ in
http://philmath.org/wordpress/wp-content/uploads/2012/07/mathBeduerfnisth.pdf)

Der Einfachheit halber möchte ich einen Zyklus bezüglich der Hinderungsrelation ⊣ einen Widerspruchszyklus oder **Kontradiktionszyklus** oder contradictional cycle (**CC**) nennen, einen Zyklus mit der Unterstützungsrelation → einen **epikureischen Zyklus (EC).** Im folgenden Beispiel war ein 6-CC gegeben, der natürlich die fatale Dynamik hat, dass nur 1-Zyklen im Dynamikgraph vorhanden sind, in denen nur ein oder maximal 3 (grüne Zahlen im Dynamikgraph), (und bei 1 sogar gar kein) Bedürfnisse befriedigt werden. Dabei ist die Situation noch dadurch abgemildert, dass die Bedürfnisse sich selbst unterstützen (grün im Strukturgraph). Würden sie das nicht tun, so hätte man den schlimmsten Fall, dass in der Folgesituation gar kein Bedürfnis befriedigt ist und das so bleibt, falls keine verändernden Einflüsse auftreten.



Fügt man nun einen Epikureischen Hyperzyklus hinzu, wie im unteren Beispiel dargestellt, so hat man bis auf die vier unten stehenden 1-Zyklen lauter 6-Zyklen, die jeder für sich rhythmisch alle Bedürfnisse innerhalb eines Zyklus befriedigen. Als Beispiel sei der erste Dynamikzyklus $<4,34,49,25,13,7>$ interpretiert: Die Situation 4 codiert die Befriedigung der Bedürfnisse n_5 und n_6 , die darauf folgende Situation 34 die Befriedung von n_1 und n_6 , die Situation 49 befriedigt n_1 und n_2 , dann wird in Situation 25 n_2 und n_3 gestillt, darauf in Situation 13 die Bedürfnisse n_3 und n_4 und schließlich in Situation 4 fängt das Ganze von vorne an. In den 6 Zeiteinheiten wird jedes Bedürfnis zweimal, also insgesamt ein Drittel mal befriedigt, wenn man den ganzen Zyklus zugrunde legt. Die anderen Zyklen sind sogar noch günstiger. Hier können bis zu vier Bedürfnissen gleichzeitig befriedigt werden und zwar werden nach einem durchlaufenen Zyklus auf jeden Fall alle Bedürfnisse berücksichtigt.



Dieses Prinzip des epikureischen Hyperzyklus ist psychologisch nicht leicht zu realisieren, denn wer will schon seinen „Feinden" auch noch Gutes tun. Freud empfand dieses Prinzip im „Unbehagen der Kultur" unzumutbar, weil er eben die Klugheit dieser Regel nicht erkannte. Unsere emotionale Ausrichtung ist eben hier noch etwas rudimentär. Den größten Frieden erreicht man aber auf diese christliche Weise, „seine Feinde zu lieben". Das wichtigste Gebot im Christentum. Das ist nicht die einzige kluge Regel, die wir in dieser Religion finden. Auch den Satz, dass die Letzten die Ersten sein werden, haben wir schon implizit in der M-Anordnung kennengelernt. Derjenige nämlich, der in der Widerspruchsstruktur am traurigen Ende stand, war angehalten, zuerst zu befriedigen.

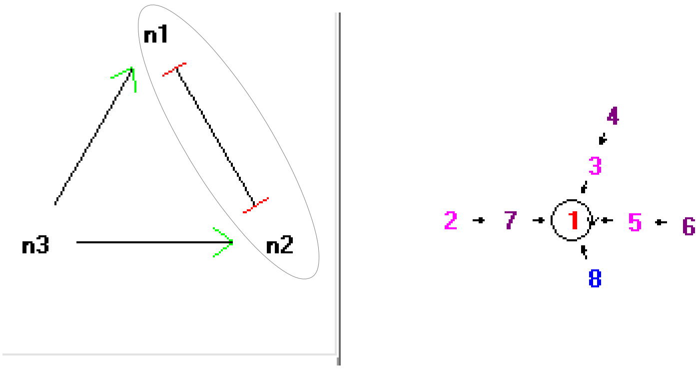
Natürlich gibt es noch viele andere nützliche Anwendungen der Graphentheorie. Das Königsberger Brückenproblem, das Euler allgemein löste steht nicht nur am Anfang der Graphentheorie sondern auch der Topologie. Ich will hier nicht näher darauf eingehen. Man findet es in jedem Buch der Graphentheorie. Wichtig zur Lösung ist hier die Ordnung eines Punktes. Sie gibt an, wie viele Kanten (Linien) mit ihm inzidieren. Auch das Farbenproblem ist nicht von größerem philosophischen Interesse. Es sei denn einen interessiert die geometrische Frage, wie viele benachbarte Objekte ich pro Dimension (also ohne Raumtrennung) unterscheiden kann. Interessanter in meinem Kontext ist die Spieltheorie. Auch hier spielen Graphen eine bedeutende Rolle. Allerdings wird diese Darstellung sehr schnell unübersichtlich, wenn mehrere Spieler teilnehmen. Die Spieltheorie aber ist eine Theorie der Konkurrenz. Sie ist deshalb in der Hobbesschen Staatsphilosophie anwendbar und angewendet worden. Vgl. zur Spieltheorie, allerdings nur kurz gefasst: http://philmath.org/wordpress/wp-content/uploads/2012/07/Spieltheorie.pdf

Bei der hier vertretenen Bedürfnistheorie geht es um konstruktive Konfliktlösung, wie sie in demokratischen Theorien erfolgen sollte.

