

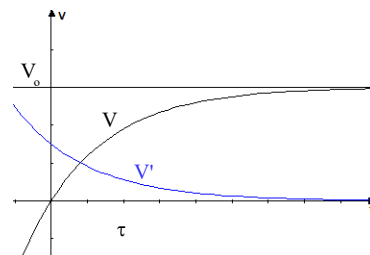
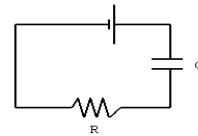
# Dynamische Systeme

Manfred Hörz

Dynamische Systeme sind kontinuierlich oder diskret. Zunächst die **kontinuierlichen**.

## 1. Phasenlinien

**Beispiel 1:** Widerstand-Kondensator-Stromkreis (RC-circuit).



$$V(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \dot{V}(t) = \frac{V_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{im Graph } V_0=3 \text{ und } \tau=2 : V(t)=3(1 - e^{-\frac{t}{2}}) ).$$

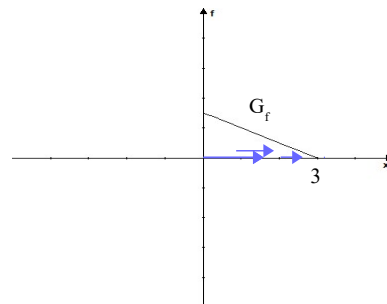
Löst man  $V(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  nach  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  auf:  $e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{V(t)}{V_0}$  und setzt es in  $\dot{V}(t) = \frac{V_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$  ein, erhält man  $\dot{V}(t) = \frac{V_0}{\tau} (1 - \frac{V(t)}{V_0}) = \frac{1}{\tau} (V_0 - V(t))$  oder  $\dot{V}(t) = \frac{1}{\tau} (V_0 - V(t))$  oder mit

$$x(t) = V(t): \quad \dot{x}(t) = \frac{1}{\tau} (V_0 - x(t))$$

Die zugehörige DG  $x' = f(x)$  bzw.  $\dot{x}(t) = f(x(t))$

hat hier die Gestalt  $\dot{x} = \frac{1}{\tau} (V_0 - x)$  oder  $\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{\tau} + \frac{V_0}{\tau}$  mit  $f(x) = -\frac{x}{\tau} + \frac{V_0}{\tau}$ .

Mit den oben gewählten Konstanten  $V_0=3$  und  $\tau=2$  ist das die Funktion  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



Die konkrete DG lautet hier also  $\dot{x} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  bzw.  $\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t) + \frac{3}{2}$

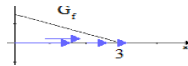
Sie Lösung dieser einfachen DG ist in der Tat mit  $V=x$  :  $V(t) = 3(1 - e^{-\frac{t}{2}})$ , denn:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}(x(t)-3) \Leftrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)-3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{\dot{x}(t)}{x(t)-3} dt = \int -\frac{1}{2} dt + c \Rightarrow \ln|x(t)-3| = -\frac{1}{2}t + c \Rightarrow$$

$$|x(t)-3| = e^{-\frac{1}{2}t+c} \Rightarrow x(t)-3 \stackrel{A:=\pm e^c}{=} A e^{-\frac{1}{2}t} \Rightarrow x(t) = 3 + A e^{-\frac{1}{2}t} \quad x(0) = 3 + A = 0 \quad \text{da die Spannung}$$

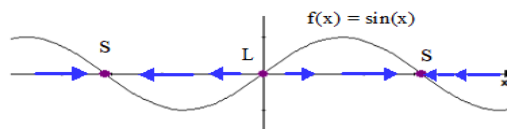
des Kondensators zu Anfang Null ist  $\Rightarrow x(t) = 3 - 3e^{-\frac{1}{2}t} = 3(1 - e^{-\frac{1}{2}t})$  bzw.  $V(t) = 3(1 - e^{-\frac{1}{2}t})$

Die Phasenlinie (Phasenraum) der DG  $\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t) + \frac{3}{2}$  ist das Intervall  $[0, 3[$ . In 3 ist die Funktion  $f(x)$  Null bzw.  $\dot{x} = 0$ . 3 ist ein (nicht angenommener) Gleichgewichtspunkt, die maximale Spannung des Kondensators:



Die Trajektorie geht von 0 bis 3. Bei 0 hat der Vektor die Länge 1,5 bei 1 die Länge 1 und bei 2 die Länge 0,5 und schließlich bei nahe 3 die „Länge“ 0.

