Lagrangians and Hamiltonians, Übungen zu P. Hamill

Manfred Hörz

1. Grundlegende Begriffe

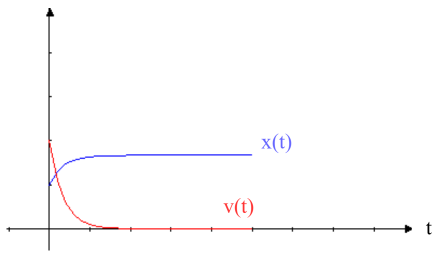
E 1.1 (Seite 5): Anfangsgeschwindigkeit v_0 und dann wird es beschleunigt zu $a=-bv$, wobei b konstant ist und v die Geschwindigkeit:

Lösung: $\ddot{x}(t)=-b\dot{x}(t)\Rightarrow\frac{\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)}=-b\Rightarrow\int\frac{\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)}dt=\int -b\,dt+c\Rightarrow\ln|\dot{x}(t)|=-bt+c\Rightarrow$

$|\dot{x}(t)|=e^{-bt+c}\Rightarrow\dot{x}(t)=Ae^{-bt}$ $\quad v_0=\dot{x}(0)=A\Rightarrow\dot{x}(t)=v_0e^{-bt}\Rightarrow\int_0^t\dot{x}(\tau)d\tau=v_0\int_0^t e^{-b\tau}d\tau\Rightarrow$

$x(t)-x(0)=\frac{-v_0}{b}e^{-b\tau}|_0^t\Rightarrow x(t)=x_0+\frac{v_0}{b}(1-e^{-bt})$ und $v(t)=v_0e^{-bt}$.

Mit $v_0=2;\ b=3$:



E 1.2 Ein Körper der Masse m hat die Beschleunigung $a=-\frac{k}{m}x$

a) Wie lautet die Bewegungsgleichung?
b) Löse die Bewegungsgleichung.
c) Bestimme die Werte der Integrationskonstanten, wenn der Körper aus der Ruhelage bei x = A bewegt wird.

Lösung:

a) $\ddot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=0$ Gewöhnliche homogene lineare DG 2. Ordnung

b) Die charakeristische Gleichung lautet $r^2+a_0=0$ oder $r^2+\frac{k}{m}=0$ für den Lösungsansatz $x(t)=e^{rt}$. $r_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ mit den Basislösungen $e^{\pm iwt}$, $w=\sqrt{\frac{k}{m}}$ und der allgemeinen Lösung $x(t)=c_1e^{iwt}+c_2e^{-iwt}$ oder über die Eulersche Formel $e^{\pm it}=\cos t\pm i\sin t$. $\frac{1}{2}$ die Summe der Basislösungen:
$\frac{1}{2}(e^{iwt}+e^{-iwt})=\frac{1}{2}(\cos wt+i\sin wt+\cos(-wt)+i\sin(-wt))=\cos wt$ und $-\frac{1}{2}i$ die Differenz der Basislösungen: $\frac{-i}{2}(e^{iwt}-e^{-iwt})=\frac{-i}{2}(\cos wt+i\sin wt-\cos(-wt)-i\sin(-wt))=\sin wt$ sind wieder Basislösungen in reeller Form und damit die allgemeine Lösung: $a_1\cos wt+a_2\sin wt$.

Also $x(t)=a_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+a_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

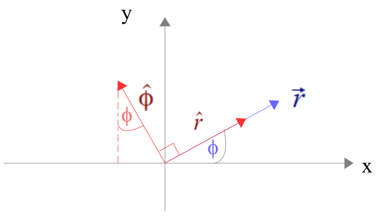
c) $x(0)=A \Rightarrow x(t)=A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+a_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

$v(t)=-A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+a_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \qquad 0=v(0)=a_2\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow a_2=0$

$\Rightarrow x(t)=A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$

E 1.3 In ebenen Polarkoordinaten ist der Ort durch $\boldsymbol{r}=r\,\hat{\boldsymbol{r}}$ gegeben. Gesucht sind Darstellungen für die Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten $r,\phi,\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

Lösung: Die Einheitsvektoren bzgl. der ebenen Polarkoordinaten sind definitionsgemäß:



$\hat{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{e}_r$ Einheitsvektor von $\vec r$, also $\vec r=r\,\hat{\boldsymbol{r}}=r\,\boldsymbol{e}_r$
$\hat{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{e}_\phi$ orthogonaler Einheitsvektor dazu (sozusagen von ϕ)

$\boldsymbol{e}_r=(\cos\phi,\sin\phi) \qquad \boldsymbol{e}_\phi=(-\sin\phi,\cos\phi)$

$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot\phi(-\sin\phi,\cos\phi)=\dot\phi\,\boldsymbol{e}_\phi$ und $\dot{\boldsymbol{e}}_\phi=\dot\phi(-\cos\phi,-\sin\phi)=-\dot\phi\,\boldsymbol{e}_r$

Geschwindigkeit: $\vec v=\dot{\vec r}=\frac{d\,r\,\boldsymbol{e}_r}{dt}=\dot r\,\boldsymbol{e}_r+r\,\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot r\,\boldsymbol{e}_r+r\,\dot\phi\,\boldsymbol{e}_\phi=\vec v_r+\vec v_\phi$

mit den Skalaren $v_r=\dot r$ und $v_\phi=r\,\dot\phi$ oder $\vec v=\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}\dot r\\ r\,\dot\phi\end{pmatrix}$

Beschleunigung: $\vec a=\dot{\vec v}=\frac{d(\dot r\,\boldsymbol{e}_r+r\,\dot{\boldsymbol{e}}_r)}{dt}=\ddot r\,\boldsymbol{e}_r+\dot r\,\dot{\boldsymbol{e}}_r+\dot r\,\dot{\boldsymbol{e}}_r+r\,\ddot{\boldsymbol{e}}_r=\ddot r\,\boldsymbol{e}_r+2\,\dot r\,\dot\phi\,\boldsymbol{e}_\phi+r\frac{d(\dot\phi\,\boldsymbol{e}_\phi)}{dt}=$

$=\ddot r\,\boldsymbol{e}_r+2\,\dot r\,\dot\phi\,\boldsymbol{e}_\phi+r\,\ddot\phi\,\boldsymbol{e}_\phi+r\,\dot\phi\,\dot{\boldsymbol{e}}_\phi=\ddot r\,\boldsymbol{e}_r+2\,\dot r\,\dot\phi\,\boldsymbol{e}_\phi+r\,\ddot\phi\,\boldsymbol{e}_\phi-r\,\dot\phi^2\,\boldsymbol{e}_r\Rightarrow$

$\vec a=(\ddot r-r\,\dot\phi^2)\,\boldsymbol{e}_r+(2\,\dot r\,\dot\phi+r\,\ddot\phi)\,\boldsymbol{e}_\phi=\vec a_r+\vec a_\phi$

mit den Skalaren $a_r=\ddot r-r\,\dot\phi^2$ und $a_\phi=r\,\ddot\phi+2\,\dot r\,\dot\phi$ oder $\vec a=\ddot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}\ddot r-r\,\dot\phi^2\\ r\,\ddot\phi+2\,\dot r\,\dot\phi\end{pmatrix}$

Bemerkungen: Es gibt mehrere Möglichkeiten im 3D die Koordinaten eines Punktes zu bestimmen, die kartesischen (x,y,z), die zylindrischen (ρ,ϕ,z) oder die sphärischen (r,θ,ϕ), die bei spezifischen Problemen unterschiedlich gut geeignet sind. Aber es sind jeweils drei Koordinaten im 3D notwendig und hinreichend. Um alle Darstellungsmöglichkeiten von Koordinatensystemen begrifflich zusammenzufassen, prägt man das Konzept der **generalisierten Koordinaten** (q_1,q_2,q_3). Für 2 Teilchen hätte man dann ein 6-Tupel $(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)$ wobei die ersten drei Zahlen die generaliserten Koordinaten des ersten Teilchens, die drei nächsten die des zweiten Teilchens beschreiben. Für N Teilchen hat man dann ein 3N-Tupel $(q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{3N})$. Die entsprechenden Geschwindigkeiten bezeichnet man dann mit $\dot q_i$ und die Beschleunigungen mit $\ddot q_i$. In der obigen Übung eines Teilchens im 2D wäre

$(q_1, q_2) \mapsto (r, \phi)$ und $(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \mapsto (\dot{r}, r\dot{\phi})$ und (Vorsicht!) *nicht* $(\dot{r}, \dot{\phi})$ und $(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2) \mapsto (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2, r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})$ die Darstellung in Polarkoordinaten. In physikalischer Manier wird die Darstellung $q_1 = q_1(r, \phi, t)$ und $q_2 = q_2(r, \phi, t)$ (mit zusätzlichem Zeitparameter) angeben. Dadurch wird aber zum Ausdruck gebracht, dass q_1 nicht einfach r ist, sondern von r *und* ϕ (und normalerweise in der Physik von t) abhängt, ebenso natürlich q_2 .