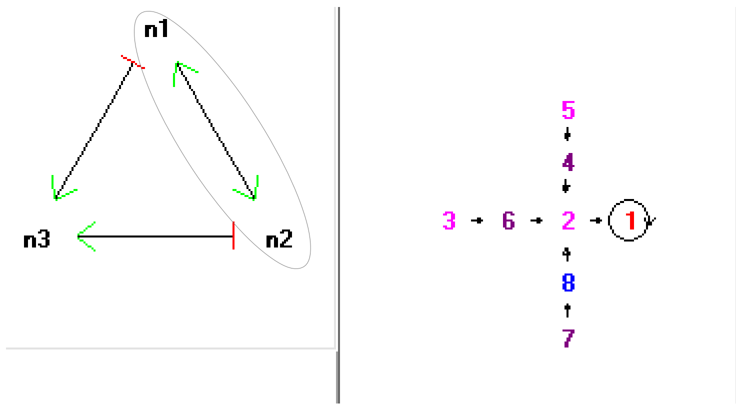
Komplizierter wird das Problem, wenn die verschiedenen Bedürfnisse in Gruppen zusammengefasst werden. Denn es ist unrealistisch, dass eine Person nur ein Bedürfnis in einen Konflikt einbringt. Alle Bedürfnisse, die hierfür relevant sein könnten und zu je einer Person gehören, müssen daher gebündelt werden. D.h. hier wird Psychologie und Soziologie vereint. Im allgemeinen sind die Bedürfnisse (Punkte), die einer Person zugehören in einem Graphen nicht separierbar, da die Ordnungsrelationen auch transsubjektiv verlaufen. Aber man wird sie als Teilgraphen behandeln müssen. Hinzu kommt, dass selbst bei der Bedürfnisdefinition andere Menschen eine Rolle spielen, so dass man streng genommen nicht einmal die Bedürfnisstruktur einer Person (selbst im konfliktfreien Fall) separieren kann. Das ist m.E. das komplizierteste Phänomen. Wie soll man also derartige Konflikte analysieren? Da reicht das Instrumentarium der Graphentheorie nicht mehr aus. Selbst die Definition, die ich in dem Artikel „Math. Skizze einer matrialen Bedürfnistheorie“ gegeben habe, reicht da nicht mehr aus. An dieser Stelle wurde der Bedürfnisbegriff in einer Folge von Wechselsituation von Anwesenheit (Behagenssituation) und Abwesenheit (Unbehagenssituation) als begriffliche Konkretion strukturell aufgefasst. Obwohl die andere Perspektive (die der Mutter) für das Kind in beiden Situationsarten latent vorhanden sind, in dem Sinne, dass die Mutter durch ihre Interpretation der Bedürftigkeit, ihre Verhaltensstruktur, ihre Haltung und Anschauung, Werte und durch ihre eigene Bedürfnisstruktur prägend auf diese Situationen einwirkt, so sind diese „Parameter“ nicht explizit eigeführt. Für das Kind bleiben sie unbewusst, aber wirken natürlich. Ein weiteres „Problem“ in Bezug auf Konfliktlösung ist, dass die Grundlage der meisten Bedürfnisse, der matrialen und zum Teil auch der patrialen, in der Kommunikation, in dem Bedürfnis des menschlichen Zusammenseins liegen. Das gilt nicht nur für Bedürfnisse, sondern schlechthin für alle „Objekte“, auch der physikalischen. Interaktion, Wechselwirkung heißt es dort, was aber nur eine objektive Beschreibung des Gleichen ist, nämlich das Interesse am Andern, das „Bedürfnis“ mit Anderen zu sein. (Natürlich gibt es dort auch abstoßende und „zerstörende“ Wechselwirkungen. Diese finden ihr Analogon erst in den tekialen Bedürfnissen) Diese Wechselbeziehung muss in eine vertiefte Definition des Bedürfnisses eingehen. Genau wie in der Teilchenphysik, wo ein Teilchen nur mit seinem Antiteilchen denkbar ist, zumindest in seiner Entstehungsphase.
Die bisherige Betrachtung der Bedürfnisse ist in dieser Hinsicht noch zu atomistisch. Sie haben zwar im Allgemeinen Wechselwirkungen, aber erst in ihrem „Leben“, nicht bereits in ihrer Definition, was eine vereinfachende Sichtweise war. Das Anspruchsdenken hängt damit zusammen, ebenso wie die Entstehung von Normen. Diese Einseitigkeit gilt es aber zu überwinden. Das Grundparadigma für die wichtigste Bedürfnisgattung, der matrialen ist die Liebe. Sie existiert auf Dauer nur, wenn sie gegenseitig ist. In gewissem Sinn verweisen Lacan und Lorenzer in der Psychoanalyse in diese Richtung. Lacan, wenn er meint, die Sprache des Unbewussten sei die Sprache des Anderen und Lorenzer, wenn er sich in Wittgensteinscher Tradition bemüht, verlorene Sprachspiele wieder zu reparieren. Nur ist die Sprache bereits zu komplex für diese Bedürfnisdefinition; sie bedarf der Sprache noch nicht, aber der „interaktiven“ emotionalen Kommunikation.
Interessant ist, dass die andere Bedürfnisgattung, die tekiale, gerade die Perspektive der Mutter als

Gebärende verwirklicht, aber als separate und separierende Struktur. Zum Teil als Ergebnis eines Bewusstseinsprozesses. Es gilt nun beide Aspekte zu integrieren und zwar sowohl in der matrialen Struktur, als auch in der tekialen. Dazu kommt noch an Komplikation, dass die tekiale Bedürfnisstruktur noch überhaupt nicht in die Konflikttheorie eingegangen ist, es aber müsste. Denn die Lösungen verfügen nicht über die gleichen Mittel.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, dass mehrere Bedürfnisse einer Person angehören, und eines einer zweiten Person.

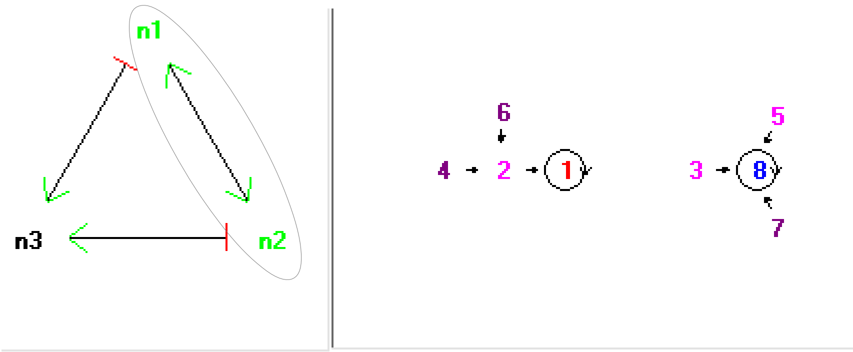


Die Person P1 wird durch den Teilgraphen $\{n_{1,}n_2\}$ mit der 2-CC repräsentiert und die Person P2 durch den neutralen Teilgraphen $\{n_3\}$. Obwohl P2 überaus hilfreich P1 gegenüber ist und P2 gegenüber P1 neutral, bewirkt die Persönlichkeitsstruktur von P1, dass alle Bedürfnisse in der Katastrophe landen, die auch P1 für sich alleine erlebt, nun aber P2 mit herein reisst. In diesem Fall gibt es also nur eine Möglichkeit: P1 muss therapiert werden, und zwar in seinem Interesse und dem des Anderen.