**Beispiel 2:** Die DG  $\dot{x} = \sin(x)$  bzw.  $\dot{x}(t) = \sin(x(t))$  mit Phasenlinie  $\mathbb{R}$ .



Die Schnittpunkte von  $G_f$  mit der  $x$ -Achse ( $\dot{x} = 0$ ) sind die Gleichgewichtspunkte des Systems: S sind die stabilen, L die labilen Gleichgewichtspunkte. Das **Vektorfeld** gibt die Veränderungen  $\dot{x}(t)$  an der Stelle  $x$  an. Bspw. ist im Punkt  $\pi/2$  die Länge des Vektors 1 ( $\sin(\pi/2) = 1$ ). Ist der Wert negativ, etwa  $\sin(3\pi/2) = -1$ , so ist der Vektor an der Stelle  $3\pi/2$  nach links gerichtet mit der Länge 1. Bei stabilen Gleichgewichtspunkten zeigen die Vektoren zu ihnen hin.

## 2. Phasenebene

**Beispiel 1:** Die gekoppelten DGen  $\dot{x} = y - x^2 + 2x$  und

$$\dot{y} = x - y$$

(allgemein  $\dot{x} = f(x, y)$  und

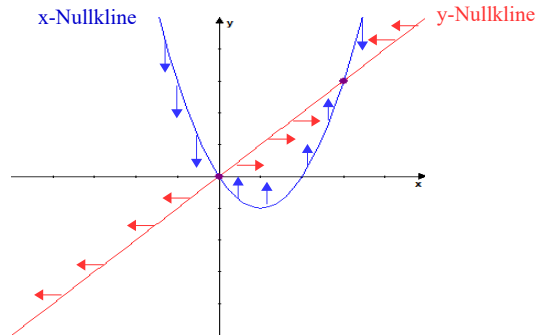
$$\dot{y} = g(x, y))$$

mit Phasenebene  $\mathbb{R}^2$  haben die beiden Freiheitsgrade  $x$  und  $y$ .

Die Punkte, in denen sich (in unmittelbarer Umgebung) weder  $x$  noch  $y$  ändern, sind die Gleichgewichtspunkte:  $y - x^2 + 2x = 0$  und  $x - y = 0$  (allgemein  $f(x, y) = 0$  und  $g(x, y) = 0$ ), d.h. hier die Punkte  $(0, 0)$  und  $(3, 3)$ , die Schnittpunkte der Graphen von  $y = x^2 - 2x$  und  $y = x$ .

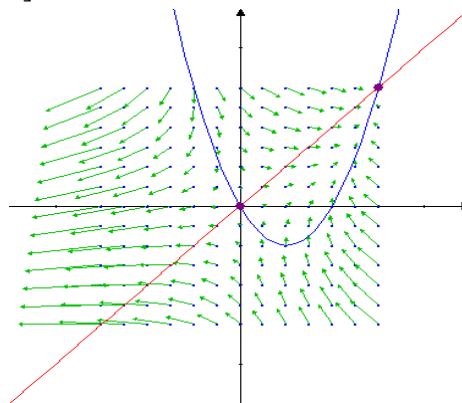
Diese Graphen nennt man die *Nullklinen* von  $x$  bzw. von  $y$ . Auf der Nullkline von  $x$  zeigen die Flussvektoren, d.h. die die Richtung und Stärke der Veränderung des Zustandsvektors (Punkt in der Phasenebene) angeben, in Richtung der positiven oder negativen  $y$ -Achse, da die Veränderung in  $x$ -