Allgemein schreibt man die Transformationsgleichungen in physikalischer Manier von kartesischen in generalisierte Koordinaten als $\begin{matrix} q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t) \\ q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t) \\ \vdots \\ q_n = q_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t) \end{matrix}$, wobei wie üblich die q_i einmal (links) als Variable und einmal (rechts) als Funktionsname auftaucht.

Die inverse Transformation von generalisierten in kartesische Koordinaten hat dann die Form

$\begin{matrix} x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t) \\ x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t) \end{matrix}$, wobei beidesmal im 3D $n = 3\mathrm{N}$ für n Teilchen ist.

Ein hinreichendes Kriterium für die Möglichkeit einer inversen Transformation ist, dass die Funktionaldeterminante (Determinante der Jacobi-Matrix J) nicht Null ist.

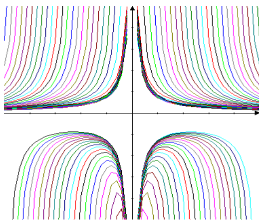
Die Jacobi-Matrix $J_{K_x}^{K_y}$ der Transformation der Koordinaten $K_x = (x_1, \ldots, x_n)$ in die Koordinaten $K_y = (y_1, \ldots, y_n)$ lautet $J_{\substack{\uparrow \\ K_x}}^{K_y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

Beispiel von oben:
Die Transformationsgleichungen von den ebenen Polarkoordinaten in kartesische lauten

$\begin{matrix} x_1 = x_1(r, \phi) = r\cos\phi \\ x_2 = x_2(r, \phi) = r\sin\phi \end{matrix}$ und die inversen $\begin{matrix} r = r(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \phi = \phi(x_1, x_2) = atn(\frac{x_2}{x_1}) \end{matrix}$

Die Jacobi-Matrix J von (x_1, x_2) nach (r, ϕ) : $\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{-x_2}{x_1^2 + x_1 x_2} & \frac{1}{x_1 + x_2} \end{pmatrix}$, deren Determinante $det\, J = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{(x_1 + x_2) x_1}$ ist nicht definiert für $x_2 = -x_1$ oder $x_1 = 0$. Sie ist ungleich

Null im Definitionsbereich, wenn der Punkt (x_1, x_2) nicht im Ursprung liegt.



det J nach x_2 parametrisiert

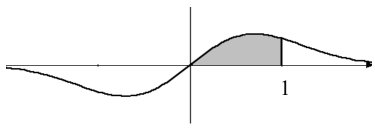
Die **Substitutionsregel für Integrale** lautet:

Ist $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g: [a, b] \to I$ stetig differenzierbar, also aus C^1, dann gilt: $\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy$

Beweis: da f stetig, besitzt f Stammfunktion $F: I \to \mathbb{R}$. Nach der Kettenregel der DR gilt $(F(g(x)))' = f(g(x))\, g'(x)$, also gilt

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = [F(g(x))]_{x=a}^{x=b} = F(g(b)) - F(g(a)) = [F(y)]_{y=g(a)}^{y=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy \quad .$$

Beispiel: $\int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x\, e^{-x^2}\, dx \overset{y=g(x)=-x^2}{=} -\frac{1}{2} \int_0^{-1} e^y\, dy = \frac{1}{2} [e^y]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e}) \approx 0{,}32$



Eine Verallgemeinerung dieser Regel für Funktionen mit mehreren Variablen ist der

Transformationssatz:

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen undeine Funktion, $g: U \to V; x \mapsto g(x) = y$ $(V = g(U))$ ein Diffeomorphismus, J_g die Jacobimatrix von g und $f: V \to \mathbb{R}; y \mapsto f(y)$ eine Funktion. f ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion $f \circ g\, |det\, J_g|$ über U differenzierbar ist. Dann gilt:

$$\int_U f(g(x))\, |det\, J_g|\, d^n x = \int_V f(y)\, d^n y$$

Zusatz: Falls $f(y) \equiv 1$, so ist $\int_{g(U)} 1\, d^n y = vol(g(U))$ das Volumen des Gebiets $g(U)$.
Ist g affin, also $g(x) = A x + b$, so ist $J_g = A$ unabhängig von x [1]. Die linke Seite ist dann $\int_U |det\, J_g|\, d^n x = |det\, J_g| \int_U d^n x = |det\, J_g|\, vol(U)$. Insgesamt hat man dann $vol(g(U)) = |det\, J_g|\, vol(U)$. Ist $g(U)$ ein infinitesimaler Quader mit dem Volumenelement $dx\, dy\, dz$ und ebenso näherungsweise U mit dem Volumenelement $dr\, d\theta\, d\phi$, so ist

$$dx\, dy\, dz = |det\, J_g|\, dr\, d\theta\, d\phi \quad (*)$$

Das gilt aber nicht nur für affine Abbildungen.

[1] Für $n=2$ sieht das folgendermaßen aus: $g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x_1,x_2) \\ g_2(x_1,x_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2\end{pmatrix} \qquad J_g=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=A$$

Bemerkung: Am einfachsten merkt man sich die Gleichung durch:
$y=g(x)$ und $d^n y=|\det J_g|\, d^n x$

Beispiel 1: Das obige Beispiel $n=1$. $f: V=[-1,0]\to\mathbb{R}\,;\, f(y)=e^y$
$g: U=[0,1]\to[-1,0]\,;\, g(x)=-x^2$ $\quad \det J_g=-2x$.

Beispiel 2: Transformation ebene Polarkoordinaten in kartesische.

$g:\mathbb{R}^+\times[0,2\pi[\to\mathbb{R}^2;(r,\phi)\mapsto g((r,\phi))=(r\cos\phi, r\sin\phi)$ Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ Funktion.

$$J_g=\begin{pmatrix} \frac{\partial r\cos\phi}{\partial r} & \frac{\partial r\cos\phi}{\partial\phi} \\ \frac{\partial r\sin\phi}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\phi}{\partial\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi\end{pmatrix} \qquad \det J_g=r\cos^2\phi+r\sin^2\phi=r$$. Also

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\,dr\,d\phi \quad .$$

E 1.4 Aufstellen der Transformationsgleichungen von kartesischen Koordinaten in sphärische. Berechne die Jacobi-Determinante für diese Transformation. Welche Beziehung gilt für die Volumenelemente beider Systeme in Bezug auf die Jacobi-Determinante.

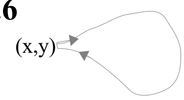
Lösung: $\begin{matrix} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{matrix}$ und $\begin{matrix} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta=acs\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \phi=atan2(y,x)\end{matrix}$ $\quad atan2(y,x)=\begin{cases} atn\left(\frac{y}{x}\right) & x>0 \\ sgn(y)\frac{\pi}{2} & x=0 \\ atn\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & x<0\wedge y\geq 0 \\ atn\left(\frac{y}{x}\right)-\pi & x<0\wedge y<0\end{cases}$

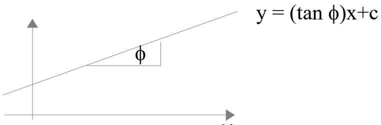
$$J_{\underset{r,\theta,\phi}{\uparrow}}^{x,y,z}=\begin{pmatrix} \frac{\partial r\sin\theta\cos\phi}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\theta\cos\phi}{\partial\theta} & \frac{\partial r\sin\theta\cos\phi}{\partial\phi} \\ \frac{\partial r\sin\theta\sin\phi}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\theta\sin\phi}{\partial\theta} & \frac{\partial r\sin\theta\sin\phi}{\partial\phi} \\ \frac{\partial r\cos\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\cos\theta}{\partial\theta} & \frac{\partial r\cos\theta}{\partial\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

$$\det J_{\underset{r,\theta,\phi}{\uparrow}}^{x,y,z}=r^2\sin^3\theta\cos^2\phi+r^2\sin^3\theta\sin^2\phi+r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi+r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi=$$
$$=r^2\sin\theta(\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta\cos^2\phi+\cos^2\theta\sin^2\phi)=$$
$$=r^2\sin\theta(\sin^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi))=r^2\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=r^2\sin\theta$$, also

$det\, J^{x,y,z}_{\uparrow\, r,\theta,\phi} = r^2 \sin\theta$. Mit (*) folgt $\Rightarrow dx\, dy\, dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

E 1.6

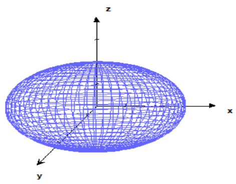




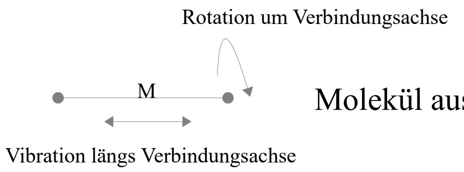
$(x,y) \rightarrow \tan\phi = \frac{y}{x}$ $\quad (\tan\phi)x - y + c = 0$.