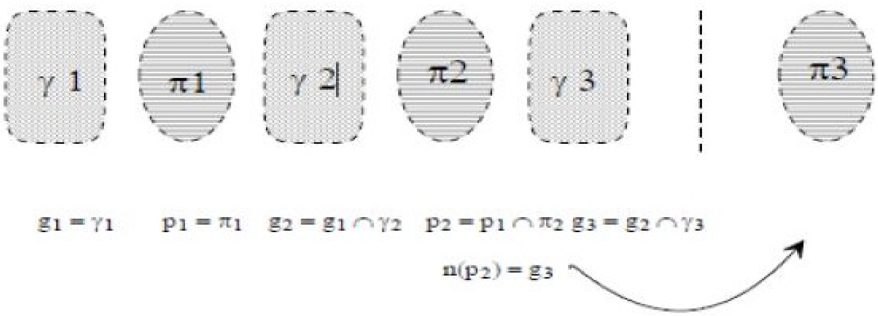
Oder nehmen wir einen inversen Fall mit den gleichen Personen, nur dass diesmal P1 sehr positiv und ausgeglichen und sozial ist, aber P2 P1 in jeder Hinsicht stört. Auch hier führt es spätestens nach drei Zeittakten zum unlebbaren Aus.

Leicht verbessern könnte P1 seine Situation, wenn seine Bedürfnisse sich selbst stimulieren (grün).



Aber auch dann noch führt eine Befriedigung von n_3, also P2 zur totalen Frustration. Nur wenn sich P1 ruhig verhält, tritt die beste Situation 8 für alle ein.
Soviel in aller Kürze zur Personalisierung (Gruppierung) von Bedürfnissen durch Teilgraphen.

Ich möchte noch kurz auf das oben angesprochene Problem einer verbesserten Definition eingehen, die das kommunikative Verhältnis berücksichtigt.
Bisher war wie gesagt in einer Wechselwirkung von Gefühl-Situationen (Behagen und Unbehagen) das Präobjekt und das Bedürfnis konstruiert worden, wobei beide Situationen ihren Gefühlsinhalt von der Wechselwirkung mit der Mutter erhielten, und zwar durch Abwesenheit und Anwesenheit. Ihre Handlungen und partielle Ausstattung der Situationen, die natürlich auch von ihrer Sozialisation abhingen und von Umwelteinflüssen, führte zu einer spezifischen Bedürfnisartikulation des Kindes. Die Anwesenheitssituationen sollen jetzt durch die Erwartungshaltungen und Ansprüche der Mutter, die in ihnen aktiv auftreten konkretisiert werden. Da diese Situationen wie bisher fast nur in der Form von „Bildern“ auftraten, und in diesen sich die ganzen für das Kind gegebenen Prozesse herauskristallisierten, sollen diese durch die Perspektive der Mutter ergänzt werden.



Die Situationen mutieren also von Bildsituationen zu selbst **relationalen Situationen.** Zwar wurden Bedürfnisse schon normativ gesehen im Sinne des Anspruchs des Kindes, aber der Anspruch ist partiell gegenseitig und verändert sich daher. Zu einem doppelten oder multiplen Wechsel von gegenseitigen Anspruchs- und Antwortsituationen.
Der Situationscharakter war von der Kindperspektive her entwickelt worden. Von der Mutter her gesehen hat er zwar auch Situationsform, aber auch den Trennungsaspekt. Die Mutter hat ihre eigenen Interessen, die vom Kind auch unabhängig sind. Für das Kind hat dieses Verhältnis eher negativen Charakter und zeigt sich am krassesten in ihrer Abwesenheit.

Das was bei den multiplen Graphen als epikureische oder kontradiktorische Ordnungsrelationen auftrat, spielt schon direkt in den Elementarsituationen des Kindes eine Rolle, die sich dann zu Bedürfnissen verdichten. Die Graphen spiegelten also auf der Makroebene die Mikroebene wider. Nur dass die Konflikte und Harmonien von Bedürfnissen außerhalb der Bedürfnisse inter- und intrapersonell erschienen. Nicht Bedürfnisse bilden also die Grundlage der Anthropologie, sondern diese mental-emotionalen Bausteine der ambivalenten Elementarsituationen. Man beobachtet eine ständige Wechselwirkung von innen und außen. So hatte etwa Freud in seinem zweiten topischen Modell der menschlichen Psyche (Es, Ich, Überich) die Zerteilung der Persönlichkeit, die in der früh- und mittelbürgerlichen Zeit etwa bei Kant noch als moralischer und gesellschaftlicher Imperativ in Erscheinung trat, ins Innere mit all den Problematiken dieser Zerteilung verlagert. Zunächst ist der moralische Anspruch ja das Bedürfnis des Andern, der in der Übergangszeit von Kant sich zum eigenen höheren Anspruch der Vernünftigkeit und Allgemeinheit in den beiden Ichs, dem empirischen und dem vernünftigen, gottähnlichen Ich bereits verinnerlicht, aber immer noch die Herkunft als äußeres moralisches Gebot erkennen lässt. Ebenso wird der konkrete Anspruch der Anderen zu einem Gedankenexperiment idealisiert, generalisiert und abgekoppelt von der realen Sozialität. Bei Freud tritt er dann als zum Teil unbewusster Kraft im Überich ins Innerpsychische. In der Frühphase des Kindes ist es gerade umgekehrt. Da liegen diese zum Teil wieder für das Kind jenseits des Bewusstseins liegenden Konflikte in den Elementarsituationen, die dann zu Bedürfnissen kristallisieren und die Konflikte zum Teil auslagern in andere Bedürfnisse. Dort also der Weg von der Innerlichkeit zum Äußern. In gewisser Hinsicht reflektierte das Freud in der Persönlichkeitsbildung des Ödipuskomplexes.

Es gilt nun, diese innere Dialektik von sozialer Einheit und Differenz innerhalb der Elementarsituationen für die Bedürfnisdefinition zu rekonstruieren, damit Konflikte und Krankheiten genauer und erfolgreicher gelöst bzw. geheilt werden können.