Richtung Null ist. Analog zeigen die Flussvektoren auf der Nullkline von  $y$  nur in positive oder negative  $x$ -Richtung. Der Flussvektor entlang der  $x$ -Nullkline zeigt nach oben, wenn  $\dot{y} > 0$ , d.h. hier wenn  $x - y > 0 \Leftrightarrow y < x$ , also wenn der Punkt unterhalb der Geraden, der  $y$ -Nullkline ist, wenn  $\dot{y} < 0$  zeigt er nach unten, also wenn der Punkt oberhalb der Geraden liegt, kurz er zeigt in Richtung der Geraden. Entsprechend zeigt der Flussvektor entlang der Geraden nach rechts, wenn  $\dot{x} > 0$ , d.h. wenn  $y - x^2 + 2x > 0$  oder  $y > x^2 - 2x$ , also wenn der Punkt oberhalb der Parabel liegt und der Flussvektor zeigt nach links, wenn der Punkt unterhalb der Parabel liegt, kurz in Richtung der Parabel.

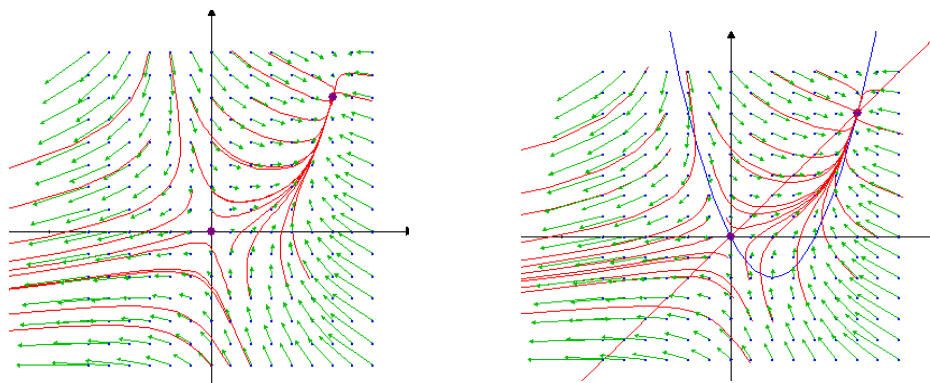


Wie man aufgrund der Flussvektoren erkennen kann, ist  $(0,0)$  ein Sattelpunkt, also ein labiler Gleichgewichtspunkt und  $(3,3)$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

Die Flussvektoren im Quadrat  $[-3,3]^2$  :



Mit einigen Trajektorien. Man erkennt hier gut, dass  $(3,3)$  ein stabiles Gleichgewicht ist, ein Attraktor.

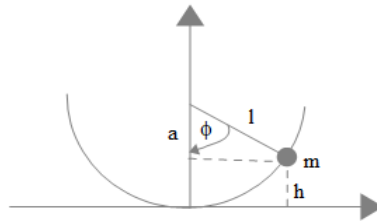


**Beispiel 2:** Das mathematische Pendel kann durch die gekoppelten DGen

$$\dot{\phi}(t) =: \omega(t) \quad \text{und}$$

$$\dot{\omega}(t) = -g \sin \phi(t)$$

beschrieben werden. Dabei ist  $\phi(t)$  der Auslenkwinkel bzgl. der Vertikalen zur Zeit  $t$  und  $\omega(t)$  die Winkelgeschwindigkeit.