Die Zwangsbedingung „gerade Linie“ ist also holonomisch und skleronomisch. Jedem Punkt ist eindeutiger Winkel zugeordnet. Die Zuordnung Punkt Winkel ist aber *keine* Eins-zu-Eins-Zuordnung, da jedem Punkt der gleiche Winkel entspricht.

E 1.7 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, also holonomische (und skleronomische) Zwangsbedingung.



E 1.8



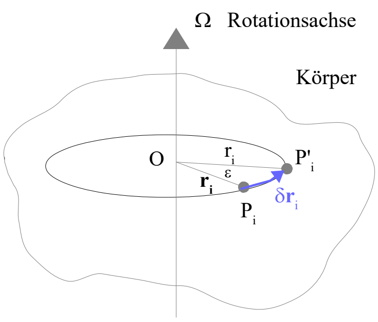
Molekül aus zwei Atomen.

1 Vibration längs Verbindungsachse
1 Rotation um Verbindungsachse
3 Rotationen, je eine um die x,y,z-Achse
1 Rotation um ihren Mittelpunkt

Von den 3 Translationsbewegungen abgesehen, hat das Molekül also 6 Freiheitsgrade

E 1.9 Bei Zimmertemperatur ist die Vibration eines O_2 Molelüls eingefroren. Es hat demnach noch 5 Freiheitsgrade von den 3 Translationsbewegungen abgesehen.

Example 1.1



Sei P_i ein beliebiger Punkt des Körpers, der um eine beliebige Einheits-Achse $\mathbf{\Omega}$ um den infinitesimalen Winkel ϵ gedreht werde und dadurch den Punkt P_i zum Punkt P'_i bewegt. Die virtuelle Verschiebung sei $\delta \boldsymbol{r}_i$ von P_i nach P_i' : $\delta\boldsymbol{r}_i = \epsilon(\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{r}_i)$. Die virtuelle Arbeit, die durch eine Kraft $\boldsymbol{F}_i$, die auf P_i wirkt, ist dann

$$\delta W_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{F}_i \cdot (\epsilon \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_i) \overset{\text{Spatprodukt}}{=} \epsilon \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = \epsilon \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{M}_i$$, mit der Drehwirkung (Drehmoment) $\boldsymbol{M}_i$, das auf P_i wirkt. Die gesamte virtuelle Arbeit (sie soll Null sein, auf den Körper soll keine Änderung der Drehbewegung stattfinden) ist dann

$$0 = \delta W = \sum_i \epsilon \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{M}_i = \epsilon \boldsymbol{\Omega} \sum_i \boldsymbol{M}_i = \epsilon \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{M}_{gesamt}$$. Da aber $\boldsymbol{\Omega}$ beliebig war, kann das Skalarprodukt nur Null sein, wenn $\boldsymbol{M}_{gesamt} = \boldsymbol{0}$.

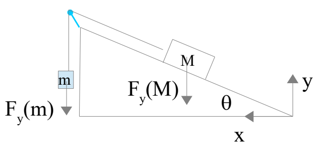
E 1.10 Man betrachte ein System aus vier Partikeln, das in kartesischen Koordinaten beschrieben sei. Was ist F_{10} ?

Lösung: Die Konfiguration ist: $(x_1, x_2, x_3,\ x_4, x_5, x_6,\ x_7, x_8, x_9,\ x_{10}, x_{11}, x_{12})$. Die Kraft F_{10} wirkt in x-Richtung auf das 4. Teilchen.

E 1.11 Auf ein Teilchen wirkt die Kraft mit den Komponenten F_x und F_y . Bestimme die generaliserte Kraft in Polarkoordinaten.

Lösung: $Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r}$ $Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta}$ mit $x = r \cdot \cos\theta$ und $y = r \cdot \sin\theta$,
also $Q_r = F_x \cdot \cos\theta + F_y \cdot \sin\theta$ und $Q_\theta = -F_x \cdot r \cdot \sin\theta + F_y \cdot r \cdot \cos\theta$.

E 1.12



Die beiden Blöcke seien im Gleichgewicht. Die Schnur sei inelastisch und es gebe keine Reibung. Zeige durch Bestimmung der virtuellen Arbeit, dass das Gleichgewicht $M = \frac{m}{\sin\theta}$ erfordert.

Lösung: Das KS sei an der y-Achse gespiegelt. $F_y(M) = -M \cdot g$, $F_x(M) = 0$, $F_y(m) = -m \cdot g$ $F_x(m) = 0$. Die Konfiguration sei $(r_1, \theta, r_2, \theta_2)$. $\theta_2 = 0$ o.B.d.A.

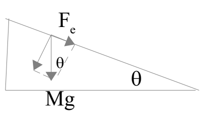
$$Q_{r_1} = -Mg\sin\theta \ , \quad Q_\theta = -Mg\, r_1 \cos\theta \quad Q_{r_2} = -mg \cdot 0 = 0 \quad Q_{\theta_2} = -mg\, r_2 \ .$$

Sei nun δ_{r_1} gegeben, dann ist $\delta_{\theta_2} = \tan\frac{\delta_{r_1}}{r_2}$ und $\delta_\theta = 0$.

Also ist $0 = \delta W = Q_{r_1}\delta_{r_1} + Q_\theta \delta_\theta + Q_{r_2}\delta_{r_2} + Q_{\theta_2}\delta_{\theta_2} = -Mg\sin\theta\,\delta_{r_1} + 0 + 0 - mg\, r_2 \tan\frac{\delta_{r_1}}{r_2}$

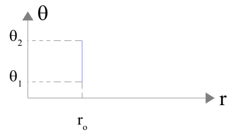
$\Rightarrow M \sin\theta\, \delta_{r_1} = m r_2 \tan\frac{\delta_{r_1}}{r_2} \Rightarrow M \sin\theta \frac{\delta_{r_1}}{r_2} = m \tan\frac{\delta_{r_1}}{r_2}$. Für sehr kleine x wie es für $\frac{\delta_{r_1}}{r_2}$ der Fall ist, ist $\tan x = x$, also haben wir $M \sin\theta = m \Rightarrow M = \frac{m}{\sin\theta}$.

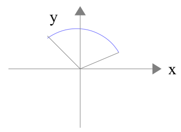
Elementar wäre die Lösung folgendermaßen: Die auf der schiefen Ebene nach unten ziehende Kraft $\boldsymbol{F}_e$ ist:



$$F_e = Mg \sin\theta \qquad F_e \overset{!}{=} mg \qquad \Rightarrow Mg\sin\theta = mg \Rightarrow M\sin\theta = m \quad .$$

E 1.13 Ein Teilchen bewege sich auf einer Linie mit konstantem r von θ_1 nach θ_2 . Zeige, dass die Linie eine Gerade im $r,\theta-$Raum ist, nicht aber im $x,y-$Raum .

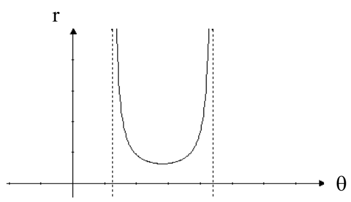
Lösung: 



$$r(t) = r_0 \quad , \quad \theta(t) = (\theta_2 - \theta_1)\cdot t + \theta_1 \qquad 0 \le t \le 1 \quad .$$
$$x(t) = r(t)\cdot\cos\theta(t)$$
$$y(t) = r(t)\cdot\sin\theta(t) \qquad x^2(t)+y^2(t) = r^2(t) = r_0^2$$
Im x,y-KS handelt es sich um einen Kreisbogen mit Radius r_0 von θ_1 bis θ_2 .