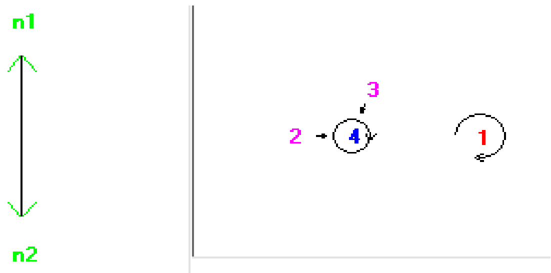
Günstig ist vielleicht hier die Terminologie von Hegel mit seinem **Ansich- und Fürsichsein.** Das Ansich, das ja Kant in seiner Erkenntnistheorie thematisiert hatte, und m. E. so etwas wie ein schlechtes Gewissen wohl war. Die Entthronung des Objekts in seiner kopernikanischen Wende war wohl zu krass, wenn es sich nun gänzlich nach dem Subjekt zu richten hatte. Im Ansich ist das Recht des Objekts noch aufbewahrt. Die newtonsche Absolutheit von Raum und Zeit war nach dieser Theorie nur verständlich und philosophisch begründbar, wenn sie Formen, Anschauungsformen des Subjekts waren, die jeder Erkenntnis zugrunde liegen. Diese Kantsche Nichtobjektivität von Raum und Zeit sind dann weiter entwickelt worden von Einstein in seiner speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie, die aber nun nicht mehr nur vom Subjekt sprich dem Inertialsystem abhingen, sondern auch vom Objekt, der Absolutheit des Lichts bzgl. seiner Geschwindigkeit und den Materieverteilungen oder Energieverteilungen. Nach Hegel herrscht eine Dialektik von Ansich- und Fürsichsein, beide sind nur Momente dieser Dialektik. Das Ansich aber ist das Andere in der Wechselwirkung des Fürsichs, des Subjekts. Um dieser Relation zuzuschauen in ihrer Entwicklung führte Hegel noch den Standpunkt des Füruns ein. Allerdings muss dieses Füruns ganz dicht an der Entwicklung bleiben und darf nicht von einem abgeklärten auktorialen Standpunkt aus urteilen. Dass das Kantsche Ansich nicht erkennbar war, hatte er noch Descartes zu verdanken, dem es genauso wenig möglich erschien, zur objektiven Welt zurückkehren, nachdem er

sie zerstört hatte, um zu seinem Cogito zu kommen. Einen deus ex machina aber müssen wir vermeiden. Wenn etwas erkennbar ist, dann ist es gerade das Andere! Das Subjekt ist erst durch dieses Andere mitkonstituiert. Das Andere ist nicht nur das Gegebene oder Objektive, das Positive, sondern vielmehr das Gebende und Nehmende und sich Verweigernde. Oder wie Heidegger formulierte: das sich Offenbarende und gleichzeitig Verbergende. Das Objekt erscheint nicht zunächst als Erkenntnisobjekt, als Vorhandenes, sondern so ähnlich wie Heidegger meinte eher als Zuhandenes. Doch auch das ist noch zu komplex auf dieser Ebene, wenn wir von der Kindesperspektive, dem Fürsich ausgehen. Es geht vielmehr zunächst um Dasein und Abwesenheit, um In-und Mitsein und Außensein oder Wegsein. Ansich, d.h. für das Andere, die Mutter, ist im guten Fall das Dasein auch ein Dasein, eine kommunikative Einheit Verschiedener, aber doch auch eine emotionale Einheit, eine Helle, Glück. Aber nicht immer. Sie kann auch das Dasein realisieren ohne wirklich da zu sein, emotional und ungeteilt. Für das Kind wirkt dieses Dasein als entfremdetes Dasein, als paradox, als ambivalent, das es desorientiert. Die Klarheit der Abwesenheit und die der Anwesenheit, die fundamental für eine gesunde Entwicklung sind, wird getrübt. Das Kind wird in der bisherigen Befriedung unruhig, ein schales unheilvolles Gefühl bestimmt es. Es kann sich nur dagegen wehren, indem es die Mutter ablehnt, obwohl es sie gerade herbeigesehnt hat. Ein Teufelskreis. Es erlebt in seiner Wahrheit, der Anwesenheit, die Täuschung, das Nichtsein des Seins.
Die Ablehnung des Anderen ist die Folge und diese zeigt sich später in der kontradiktorischen Relation. Freilich baut sich diese Ablehnung erst durch mehrmalige Wiederholung auf und wird erst darin bewusst für das Kind. Adorno beispielsweise artikulierte das auf philosophischer Ebene in seiner negativen Dialektik.
Ich habe dieses Bedürfnis, das sich so ausbilden kann, als ein falsches matriales Bedürfnis bezeichnet
(siehe http://philmath.org/wordpress/wp-content/uploads/2012/07/mathBeduerfnisth.pdf).
Solche Bedürfnisse sind in Konfliktsituationen fatal. Da die Trennung für das Kind unumgänglich wird, aber nicht möglich ist, bleibt ihm nichts anderes übrig als im Geist diese Trennung zu vollziehen, in die wahre Mutter und die falsche Mutter. Es kann anfangen, seinen eigenen Gefühlen und Wahrnehmungen zu misstrauen und wird instabil. Das kann sich in einer (quantitativ) chaotischen und neurotischen Bedürfnisstruktur reflektieren.

Gehen wir zurück zu einer weniger dramatischen Entwicklung. Nehmen wir an, die Mutter ist selbstbewusst und macht dem Kind klar, wann sie bei ihm sein will und wann nicht und setzt das auch um. Die Situationen der Anwesenheit und der Abwesenheit sind klar getrennt und an sich auch unproblematisch, solange die Mutter genügend oft beim Kind ist. Auf diese Weise entstehen normal artikulierbare Bedürfnisse, die ja in der Integration der Abwesenheitssituationen und der der Anwesenheitssituationen bestehen und eine Richtung von Ab-zu Anwesenheit intendieren. Die Mangelsituation der Abwesenheitskonkretion wird als Bedürfnis nach und zwar nach der Konkretion der Anwesenheitssituationen artikuliert. Die weitere gesunde Entwicklung geht dann vorallem über in die Bedürfnisdifferenzierung.