Da  $\frac{a}{l} = \cos \phi$  und  $h = l - a = l - l \cos \phi$  ist  $E_{pot} = mgh = mgl(1 - \cos \phi)$  und

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{und} \quad s = \phi \cdot l \Rightarrow v = \dot{s} = l \cdot \dot{\phi} \Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 \quad .$$

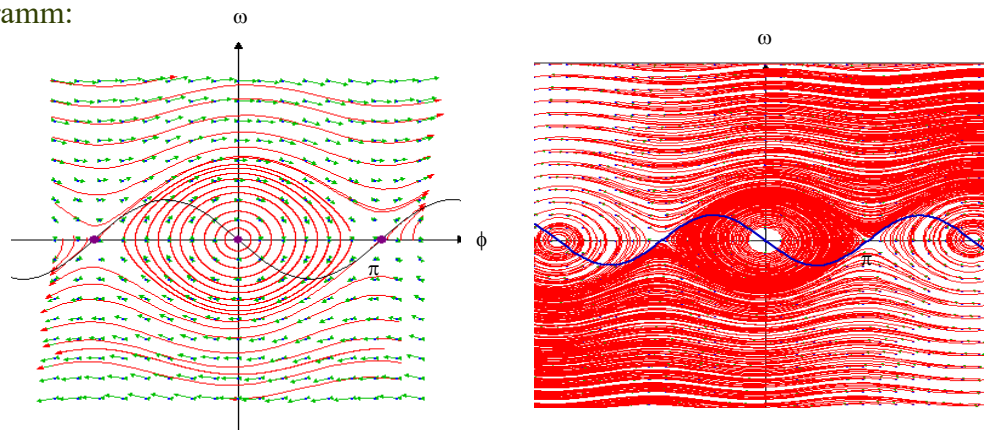
Für die Gesamtenergie gilt dann  $E_{ges}(t) = mgl(1 - \cos \phi(t)) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}(t)^2$  . Da sie zeitlich konstant ist, gilt  $E'_{ges}(t) = mgl \cdot \sin \phi(t) \cdot \dot{\phi}(t) + m l^2 \dot{\phi}(t) \cdot \ddot{\phi}(t) = 0 \Rightarrow \ddot{\phi}(t) = -g \sin \phi(t)$  .

Setzt man  $\dot{\phi}(t) =: \omega(t)$  erhält man die gekoppelten DGen:

$$\dot{\phi}(t) =: \omega(t)$$

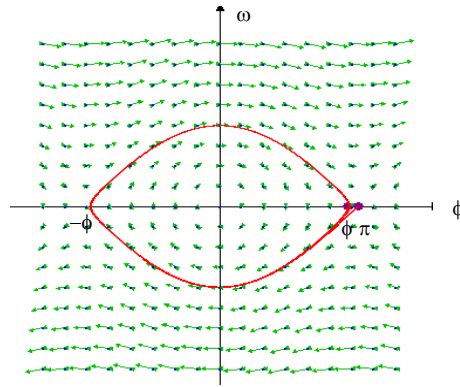
$$\dot{\omega}(t) = -g \sin \phi(t)$$

Das Phasendiagramm:



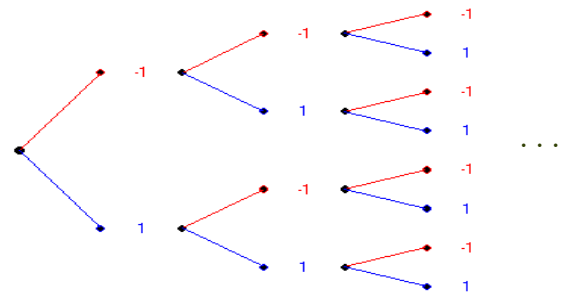
Die grünen Pfeile stellen das Vektorfeld des Flusses dar.