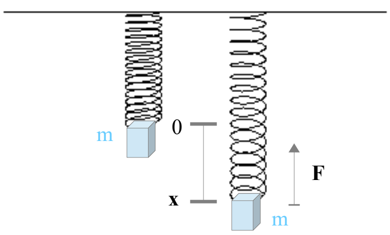
E 1.14 Die Gleichung $y = 3x+2$ ist im $x,y-$Raum eine gerade Linie. Welche Form hat die Kurve im $r,\theta-$Raum ?

Lösung: $x = r\cos\theta \, ; \, y = r\sin\theta$



$$3x+2 = r\sin\theta$$
$$3r\cos\theta + 2 = r\sin\theta$$
$$r(\sin\theta - 3\cos\theta) = 2$$
$$r = \frac{2}{\sin\theta - 3\cos\theta}$$
oder $\theta = acs\left(\frac{-3 \pm \sqrt{2{,}5\,r^2 - 1}}{5r}\right)$

Beispiel 1.1 für die Bewegungsgleichung des Federpendels



Eine Feder habe die Federkonstante k. Man hängt ein Gewicht der Masse m an das untere Ende der Feder. Zieht man die Feder samt Masse um x Einheiten nach unten, so wirkt die Spannkraft $\boldsymbol{F}$ zurück, die proportional zur Auslenkung x ist: $\boldsymbol{F} = -k\,\boldsymbol{x}$.

1. Nach der klassischen Mechanik (2. Gesetz von Newton) gilt folgende Gleichung $m\ddot{x} = \boldsymbol{F}$

also $m\ddot{\boldsymbol{x}} = -k\,\boldsymbol{x}$ oder genauer $m\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = -k\,\boldsymbol{x}(t) \qquad t \in I = [t_1, t_2]$. Löst man diese lineare DG 2.

Ordnung nach $\boldsymbol{x}(t)=x(t)$ auf, so erhält man $x(t)=a_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+a_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$. Mit den Randbedingungen $x(0)=0$ und $\dot{x}(0)=1$ erhält man die Schwingung $x(t)=\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$

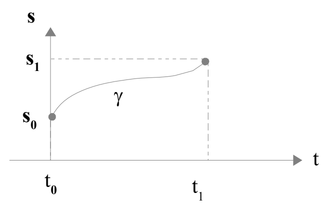
2. Nach der analytischen Mechanik (Euler-Lagrange) ist die Lagrangefunktion $L=T-V$ mit $T=\frac{1}{2}m\,\dot{x}(t)^2$ und $V=\frac{1}{2}k\,x(t)^2$ $L=\frac{1}{2}m\,\dot{x}(t)^2-\frac{1}{2}k\,x(t)^2$. Denn die potentielle Energie V berechnet sich über die Arbeit, die die Feder durch die Auslenkung geleistet hat: $V=\int\limits_0^{x(t)}F(\xi)d\xi=\int\limits_0^{x(t)}k\,\xi\,d\xi=\frac{1}{2}k\,x(t)^2$.

   Die Lagrangefunktion ist also abhängig von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$.

3. Die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$ ist das Herzstück der analytischen Mechanik.
   Setzt man unser L hierin ein, erhält man:
   $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{x}}(\frac{1}{2}m\,\dot{x}(t)^2-\frac{1}{2}k\,x(t)^2)-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}m\,\dot{x}(t)^2-\frac{1}{2}k\,x(t)^2)=0$
   $\frac{d}{dt}(m\,\dot{x}(t))\;+\;kx(t)=m\,\ddot{x}(t)+kx(t)=0$ wie oben.

Bemerkung: Die kinetische Energie.

Herleitung: Ein Körper der Masse m werde durch die Kraft $\boldsymbol{F}$ aus der Ruhelage heraus $\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{0}$ entlang des Weges $\gamma: t\mapsto\boldsymbol{s}(t)$ $t\in[0,1]$ beschleunigt.



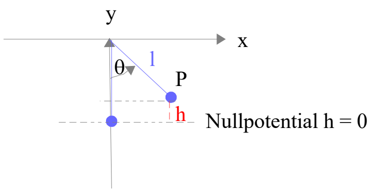
Die dabei verrichtete Arbeit W ist:

$$W_{s(0)\to s(1)}=\int\limits_\gamma\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}=\int\limits_\gamma m\,\boldsymbol{a}\;\cdot d\,\boldsymbol{s}=m\int\limits_\gamma\boldsymbol{a}\;\cdot d\,\boldsymbol{s}\underset{d\,s=\boldsymbol{v}dt}{=}m\int\limits_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{a}\;\cdot\boldsymbol{v}\,dt\underset{\boldsymbol{a}\,dt=d\,\boldsymbol{v}}{=}m\int\limits_{v_0}^{v_1}\boldsymbol{v}\;\cdot d\,\boldsymbol{v}=m\int\limits_{v_0}^{v_1}v\,dv=$$
$$=m\frac{1}{2}v^2|_{v_0}^{v_1}=\frac{1}{2}m\,v_1^2\quad\text{da}\quad v_0=0\;.$$

Also ist die kinetische Energie, die er mit der Geschwindigkeit $v_1=|\boldsymbol{v}_1|$ oder einfacher $v=|\boldsymbol{v}|$ erreicht hat $T=\frac{1}{2}m\,\boldsymbol{v}^2$. Mit $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}$ gilt dann $T=\frac{1}{2}m\,\dot{\boldsymbol{x}}^2$ oder mit $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix}$

in kartesischen Koordinaten: $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$.

Beispiel: Ein Pendel der Länge l mit der anhängenden Masse m.



Die kartesischen Koordinaten von P sind: $\boldsymbol{x}=(l\sin\theta, -l\cos\theta)$
und $\dot{\boldsymbol{x}}=(l\,\dot\theta\cos\theta, l\,\dot\theta\sin\theta)$ und $\dot{\boldsymbol{x}}^2=l^2\dot\theta^2\cos^2\theta+l^2\dot\theta^2\sin^2\theta=l^2\dot\theta^2$

Die potentielle Energie ist im Punkt $(0,-l)$ gleich Null, maximal ist sie bei den Umkehrpunkten der Schwingung. Die Potentielle Energie ist $V=mgh$. $h=l-|y|=l-l\cos\theta$, so ergibt sich $V=mgl(1-\cos\theta)$

Die kinetische Energie ist $T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\,\dot{\boldsymbol{x}}^2=\frac{1}{2}m\,l^2\dot\theta^2$.

Die Lagrangefunktion hat also folgende Gestalt $L=T-V=\frac{1}{2}m\,l^2\dot\theta^2-mgl(1-\cos\theta)$.

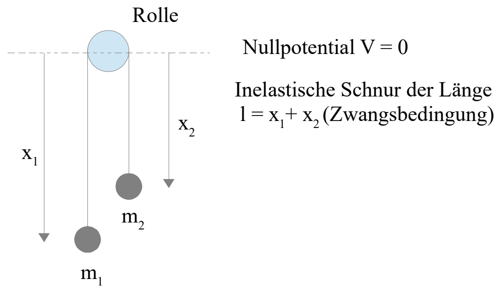
Sie hängt von den Variablen θ und $\dot\theta$ und natürlich indirekt von der Zeit t ab.

Drückt man die verschiedenen Möglichkeiten der Variablen x und $\dot x$ bzw. θ und $\dot\theta$ in generalisierten Koordinaten aus, so hat man bei einem Teilchen die Abhängigkeit von der Ortskoordinate q $(x$ bzw. $\theta)$ und der Geschwindigkeit $\dot q$ $(\dot x$ bzw. $\dot\theta)$. Also ist $L=L(q,\dot q)$ bzw. ausführlicher mit dem Zeitparameter $L=L(q,\dot q,t)$
Für N freie Teichen ohne Zwangsbedingungen im 3D gibt es N-mal drei Ortskoordinaten und genausoviele Geschwindigkeitskoordinaten, also hat man

$$L=L(q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{3N},\dot q_1,\dot q_2,\dot q_3,\ldots,\dot q_{3N},t) \quad \text{oder kürzer} \quad L=L(q_i,\dot q_i,t)\ ,\quad i=1,\ldots,3N$$

Folgende Beispiele leiten mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung weitere Bewegungsgleichungen, also Differentialgleichungen her.