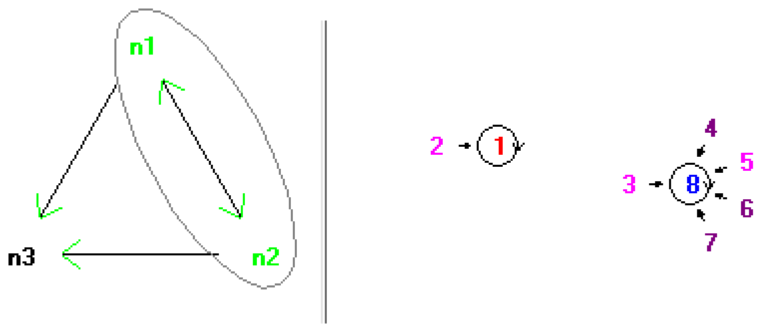
Welche weiteren Strukturen finden wir bei den Anwesenheitssituationen, die nicht der Ambivalenz der Unwahrheit unterworfen sind? Die pure Anwesenheit ist von Handlungen, Ansprüchen, Erzählungen, Spielen und Mahnungen, Forderungen, Zeigen, Nehmen, Zuwendung, Zuneigung und Abwendung seitens der Mutter durchsetzt. Wichtig sind diejenigen Faktoren, die relativ häufig und regelmäßig und damit integrierbar sind zu Bedürfnisstrukturen.

Nehmen wir an, die Mutter wendet sich dem Kind liebevoll zu, redet mit ihm, erwidert das Lächeln etc., so erfährt das Kind diese Situationen als nicht nur ausgeglichen, sondern stimulierend, energetisierend und erwartet dann auch diese liebende Kommunikation und Interaktion. Das Bedürfnis ist so nicht ichbezogen, sondern dem Andern zugewandt, kommunikativ, nicht monistisch. Allerdings ist es wahrscheinlich doch anapoietisch, d.h. ist projektiv befriedigend, in der nächsten Situation wird es seine Bedürftigkeit eine Zeit lang selbst stillen können in der Haltung, der Erinnerung, es ist sozusagen aufgeladen. Aber im Allgemeinen wird sich das Bedürfnis in kommunikativen Situationen erfüllen, d.h. bedarf der sozialen Struktur, ist also gekoppelt mit dem (den) Anderen und findet seine Befriedigung wesentlich in der Befriedigung des Anderen (Mutter). Eine Art relativ symbiotisches Gleichgewicht, eine relativ stabile Struktur, die so etwas wie ein Grenzzyklus erzeugt:

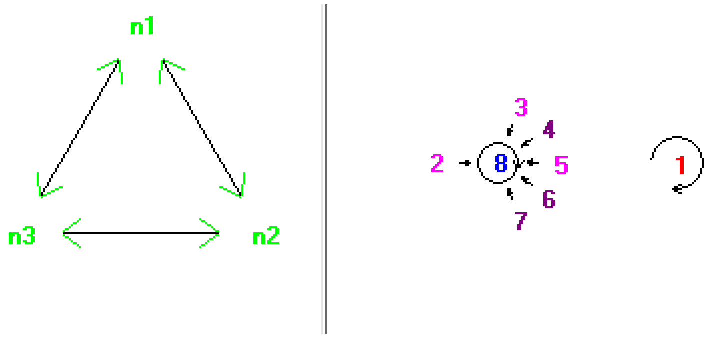


Das in sich (anapoietisch) befriedigte Bedürfnis n_1 stimuliert die Kommunikationsfreudigkeit der anderen Person mit dem Bedürfnis n_2 und so weiter, sodass hier nicht nur eine stabile Befriedigungssituation für beide einzeln entsteht, sondern geradezu eine sittliche Situation (um in Rousseau-Hegelscher Terminologie zu reden). Allerdings bedarf diese neue geistige Einheit stets auch der „Energiezufuhr“ wie jedes lebende System. Nicht nur dass der Zusammenhalt des Systems dadurch gefestigt wird, sondern das geistige „Stoffwechselprodukt“ sind gemeinsame Gedanken, Gefühle, Erwartungen etc.
n_1 kann also nicht gänzlich von n_2 unabhängig gedacht werden, obwohl im Allgemeinen eine gewisse Autonomie erhalten bleibt, eben dadurch, dass die Erwartungen auch nicht immer erfüllt werden. Das obige Diagramm ist also nicht sehr günstig, da die Struktur als äußere erscheint.
Die Befriedigung von n_2 gehört also zum Bedürfnis von n_1 und umgekehrt, so dass sie beide eher wie ein Teilgraph einer Person dargestellt werden müssten.

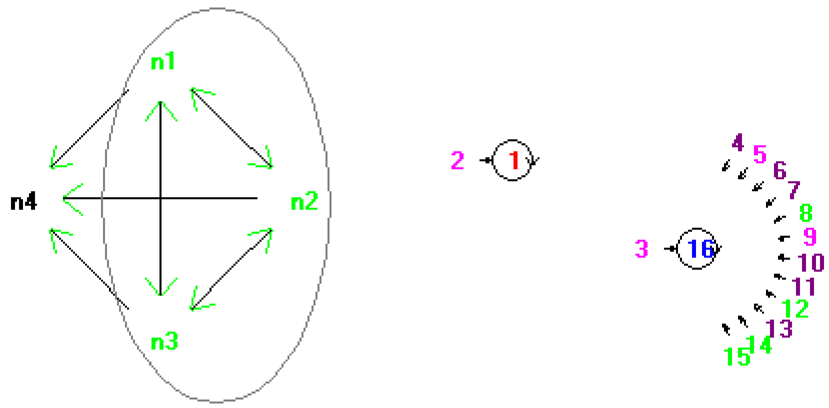
Stellt man sich nun eine dritte Person vor, dessen Bedürfnis n_3 bezüglich sich selbst neutral (indifferent) ist, und die positive Energie von $\{n_1, n_2\}$ sich auf n_3 überträgt, so wird quasi die dritte Person in diese Sittlichkeit integriert. Vergleiche den Dynamikgraph rechts.