Der Graph der Funktion  $-g \sin(\phi)$  ist die  $\omega$ -Nullkline. Die vertikale Achse ist die  $\phi$ -Nullkline. Ihr Schnittpunkt  $(0,0)$  ist der stabile Gleichgewichtspunkt. Das Pendel ist in Ruhe. Im Winkel  $\phi = \pi$  steht das Pendel Kopf, es befindet sich im labilen Gleichgewicht. Eine kleine Abweichung nach unten, etwa  $\phi = 170^\circ$  (im Graph von  $\pi$  aus leicht nach links) und das Pendel (der Zustand  $(\phi, \omega)$ ) tritt in einen Zyklus ein. Das Pendel pendelt zwischen  $\phi$  und  $-\phi$  :



**Diskrete** dynamische Systeme bestehen meist aus endlich vielen Zuständen.

**Beispiel 1:** Münzwurf. Die Werte der einzigen Zustandsgröße  $s$  Symbol der oben liegenden Seite sind Kopf und Zahl oder  $-1$  und  $1$ . Zur Beschreibung der Dynamik gibt es hier natürlich keine Differenzialgleichungen. Das „Gesetz“ ist der Zufall, der die möglichen Trajektorien bestimmt.

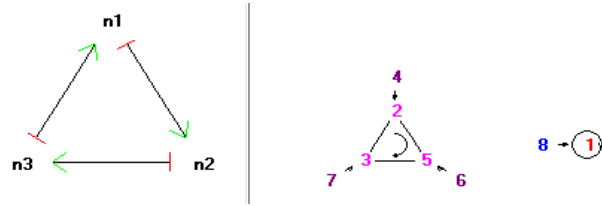


Der Zustandsraum ist hier  $\{-1, 1\}$ .

**Beispiel 2:** Bedürfniskonstellationen. Einem Bedürfnis werden bspw. Werte  $0$  und  $1$  zugeordnet. Ist das Bedürfnis  $n$  befriedigt, so ist  $s(n)=1$ , sonst  $s(n)=0$ . Natürlich können die Befriedigungswerte auch differenzierter sein, etwa reelle Zahlen im Intervall  $[-1, 1]$ .  $-1$  wäre dann der Wert, der beschreibt, dass es sehr frustriert ist,  $0$  das es nicht befriedigt ist, aber nicht unbedingt frustriert und  $1$ , dass es voll befriedigt ist. Die Werte dazwischen geben die graduelle Befriedigung bzw. Frustration an. Das soll hier aber nicht betrachtet werden.

Sinnvoll ist, mehrere Bedürfnisse zu betrachten, die miteinander in Beziehung stehen und einander beeinflussen. Hier wären drei Werte von Interesse: Hindert die Befriedigung des Bedürfnisses  $n_1$  die Befriedigung des Bedürfnisses  $n_2$ , so kann der Beziehung der Wert  $-1$  zugesprochen werden, in Zeichen etwa  $n_2 \vdash n_1$ , fördert  $n_1$  die Befriedigung von  $n_2$  so wird man  $n_1 \rightarrow n_2$  schreiben mit dem Wert  $1$ , sind sie neutral gegeneinander, Wert  $0$ , so nur einen Strich  $n_1 - n_2$  oder kein Zeichen. Die Anzahl der Bedürfnisse entspricht den Freiheitsgraden. Bei drei Bedürfnissen, also drei Freiheitsgraden besteht der Zustandsvektor auch drei Zahlen, den jeweiligen Befriedigungswerten. Die Beziehungen der drei Bedürfnisse zueinander bestimmt ihre Dynamik. Dabei werden die Einflüsse arithmetisch verrechnet und ein Schwellwert gesetzt. Ab  $0,5$  wird aufgerundet, sonst auf Null abgerundet. Anschließend werden die Werte auf  $1$  genormt, sollte der Wert größer als  $1$  sein.

Etwa:



Links ist das Strukturdiagramm angegeben.  $n_1$  fördert  $n_2$  und hindert  $n_3$ .

$n_2$  hindert  $n_1$  und fördert  $n_3$  und  $n_3$  wiederum hindert  $n_2$  und fördert  $n_1$ . Das kann in einer (antisymmetrischen) Strukturmatrix zusammengefasst werden:  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Auf der rechten Seite ist die Dynamik im Flußdiagramm oder Dynamikdiagramm veranschaulicht. Dabei chiffrieren die Zahlen die acht verschiedenen Zustände:

$$1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei 1 ist kein Bedürfnis befriedigt, bei 2 ist das dritte Bedürfnis befriedigt, usw.