Beispiel 1.2 Atwoods Maschine (ohne Reibung).



Die kinetische Energie der beiden Massen ist $T=\frac{1}{2}m_1\dot x_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot x_2^2$

Die potentielle Energie des Systems ist $V=m_1 g\,x_1+m_2 g\,x_2$

Da $x_2=l-x_1$ gilt $\dot x_2=-\dot x_1$ und $\dot x_2^{\,2}=\dot x_1^{\,2}$ und also:

$$L=T-V=\frac{1}{2}m_1\dot x_1^{\,2}+\frac{1}{2}m_2\dot x_1^{\,2}-g\,(m_1x_1+m_2x_2)=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot x_1^{\,2}-g\,((m_1-m_2)x_1+m_2l)$$

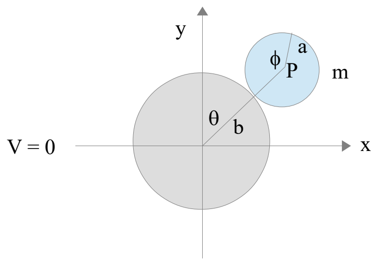
Die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot x}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot x}=(m_1+m_2)\dot x_1 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot x}=(m_1+m_2)\ddot x_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial x}=g\,(m_1-m_2)$$, also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=(m_1+m_2)\ddot{x}_1-g(m_1-m_2)=0\Rightarrow \ddot{x}_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$$

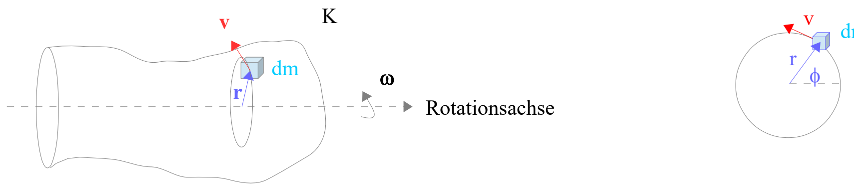
Das ergibt nach zweifacher Integration: $x_1(t)=\frac{1}{2}g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}t^2+c_1t+c_2$

Beispiel 1.3 Ein Zylinder vom Radius a und der Masse m rollt auf einem fest verankertem zweiten Zylinder mit Radius b ohne zu rutschen. Bestimme die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichung für die kurze Zeit bevor die Zylinder sich trennen.



Die Kinetische Energie T des kleineren Zylinders setzt sich aus zwei Formen zusammen, der Energie der Translation T_{trs} und der der Rotation T_{rot} .
Der Weg der Translation ist ein Viertel der Kreisbahn mit dem Radius $r=a+b$. Es gilt $P=\boldsymbol{x}=(x,y)=(r\sin\theta, r\cos\theta)$ und also $\dot{\boldsymbol{x}}=(r\dot{\theta}\cos\theta,-r\dot{\theta}\sin\theta)$ und also $\dot{\boldsymbol{x}}^2=r^2\dot{\theta}^2$ und damit $T_{trs}=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\theta}^2$.

Für die kinetische Energie der Rotation T_{rot} gilt allgmein:



dm sei ein infinitesimales Massenelement des starren Körpers K, das auf dem kleinen Kreis mit Radius $r=|\boldsymbol{r}|$ um die Rotationsachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\phi}}$ rotiert.

Die kinetische Energie des Massenelements dm ist $\frac{1}{2}dm\,v^2$. Der Ort $\boldsymbol{r}$ des Elements ist $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$ und die Kreisgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix} -r\dot{\phi}\sin\phi \\ r\dot{\phi}\cos\phi \end{pmatrix}$ und $v^2=\dot{\boldsymbol{r}}^2=r^2\dot{\phi}^2=r^2\omega^2$, also ist die kinetische Energie des Elements $\frac{1}{2}dm\,r^2\omega^2$. Integriert man nun über den gesamten Körper, so erhält man $E_{rot}=\int_V \frac{1}{2}r^2\omega^2\,dm=\frac{1}{2}\omega^2\int_V r^2\,dm$ mit $J=\int_V r^2\,dm$ dem Trägheitsmoment oder kurz $E_{rot}=\frac{1}{2}J\omega^2$ (in Analogie zu $\frac{1}{2}mv^2$). Da $\frac{dm}{dV}=\rho(\boldsymbol{r})$ lokale Massendichte ist kann das Integral umgeschrieben werden zu $E_{rot}=\frac{1}{2}\omega^2\int_V r^2\rho(\boldsymbol{r})\,dV$. Ist die Massenverteilung homogen $\rho(\boldsymbol{r})=\rho$, so lautet $E_{rot}=\frac{1}{2}\omega^2\left(\rho\int_V r^2\,dV\right)$ und $J=\rho\int_V r^2\,dV$.

Das Trägheitsmoment eines Zylinders mit Radius r ist: $dV = r\,dr\,d\phi\,dz$,

$$\int_V r^2\,dV = \int_V r^3\,dr\,d\phi\,dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r r^3\,dr\,d\phi\,dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r^4\,d\phi\,dz = \int_0^h 2\pi \frac{1}{4} r^4\,dh = 2\pi \frac{1}{4} r^4 h$$

$\rho = \frac{m}{V}$ und $V = \pi r^2 h$ also $J = \frac{m}{\pi r^2 h} \frac{1}{2} \pi r^4 h = \frac{1}{2} m r^2$. Damit ist die kinetische Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{4} m r^2 \omega^2$. Die gesamte kinetische Energie ist demnach $E_{kin} = \frac{1}{2} m (a+b)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\phi}^2$. Da neben der Zwangsbedingung $r = a+b$ die Bedingung $a\phi = b\theta$ (denn der abgefahrene Bogen ist beim großen Kreis $b\theta$ und beim kleinen $a\phi$)gilt und also $a^2 \dot{\phi}^2 = b^2 \dot{\theta}^2$ hat man $E_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 + 2\mathrm{ab} + \frac{3}{2} b^2)$

Die potentielle Energie $E_{pot} = mg\,h = mg(a+b)\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = mg(a+b)\cos\theta$

Die Lagrange-Funktion ist also $L = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 + 2\mathrm{ab} + \frac{3}{2} b^2) - mg(a+b)\cos\theta$.

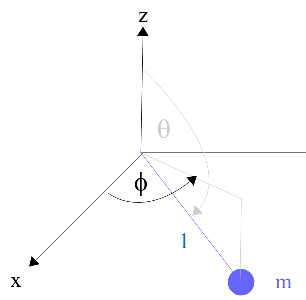
Die Euler-Lagrange-Gleichung ist $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ bzw. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ und davon ist

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}\left(m(a^2 + 2\mathrm{ab} + \frac{3}{2\mathrm{b}^2})\dot{\theta} \right) = m(a^2 + 2\mathrm{ab} + \frac{3}{2} b^2)\ddot{\theta}$ und

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(a+b)\sin\theta$ und

die Bewegungsgleichung ist $m(a^2 + 2\mathrm{ab} + \frac{3}{2} b^2)\ddot{\theta} = -mg(a+b)\sin\theta$.

Beispiel 1.5 Ein sphärisches Pendel bestehe aus einer Kugelmasse m, die an einem nicht dehnbaren Seil der Länge l hängt.



Bestimme die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichung.

Lösung: $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mg(z + l)$, bei $z = -l$ ist die potentielle Energie 0 und maximal bei $z = l$. Für die Koordinaten gilt: $x = l\sin\theta\cos\phi$, $y = l\sin\theta\sin\phi$ $z = l\cos\theta$ und demnach $\dot{x} = l(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\phi\sin\theta)$ und

$\dot{x}^2 = l^2(\dot{\theta}^2\cos^2\theta\cos^2\phi + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\phi - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi)$

$\dot{y} = l(\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)$ und

$\dot{y}^2=l^2(\dot{\theta}^2\cos^2\theta\sin^2\phi+\dot{\phi}^2\sin^2\theta\cos^2\phi+2\dot{\theta}\,\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi)$ und $\dot{z}=-l\,\dot{\theta}\sin\theta$ und
$\dot{z}^2=l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \quad \Rightarrow \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=l^2(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$ und damit

$$L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)-mgl(1+\cos\theta)=L(\theta,\phi,\dot{\theta},\dot{\phi})$$

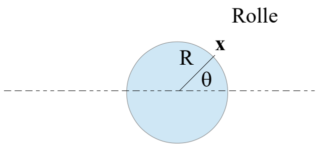
Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}-\frac{\partial L}{\partial\phi}=0\end{aligned} \quad .$$

Die erste Gleichung ist $ml^2\ddot{\theta}-ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta-mgl\sin\theta=0$.
Die zweite Gleichung ist $ml^2(\ddot{\phi}\sin^2\theta+2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta)=0$

Die Bewegungsgleichungen sind nach Vereinfachungen demnach

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}=\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta+\frac{g}{l}\sin\theta\\ \ddot{\phi}=-2\dot{\phi}\dot{\theta}\cot\theta\end{aligned} \quad .$$

E 1.15 Atwoods Maschine, diesmal mit Trägheitsmoment J der Rolle und ihrem Radius R.