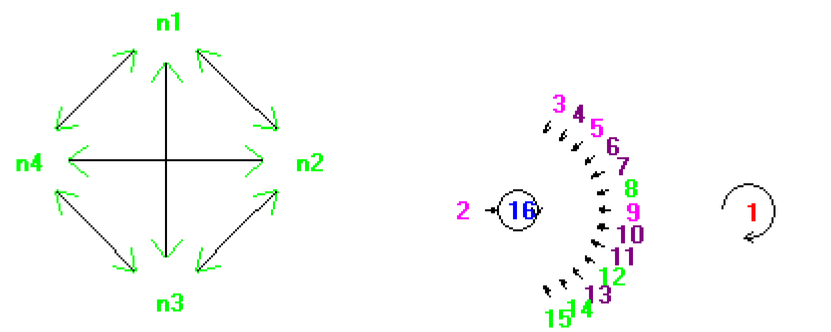


Die Situation 8 bedeutet ja, dass alle Bedürfnisse befriedigt sind und das zyklisch. Die Struktur, in der alle drei Personen sich wie oben die zwei Personen verhalten, also ein stabiles 3-System, hat nur eine unwesentlich andere Dynamik:



Der einzige Unterschied besteht in der Situation 2, die besagt, dass das Bedürfnis n_3 befriedigt ist. Oben führt diese einsame Befriedigung zur Frustration von der dritten Person. Nimmt sie jedoch die positive Aufladung von $\{n_1, n_2\}$ an, so wird sie paritätisch integriert, was im Normalfall zu erwarten ist.

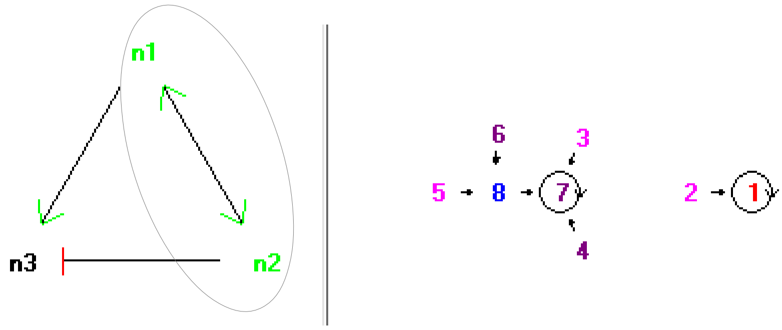




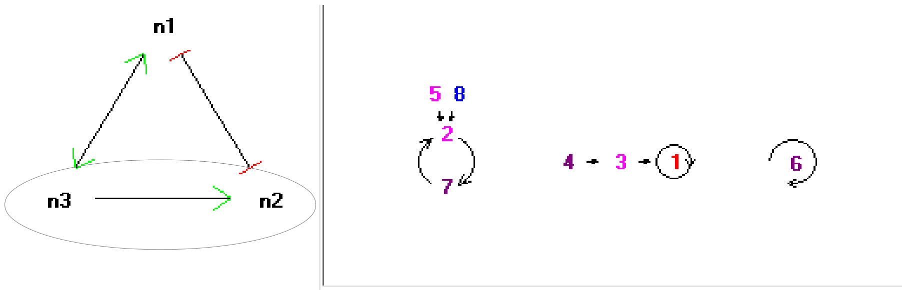
Das Gleiche wiederholt sich mit vier Personen. Situation 2 bedeutet hier, dass nur n_4 befriedigt ist, was wieder zur Frustration der 4. Person führt, die noch nicht integriert ist, jedoch von der „sittlichen“ 3-Gruppe positiv aufgeladen wird. Akzeptiert sie das, so verbessert sich ihre Dynamik und wird optimal und symmetrisch und damit stabil, was eine neue 4-Sittlichkeit erzeugt. Siehe dazu das zweite Diagramm unten.

Das geht so analog auch weiter. Das ist, was mit dem Geist (oder dem lebendigen „heiligen“ Geist) gemeint ist, der eine Attraktivität entfaltet und die Tendenz zum Wachstum hat. Beim Volksgeist von Rousseau liegt die Sache etwas anders, sozusagen alltäglicher, realistischer und etwas weniger günstig, aber durchaus ähnlich. Nur, dass es hier keine inhärente Wachstumstendenz gibt, sondern Lösung und Wachstum muss hier durch höhere Einsicht (durch soziale Beratung) erfolgen. Aber auch Vernunft kann ansteckend wirken.

Ist die obige Keimzelle $\{n_1, n_2\}$ nicht so produktiv, sondern durch Unsicherheit labiler, was dadurch entstehen kann, dass eine der beiden Personen (in der Regel das Kind) nicht genügend positive kommunikative Befriedigungssituationen erlebt hat, so kann die positive Ausstrahlung der einen Person die negative der zweiten Person auf die dritte erzeugen, was man gemeinhin unter Eifersucht versteht. Der kluge Lichtenberg hat das ganz richtig und pointiert gereimt: „Eifersucht ist eine Leidenschaft, die mit Eifer sucht, was Leiden schafft".



Situation 7 bedeutet, dass nur n_1 und n_2 befriedigt sind, was ja genau die Absicht von P_2 war und damit P_3 ausgeschlossen bleibt. Die Situation wird unwesentlich verbessert, wenn P_3 selbst positiv ist (d.h. n_3 anapoietisch ist).
Eine andere Situation ergibt sich, wenn das Kind „Zuwendung" oder Aufmerksamkeit vorallem dann erfährt, wenn es bestraft wird. Da Kommunikation (Liebe etc.) das wichtigste matriale Bedürfnis ist, wird selbst die Bestrafung vorgezogen gegenüber der Vernachlässigung. Man muss hier offensichtlich unterscheiden zwischen aktivem Leid und passivem Leid. Freude kann nicht so sehr nur in der Vermeidung von Leid liegen. Denn das Kind wird das aktive Leid, das es von der Bezugsperson erfährt, nämlich Strafe, dem passiven Leid, das in der Nichtzuwendung besteht, bevorzugen, da es (das aktive Leid) gekoppelt ist mit wenn auch schmerzlicher Zuwendung.