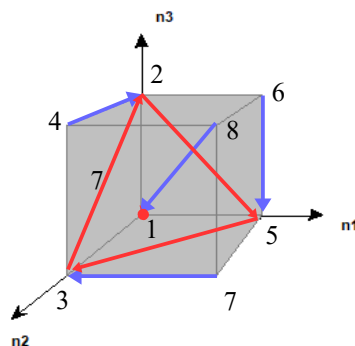
Wendet man nun die Matrix S bspw. auf den Zustand 4 an, so ergibt das:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und nach Normierung } = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ also Zustandvektor mit der Chiffre}$$

2. Im rechten Diagramm geht 4 in 2 über.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ genormt ist das } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5. \text{ Der Zustand 2 geht in den Zustand 5}$$

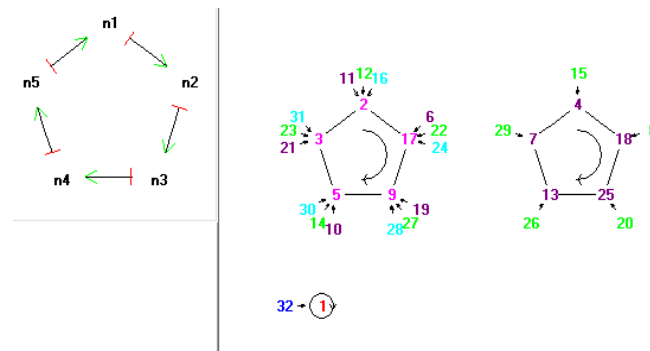
über. Dann 5 in 3 und 3 wieder in 2. Wir haben hier also den **Grenzyklus**  $\langle 2, 5, 3 \rangle$ . Der Zustand 1 ist ein Gleichgewichtspunkt, ein 1-Zyklus oder ein **Fixpunkt**.



Die Trajektorien sind am Würfel ablesbar oder natürlich auch schon im oberen rechten Flußdiagramm. Das Verlaufsgesetz ist durch die Struktur-Matrix S gegeben, die die Stelle der DGen

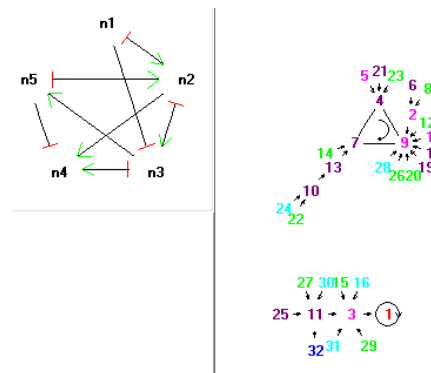
einnimmt.

Werden die Freiheitsgrade größer, also die Anzahl der Bedürfnisse, so werden natürlich auch die Flußdiagramme komplexer, wie folgendes Beispiel noch veranschaulichen soll:



Hier hat man 2 5-Grenzzyklen mit Einzugsgebieten und einen Fixpunkt.

Oder eine etwas kompliziertere Struktur:



Das dynamische System hat die Dimension (Freiheitsgrade) 5 und  $32=2^5$  Zustände und einen 3-Grenzzyklus und einen Fixpunkt mit etwas größeren Einzugsgebieten.

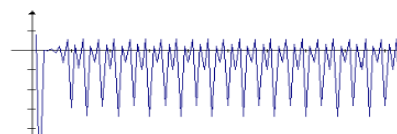
Ein besonders interessanter Fall von dynamischen Systemen ist die **quantitative interne Bedürfnisdifferenzierung**. Sie ist nicht wie üblich durch Interaktion und Begriffsbildung (oder Objektbildung) erzeugt, sondern wird durch quantitative Bereiche generiert. Hierbei hat man einen **Übergang von diskreten zu quasi kontinuierlichen** „verschmierten“ Zuständen. Die Freiheitsgrade werden dabei sich auch verändern.