Lösung: Die Rotationsenergie der Rolle ist $\frac{1}{2}J\,\omega^2=\frac{1}{2}J\,\frac{v^2}{R^2}=\frac{1}{2R^2}J\,\dot{\boldsymbol{x}}^2$

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^{\,2}+\frac{1}{2}J\,\dot{\theta}^2-g((m_1-m_2)x_1+m_2 l)=L(x_1,\theta,\dot{x}_1,\dot{\theta})$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\ddot{\theta}=0\\ \ddot{x}_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g\end{aligned}$$

Wird die Rolle als dünner Zylindermantel gesehen und gilt dann $J=M\,R^2$ und bringt man die Masse $M=\frac{J}{R^2}$ mit zu der kinetischen Energie $T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^{\,2}$, so erhielte man

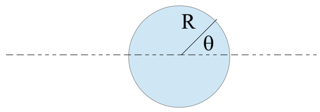
$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2+\frac{J}{R^2})\dot{x}_1^2$. Die Zeitableitung von der partiellen Ableitung von T nach $\dot{x}_1$ wäre dann $(m_1+m_2+\frac{J}{R^2})\ddot{x}_1$ und und die Ableitung von V nach x_1 unverändert $g(m_1-m_2)$, sodass die Euler-Lagrange-Gleichung die Gestalt hätte: $(m_1+m_2+\frac{J}{R^2})\ddot{x}_1=g(m_1-m_2)\Rightarrow$

$$\ddot{x}_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}$$, was aber m.E. nicht ganz korrekt ist.

Bemerkung: Sei $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz = L(z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ die Lagrange-Funktion eines sich im Gravitationsfeld (nahe der Oberfläche der Erde) ansonsten frei bewegenden Teilchens.

Dann ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} =: p_x$ Impuls (linear momentum).

Oder sei $L = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$ die Lagrange-Funktion eines sich frei bewegenden Rades mit Trägheitsmoment J.



Dann ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta} =: L$ Drehimpuls (angular momentum).

Der Impuls bzw. Drehimpuls sind beidesmal die partielle Ableitung der Lagrange-Funktion nach der jeweiligen Geschwindigkeit $\dot{q} = \dot{x}$ bzw. $\dot{\theta}$. Man nennt daher

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} =: p_i$$

den **generalisierten Impuls** oder den zu q_i konjugierten Impuls.

Eine Koordinate, die in der Lagrange-Funktion nicht auftaucht, nennt man zyklisch oder ignorierbar. So ist in der Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz = L(z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ bspw. x eine zyklische Koordinate (auch wenn sie *implizit* über die Zeitableitung vorkommt).

Die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ hat nun folgende Gestalt, wenn q_i zyklisch ist:

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$, da $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$. Oder da $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ und $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$ ist $\frac{d}{dt} p_i = 0$ und also

$p_i = constant$. **Der generalisierte Impuls bzgl. einer zyklischen Variablen ist also konstant**.

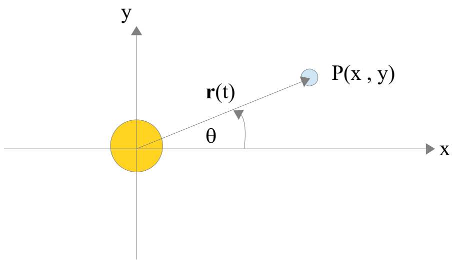
E 1.18 Bestimme jeden konstanten Impuls beim sphärischen Pendel.

Lösung: Die Lagrange-Funktion ist $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz - mgl$ oder kürzer

$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz=L(z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$, da die Konstante mgl in der Euler-Lagrange-Gleichung keine Rolle spielt.

Die Koordinaten x , y sind zyklisch. Also werden die konjugierten Impulse p_x und p_y erhalten.

E 1.19 Erzeuge die Lagrange-Funktion für einen Planeten, der die Sonne umkreist. Bestimme die erhaltenen konjugierten Impulse.
Lösung:



$$T=\frac{1}{2}m\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}} \qquad \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(t)\cos\theta\\r(t)\sin\theta\end{pmatrix}\Rightarrow\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta\\\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\dot{x}^2=\dot{r}^2\cos^2\theta+r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta-2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \qquad \dot{y}^2=\dot{r}^2\sin^2\theta+r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow\dot{\boldsymbol{r}}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2 \quad \text{und damit} \quad T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V=-G\frac{M\,m}{r^2} \qquad \Rightarrow L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+G\frac{M\,m}{r^2}=L(r,\dot{r},\dot{\theta})$$. θ ist zyklische Koordinate.

Also wird der Drehimpuls $J\dot{\theta}$ erhalten.

E 1.20 Zeige, dass solange die kinetische Energie nur von den Geschwindigkeiten und nicht von den Koordinaten abhängt, die generalisierte Kraft gegeben ist durch $Q_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}$.

Lösung: Die generalisierte Kraft ist definiert als $Q_i:=\sum_{k=1}^{3N}F_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i}$. $\frac{\partial T}{\partial q_i}=0$ (*) nach Voraussetzung.

Das Potential ist $V=-\sum_k(F_k x_k)\Rightarrow-\frac{\partial V}{\partial q_i}=\sum_k F_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i}=Q_i$. $\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}\overset{(*)}{=}\frac{-\partial V}{\partial q_i}=Q_i$.

Bemerkung: Ist eine Koordinate q_i zyklisch, so ist der generalisierte Impuls p_i konstant. Es wirkt also keine Kraft F_i in Richtung von q_i (sonst müsste sich ja dieser Impuls verändern). Das System ist also invariant gegenüber Veränderungen von q_i . Ist $q_i=\theta$, so bleibt eine Drehung des Systems um θ ohne Folgen. Wir haben hier eine Rotationssymmetrie. Der umgebende Raum ist isotrop. Ist $q_i=x_i$, so verändert eine Verschiebung in Richtung x_i nichts, das System ist translationssymmetrisch, der assoziierte Impuls ist konstant. Jeder zyklischen Koordinate entspricht also eine Symmetrie:

Zyklische Koordinate	x_i	r	θ	t
Symmetrie	x_i- Translation homogen	Streckung radialhomogen	Rotation isotrop	Zeittranslation homogen
Erhaltung	(linearer) Impuls	Skaleninvarianz	Drehimpuls	Energie

E 1.21 Welches sind die zyklischen Koordinaten beim sphärischen Pendel? Bestimme die damit verbundene Symmetrie.

Lösung: $L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz=L(z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$. Die zyklischen Koordinaten sind x und y.

Also werden die konjugierten Impulse p_x und p_y erhalten. Die Symmetrie ist die Translationssymmetrie auf der x,y-Ebene. Eine Verschiebung des Pendels entlang dieser Ebene ergibt keine Veränderung des Systems.

Bemerkung: Aus der Homogenität des dreidimensionalen Raums ergeben sich neben der Impulserhaltung das zweite und dritte Axiom Newtons:

Sei ein System aus N Teilchen gegeben und dem Vektor $\boldsymbol{r_k}=\begin{pmatrix} q_{1,k} \\ q_{2,k} \\ q_{3,k} \end{pmatrix}$ $(k=1,\ldots,N)$ der Örter der Teilchen. Das System werde nun global verschoben um eine infinitesimale Größe $\boldsymbol{\epsilon}$, so dass $\boldsymbol{r_k}\mapsto\boldsymbol{r_k}+\boldsymbol{\epsilon}$ für alle k gilt. Die Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}$ sollen unverändert bleiben und die Zeit t sei „eingefroren". Die Verschiebung $\boldsymbol{r_k}\mapsto\boldsymbol{r_k}+\boldsymbol{\epsilon}$ ist also eine virtuelle $\delta\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{\epsilon}$. Für das Differenzial dL von $L(q_i,\dot{q}_i,t)$ gilt allgemein aufgrund der Leibnizschen Kettenregel

$$dL=\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i+\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}d\,\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

und da die Zeit eingefroren ist und die Geschwindigkeit sich bei der virtuellen Verschiebung nicht ändert soll, gilt für die virtuelle Veränderung der Lagrangefunktion : $\delta L=\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i$ oder wenn man mit $\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}}:=\begin{pmatrix}\frac{\partial L}{\partial q_1}\\ \frac{\partial L}{\partial q_2}\\ \frac{\partial L}{\partial q_3}\end{pmatrix}=\nabla L$ und mit $\delta\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\delta q_1\\ \delta q_2\\ \delta q_3\end{pmatrix}$ bezeichnet, so gilt $\delta L=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_k}\cdot\delta\boldsymbol{r}_k$.