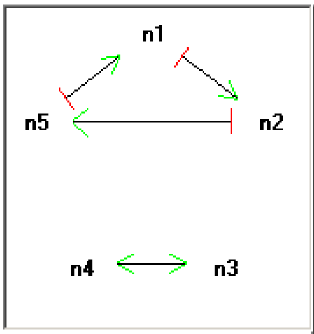
Sit.Nr.	Nr.i befr. Bedürfnisse ni	
1	-	1
2	3	3
3	2	3
4	2,3	
5	1	3
6	1,3	
7	1,2	
8	1,2,3	

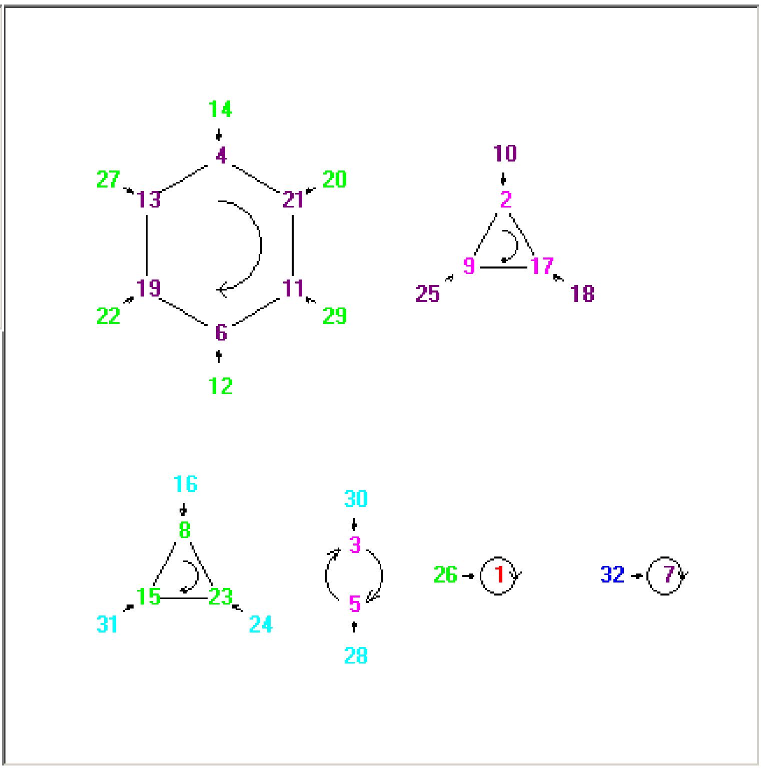
n_2 ist hier das Bedürfnis des Kindes nach Straffreiheit, n_3 nach Zuwendung und n_1 der Bestrafungswille der Bezugsperson. Das Kind steht ihm ambivalent gegenüber, zum einen lehnt es ihn ab $n_2 \dashv n_1$ und zum andern erwartet es ihn aufgrund der Zuwendung $n_3 \rightarrow n_1$ und provoziert die Bestrafung. In der Zuwendung wird wieder das Straffreiheitsbedürfnis wach $n_3 \rightarrow n_2$, der Schein der

Utopie. Wie der Dynamikgraph darstellt, erzeugt diese Konstellation einen intern stabilen 2-Grenzzyklus, der in der paradoxen Symbiose des Bedürfnisses nach Zuneigung n_3 einerseits (Situation 2) und dem Bestrafungsakt n_1 und dem konträren Bedürfnis nach Gewaltfreiheit n_2 andrerseits (Situation 7) pendelt.
Eine genauere Analyse muss freilich auch noch die anderen Bedürfnisse und Verbindungen der Bezugsperson einbeziehen. Aber es wird hier schon klar, wie zumindest ein Teil des Gewissens als stabile Struktur sich herausbildet. Da die strafende Bezugsperson unauflöslich zu diesem Komplex gehört, wird sie symbolisch verinnerlicht und in die Persönlichkeit integriert und kann jederzeit in ähnlichen Situationen durch ähnliche Personen ersetzt werden. Sie ist sozusagen zu einer Variablen, einem Platzhalter geworden. Die innere Paradoxie oder sogar der Widerspruch wird individuell in der Pubertät ausgetragen und führt zu einer Umarbeitung oder gar Abschaffung der Autorität.
Wenn diese Konstellation gesellschaftlich verbreitet und verortet ist, so wird sie auf längere Sicht zu einer Umwälzung führen müssen. Diesem Widerspruch ist partiell die Entstehung des Christentums und einiger politischer Revolten zuzuschreiben.

Es gibt sicherlich noch viele andere interessante und wichtige Relationen in den Behagenssituationen, die der Analyse bedürfen und Bedürfnisse strukturell bestimmen.
Wahrscheinlich spielt hier auch das ganze Gebiet der Ästhetik herein. Ich denke hier allgemein an die Tendenz, dass sehr viele Aspekte der Ästhetik verstehbar werden, wenn man sie in dieser frühe Periode lokalisiert. Man denke an etliche Gemälde, in denen das frühkindliche Leben direkt oder indirekt thematisiert wird oder auch in der Literatur, bspw. an „A la recherche du temps perdu“ von Marcel Proust. Speziell spielt in der Ästhetik auch das Spiel eine eminente Rolle. Man denke etwa an Schiller. Eine besondere Form des Spieltriebs scheint von der kommunikativen Spielbeziehung von Mutter und Kind in den Behagenssituationen geprägt zu sein. Aber es ist hier nicht der Ort, genauer auf dieses weite Feld einzugehen.

Bisher wurden Graphen betrachtet, die Untergraphen besitzen, die jedoch nicht trennbar waren.
Hat man einen Graphen mit $n_1, \ldots, n_r$ Bedürfnissen (Knoten), dann ist jede Teilmenge der Bedürfnisse mit ihren Beziehungen (Kanten) ein **Subgraph.** Es kommt häufig vor, dass jedoch einige Bedürfnisse der Teilmenge Beziehungen zum Rest der Bedürfnisse haben. Solch ein Subgraph wäre dann nicht separabel. **Separabel** ist der Subgraph also, wenn keines seiner Bedürfnisse Beziehungen zu Bedürfnissen der Restmenge haben. Ein Beispiel wäre etwa:



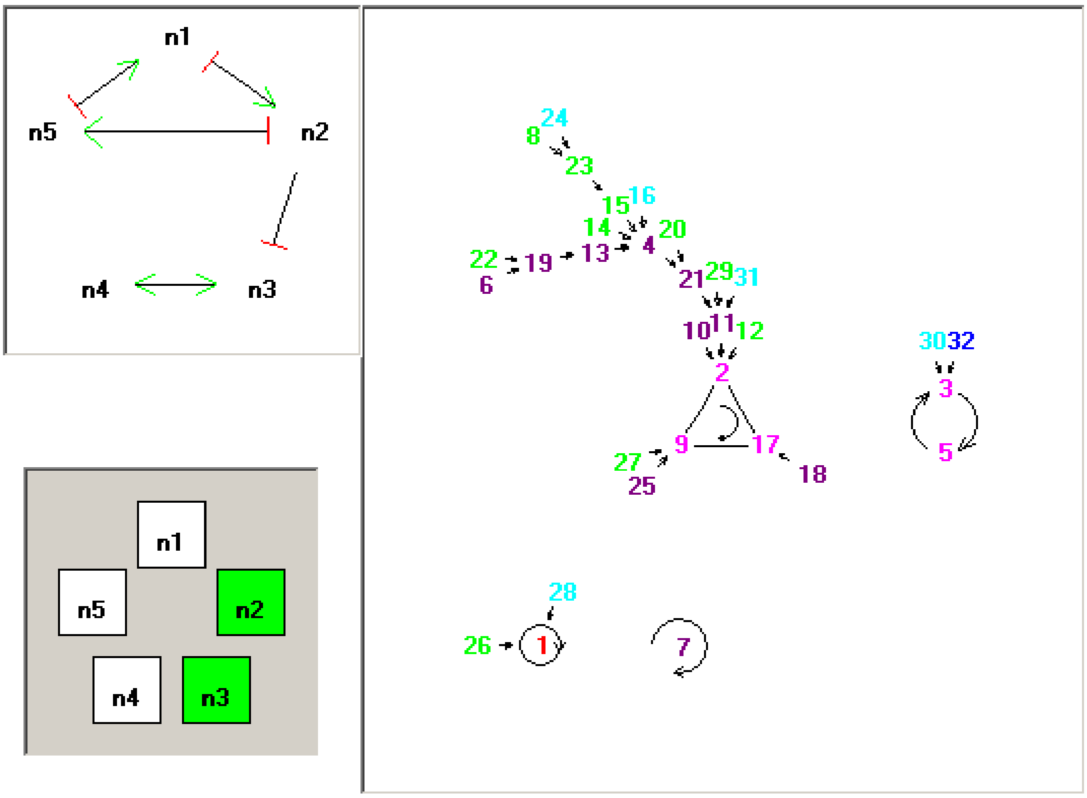


Sit.Nr.	Nr.i befr. Bedürfnisse ni	
1	-	1
2	5	3
3	4	2
4	4,5	6
5	3	2
6	3,5	6
7	3,4	1
8	3,4,5	3
9	2	3
10	2,5	
11	2,4	6
12	2,4,5	
13	2,3	6
14	2,3,5	
15	2,3,4	3
16	2,3,4,5	
17	1	3
18	1,5	
19	1,4	6
20	1,4,5	
21	1,3	6
22	1,3,5	
23	1,3,4	3
24	1,3,4,5	
25	1,2	
26	1,2,5	
27	1,2,4	
28	1,2,4,5	
29	1,2,3	
30	1,2,3,5	
31	1,2,3,4	
32	1,2,3,4,5	

In dem 3-Zyklus $<8,23,15>$ sind die beiden Bedürfnisse n_3 und n_4 stets befriedigt und die Bedürfnisse aus dem separablen Teil n_1, n_2 und n_5 im 3-Takt, d.h. jede dritte Zeiteinheit. Letzteres gilt auch für den anderen 3-Zyklus $<2,17,9>$, nur dass hier die Bedürfnisse n_3 und n_4 nie befriedigt sind. Wohingegen das Inverse beim 2-Zyklus $<3,5>$ gilt, d.h. die Bedürfnisse n_3 und n_4 werden im 2-Takt befriedigt und n_1, n_2 und n_5 überhaupt nicht. Beim 6-Zyklus $<14,20,29,12,22,27>$ werden die Bedürfnisse n_1, n_2 und n_5 im 3-Takt und $<3,5>$ im 2-Takt gemeinsam befriedigt.

Es mag so scheinen, dass selbst bei separablen Subgraphen ihre Bedürfnisdynamiken verflochten sind, wenn man den 6-Zyklus oder den erstgenannten 3-Zyklus $<8,23,15>$ betrachtet. Das aber täuscht. Fokussiert man auf den 2-Zyklus und den $<2,17,9>$ 3-Zyklus, so bemerkt man, dass sie autonom sind und nur jeweils die Dynamik der getrennten Subgraphen angeben. Beim 6-Zyklus beispielsweise hat man nur eine scheinbare Verflechtung. Dies kommt dadurch zustande, dass die Zustände für den gesamten Graphen kodiert wurden und sozusagen parallele Dynamiken besitzen. Beispielsweise bezeichnet die Situation 21 dass die Bedürfnisse n_1 und n_3 befriedet sind, also eine Befriedigungs-Kombination aus beiden Subgraphen vorliegt, wobei jedes Bedürfnis für sich seine Dynamik in seinem jeweiligen Subgraphen entwickelt und nur durch das simultane Zusammenschauen eine Verflechtung erscheinen mag.

Da solche Strukturen zwar eine relative Stabilität haben können, jedoch auf leichte Veränderungen und äußere Einflüsse reagieren können, ist eine Strukturveränderung durchaus wahrscheinlich. Diese Subsysteme sind eben in einem möglichen Wechselwirkungszusammenhang. Leichte Veränderungen können sich sehr wohl auf diese Systeme auswirken. Ein schönes Beispiel entwickelte Goethe in seinen Wahlverwandtschaften. Leibniz konstruierte seine Metaphysik ebenfalls auf der Basis universeller Wechselbeziehungen. Oder man betrachte die Quantensysteme, die durch einen äußeren Einfluss (etwa Messung) ihre Kohärenz (Superposition) verändern bzw. verlieren (Dekohärenz).



Wird etwa eine Beziehung zwischen den beiden Subsystemen hergestellt durch eine Störung von n_2 bzgl. n_3 , (siehe obenstehende Graphik) so sind die Grenzzyklen $<2,17,9>$ und $<3,5>$ zwar noch autonom, aber werden diese beiden Bedürfnisse gleichzeitig befriedigt (Situation 13), so laufen die Dynamiken noch kurz (3 Takte) parallel $S_4:\{n_4,n_5\} \rightarrow S_{21}:\{n_3,n_1\} \rightarrow S_{11}:\{n_4,n_2\} \rightarrow S_2:n_5$, bis jedoch der 3-Zyklus die Befriedigung von n_3 und n_4 eliminiert hat.