Man betrachtet dazu zwei Funktionen, eine die die Bedürfnisstärke eines konkret gedachten Bedürfnisses auf die Befriedigungsstärke abbildet und eine zweite Funktion, die der Befriedigungsstärke wiederum die Bedürfnisstärke zuordnet. Man verknüpft dann beide Funktionen durch Komposition zu einer einzigen und iteriert diese. Diese Folge stellt dann die Entwicklung des Bedürfnisses dar.

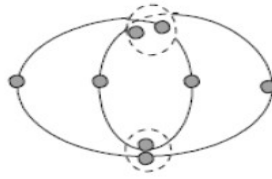
Die Komposition einer männlichen 25 jährigen VP ergab folgendes Gesetz (Rekursion):

$$n_{t+1} = 1 - (n_t \cdot e^{n_t} + 1)^2$$

Das Iterationsdiagramm hiervon ist recht interessant:



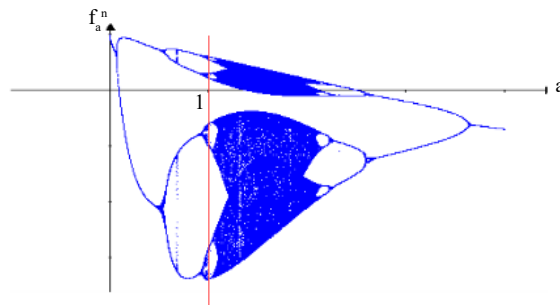
Wir haben hier einen Grenzyklus von 8 Werten in der Reihenfolge 0,55; -0,61; 0,22; -3,39; 0,6; -1; 0,3 und -2,85, wobei zwei Wertepaare (0,6|0,55) und (0,3|0,22) jeweils sehr nahe beieinander liegen.



Interpretiert man Werte mit genügend großer Differenz als verschiedene Bedürfnisartikulationen, so lägen hier nur sechs verschiedene Varianten vor. Da jedoch "die" Variante (0,6|0,55) verschiedene Nachfolger hat, wäre die Person gezwungen, auch diese Variante zu differenzieren, was bei so nahe beieinander liegenden Werten sehr genauer Beobachtung bedarf.

Darüber hinaus ist das Iterationsdiagramm insensibel gegenüber einer Variation der Anfangswerte, es pendelt sich sehr schnell immer wieder auf die charakteristischen Werte ein. Diese Eigenschaften der ausgeprägten Wahrnehmungspräzision gekoppelt mit der relativen Gleichgültigkeit äußerer Variationen gegenüber dem System ist für gewisse psychische Krankheitsbilder (bipolare Störung etwa) charakteristisch.

Verallgemeinert man die Rekursion zu folgender Schar  $f_a = 1 - a \cdot (x e^x + 1)^2$  so erhält man im Intervall  $[0,4]$  folgendes Bifurkationsdiagramm:



Für den Wert  $a=1$  kann man im vertikalen Schnitt genau die obigen 8 Werte ablesen. Dieses Diagramm läßt sich als potentielles Entwicklungsdiagramm interpretieren.

Vergrößert man  $a$  leicht, so entwickelt sich das System in einer Bifurkationskaskade, in der der Grenzyklus in immer kürzeren Zeiteinheiten exponentiell wächst, zum sogenannten chaotischen Attraktor. Das bedeutet eine bedürfnismäßige totale Desorientierung, Verwirrung, die bspw. in schizophrenen Schüben vorkommen. Bemerkenswerterweise wird aber bei weiterer Zunahme des Parameters  $a$  diese chaotische Situation wieder rückgängig werden, wie man dem Diagramm entnehmen kann.

Auch das könnten Anhaltspunkte dafür sein, dass auf diese Weise eventuell psychische Krisen mathematisch analysierbar sind.