Es gilt weiter $\delta L=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}=\boldsymbol{\epsilon}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_k}$, da $\boldsymbol{\epsilon}$ für alle k gleich ist.

Nun kommt die Homogenität des umgebenden Raums zum Einsatz, d.h. es gibt keine innere Veränderung des Systems, die Bewegungsgleichungen bleiben unverändert, d.h. L vor und nach der virtuellen Verschiebung bleibt gleich: also ist $\delta L = 0$ und damit

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_k} = 0$$

Da die Euler-Lagrange-Gleichung hier $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_k}$ lautet, folgt $\sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k} = 0$ oder

$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{p}_k = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_{gesamt} = 0$ mit den assozierten generellen Impulsen $\boldsymbol{p}_k = \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ p_{2,k} \\ p_{3,k} \end{pmatrix}$.

Damit ist $\boldsymbol{p}_{gesamt}$ konstant und damit die Impulserhaltung (etwas kompliziert) nachgewiesen. Interessant ist diese Rechnung aber für Newtons Gesetze:

In Vektorform gilt für die kinetische Energie $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$ mit $|\dot{\boldsymbol{r}}| = v$. T hängt hier also nur von den Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{r}}$ und nicht von den Koordinaten $\boldsymbol{r}$ ab.

Da $-V = \boldsymbol{F_k} \cdot \boldsymbol{r_k} = F_{1,k} q_{1,k} + F_{2,k} q_{2,k} + F_{3,k} q_{3,k}$ ist $-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r_k}} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial q_{1,k}} \\ -\frac{\partial V}{\partial q_{2,k}} \\ -\frac{\partial V}{\partial q_{3,k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,k} \\ F_{2,k} \\ F_{3,k} \end{pmatrix} = \boldsymbol{F_k}$ und

$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_k} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}_k} - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_k} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_k}$ folgt $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_k} = \boldsymbol{F_k}$ und da weiter wegen $\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_k} = 0$ gilt

$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F_k} = 0$. Das ist für $N = 2$ das dritte Gesetz von Newton (Actio=Reactio) $\boldsymbol{F_1} = -\boldsymbol{F_2}$.

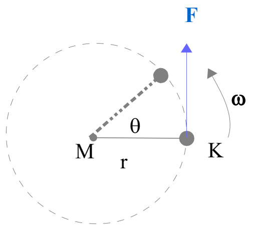
Und da mit der Euler-Lagrange-Gleichung und $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_k} = \boldsymbol{F_k}$ gilt $\boldsymbol{F_k} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p_k}$ ist das zweite Gesetz $\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}}$ (und das erste für $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$ oder $\boldsymbol{v} = const$) hergeleitet.

Die Newtonschen Gesetze sind also eine Folge der Homogenität des Raums! Ist eines der Gesetze nicht streng gültig ($\rightarrow$ Relativitätstheorie), so ist der Raum also nicht homogen.

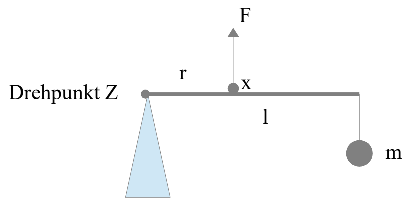
Der **Drehimpuls** oder der Schwung der Drehung.

Bei Translationsbewegungen besagt das 1. Newtonsches Gesetz, dass die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eines starren Körpers sich ohne Kraftweinwirkung nicht verändert $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$. Es muss also eine Kraft auf den Körper eingewirkt haben, damit sie sich verändet $\dot{\boldsymbol{v}} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0}$. Je größer die Kraft, desto größer die Veränderung. Die Kraft hängt aber auch von der trägen Masse m ab. Je größer die Masse, desto stärker muss die Kraft sein, um den gleichen Betrag der Geschwindigkeitsänderung herbeizuführen: $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$.

Für die Rotationsbewegung gilt das ganz ähnlich. Der Körper K der Masse m sei mit einem Faden der Länge r (dessen Masse vernachlässigt werde), der im Punkt M fixiert ist, verbunden und rotiere um M mit der Rotationsgeschwindigkeit ω . Wirkt keine (zusätzliche) Kraft (von der Zentripetalkraft abgesehen) auf den Körper ein, so ändert sich ω nicht (Trägheitsgesetz der Rotationsbewegung).



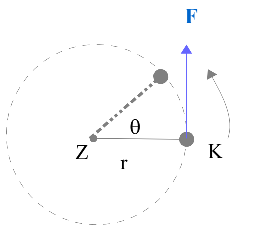
Um die Beziehungen der notwendigen Kraft auf einen Körper zu bestimmen, damit dieser rotiert, betrachtet man am einfachsten einen idealisierterweise „massenfreien“ Stab der Länge l, der sich um eine reibungsfreien Drehachse bewegen kann und an dem am rechten Ende ein Kugel der Masse m hängt und der sich infolgedessen nach unten bewegt. An der Stelle x, die von der Drehachse um r entfernt ist greife eine Kraft F nach oben an.



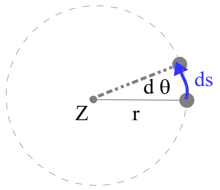
Wie groß muss die Kraft F sein, damit die Drehwirkung der Kugel kompensiert wird und der Stab im Gleichgewicht bleibt, sich also weder noch unten noch nach oben bewegt?

Laut Hebelgesetz (siehe eine mathematische Herleitung über Folgen in http://philmath.org/wordpress/wp-content/uploads/2017/03/Schwerpunkt.pdf) heben sich die beiden Drehwirkungen (**Drehmomente**) auf, wenn $m \cdot l = F \cdot r$. Ist F nur infinitesimal größer als $\frac{ml}{r}$ so dreht sich der Hebel nach oben. Sein Drehmoment M ist also $M = F \cdot r$.

Betrachten wir nun wieder die Figur auf der vorderen Seite, bei der sich ein Körper K der Masse m im Gleichgewicht befinde und kraftfrei um das Zentrum Z rotiere.



An dem Körper greife nun tangential zur Kreisbewegung eine Kraft F an, die den Körper beschleunigt und auf eine höhere Geschwindigkeit bringe.

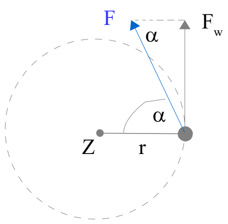


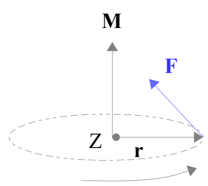
Die infinitesimale Bahn ds entspricht dem infinitesimalen Drehwinkel: $ds = r \cdot d\theta$. Die Geschwindigkeiten sind dann $\frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$ oder $v = r \cdot \omega$, wobei v die Bahngeschwindigkeit ist und ω die Winkelgeschwindigkeit. Ein nochmaliges Ableiten nach der Zeit ergibt $\dot{v} = r \cdot \dot{\omega}$ und nach dem 2. Newtonschen Gesetz $\dot{v} = r \cdot \dot{\omega} = \frac{F}{m}$ oder $F = r\, m \dot{\omega}$.

Das Drehmoment wird damit zu $M = F\, r = r^2 m \dot{\omega}$ oder $M = m r^2 \dot{\omega}$. Da die Kraftgröße F von dem Angriffspunkt abhängt, um eine feste Drehbeschleunigung $\dot{\omega}$ zu bewirken, ist sie nicht die alleinige Ursache für die Wirkung, sondern $F \cdot r$ also M.

Das Drehmoment übt also die gleiche Funktion bei der Drehbewegung aus wie die Kraft bei der linearen Bewegung: $F = m \cdot \dot{v}$ ist analog zu $M = m r^2 \cdot \dot{\omega}$. Wenn bei der linearen Bewegung die träge Masse m der Bewegungsänderung Widerstand leistet, so ist es bei der Kreisbewegung $m r^2$. Daher bezeichnet man $m r^2 =: J$ als **Trägheitsmoment**. Also gilt $M = J \dot{\omega}$ oder $M = J \alpha$, wenn man die Winkelbeschleunigung mit $\alpha = \dot{\omega}$ bezeichnet.

Greift die Kraft nicht rechtwinklig zum Radiusvektor (oder nicht tangential zu Kreis) an, so ist die tangentiale wirkende Kraft F_w gegeben durch $F_w = F \sin\alpha$ und das Drehmoment ist dann $|\boldsymbol{M}| = r\, F_w = r\, F \sin\alpha = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, sodass nicht nur die Beträge sondern der Kraftvektor und der Radialvektor zum Zuge kommen. Man wählt im positiv orientierten 3D $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ und nicht $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}$ weil dadurch der Vektor $\boldsymbol{M}$ mittels der Korkenzieherregel (Rechte-Hand-Regel) die Richtung der Drehbewegung angibt, d.h. in Z nach oben zeigt.



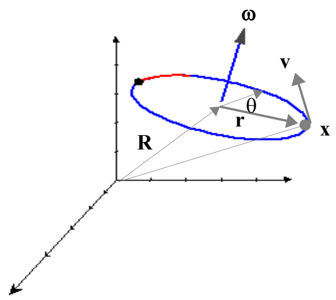


Der **Drehimpuls** $\boldsymbol{L}$ oder $\boldsymbol{I}$ einer Drehbewegung entspricht dem Impuls $\boldsymbol{p}$ einer Translationsbewegung. Wenn eine Kraft in das System einwirkt, so ändert sich bei der linearen Bewegung der Impuls: $\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{p} = \frac{d}{dt} m \boldsymbol{v}$.

Der trägen Masse m bei der linearen Bewegung entspricht das Trägheitsmoment $J = r^2 m$ bei der Kreisbewegung.

Wenn sich bei der linearen Bewegung bei Krafteinwirkung $m \boldsymbol{v}$ verändert, so dürfte es bei der Rotationsbewegung $J \boldsymbol{\omega} = r^2 m \boldsymbol{\omega}$ sein. Also . Der Drehimpuls müsste also der Gleichung $\boldsymbol{L} = r^2 m \boldsymbol{\omega}$ genügen. Wählt man die Bahngeschwindigkeit $\boldsymbol{v} = r \boldsymbol{\omega}$, so lautet die Gleichung $\boldsymbol{L} = r\, m \boldsymbol{v} = r\, \boldsymbol{p}$.

Um zu sehen, wie der Drehimpuls im 3D erscheint, betrachten wir zunächst die Winkelgeschwindigkeit im 3D.



Insofern der Winkel zwischen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{r}$ ein rechter ist, gilt für den Betrag der Winkelgeschwindigkeit: $\omega=\frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{v}|}{\boldsymbol{r}^2}=\frac{|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{v}|\sin\pi/2}{\boldsymbol{r}^2}=\frac{|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|}{\boldsymbol{r}^2}$.

Gibt man die Winkelgeschwindigkeit im 3D als Pseudovektor an, der aus dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit besteht und eine Richtung erhält (ganz ähnlich wie beim Drehmoment), indem man den Einheitsvektor der Drehorientierung als ihren Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_\omega$ wählt (Rechte-Hand-Regel). Damit erhält man $\boldsymbol{\omega}=\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{r}^2}$.

Die Gleichung $\boldsymbol{L}=r^2 m\boldsymbol{\omega}$ für den Drehimpuls lässt sich damit umschreiben zu

$$\boldsymbol{L}=r^2 m\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}}{r^2}=m\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\qquad \boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\quad .$$

Nach diesen Vorbereitungen soll nun gezeigt werden, dass die Erhaltung des Drehimpulses $\boldsymbol{L}$ eine Konsequenz der Isotropie des Raumes ist. Zunächst die

Anmerkung: $\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot u_2v_3+u_2\dot v_3-\dot u_3v_2-u_3\dot v_2\\\dot u_3v_1+u_3\dot v_1-\dot u_1v_3-u_1\dot v_3\\\dot u_1v_2+u_1\dot v_2-\dot u_2v_1-u_2\dot v_1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}\dot u_2v_3-\dot u_3v_2\\\dot u_3v_1-\dot u_1v_3\\\dot u_1v_2-\dot u_2v_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_2\dot v_3-u_3\dot v_2\\u_3\dot v_1-u_1\dot v_3\\u_1\dot v_2-u_2\dot v_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot u_1\\\dot u_2\\\dot u_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dot v_1\\\dot v_2\\\dot v_3\end{pmatrix}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\quad .$$

Differenziert man den Drehimpuls zeitlich, so ergibt sich $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=$

$=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}$ da $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{p}$ linear abhängig. Also $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{M}$.

Wirkt keine äußere Kraft auf das System ein, so ist $\dot{\boldsymbol{p}}=m\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{0}$ und damit ist wegen $\dot{\boldsymbol{v}}=r\dot{\boldsymbol{\omega}}$ auch $\dot{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{0}$ und also $\boldsymbol{M}=r^2 m\dot{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{0}$. Das bedeutet nun, dass $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$ und also ist $\boldsymbol{L}$ konstant.

Beispielweise ist so zu sehen, dass das Drehmoment eines Planeten um die Sonne (der also im Gravitationsfeld der Sonne ist) konstant ist:

Die Zentralkraft $\boldsymbol{F}$ genügt der Gleichung $\boldsymbol{F}=f(r)\hat{\boldsymbol{r}}$. Für das Drehmoment gilt also:

$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=r\,f(r)\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{0}$ und damit wird der Drehimpuls erhalten.

Mit Hilfe der Lagrange-Methode erhält man das Resultat folgendermaßen:

Man betrachte einen Körper, der sich in einem Raumgebiet bewegt, in dem die potentielle Energie nur von r abhängt $V=V(r)$, wie das bspw. wieder im Gravitationsfeld gilt $V=\frac{-GMm}{r}$.
Die Transformationsgleichungen für ebene Polarkoordinaten sind:

$$\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{matrix} \quad \text{und also} \quad \begin{matrix} \dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta \end{matrix} \quad .$$

Für die kinetische Energie gilt dann: $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$ und für L

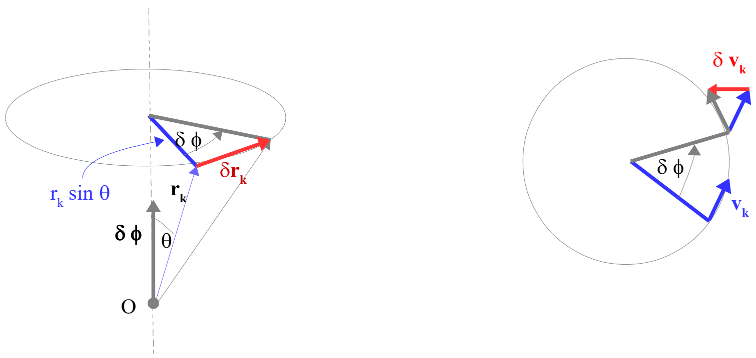
$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r)=L(r,\dot{r},\dot{\theta})$, θ ist also zyklische Koordinate.

Ihr konjugierter Impuls $p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$ ist das Drehmoment M. Der ist aber konstant, da θ

zyklisch ist.

Nun soll gezeigt werden, dass die Erhaltung des Drehimpulses aus der Isotropie des entsprechenden Raumes folgt.

Ein System werde um einen virtuellen Winkel $\delta\phi$ um eine Achse rotiert. Der Pseudovektor $\delta\boldsymbol{\phi}$ ist wie üblich längs der Achse orientiert und hat den Betrag $\delta\phi$. Das Koordinatensystem sei so plaziert, dass sein Ursprung auf der Rotationachse liege. Jedes Partikel des Systems am Ort $\boldsymbol{r}_k$ wird um den Vektor $\delta\boldsymbol{r}_k$ verschoben und die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_k$, werden die Richtung (nicht die Größe) um $\delta\boldsymbol{v}_k$ verändern.



Es gilt $|\delta\boldsymbol{r}_k|=\delta\phi\, r_k\sin\theta$ und demnach $\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r}_k=\delta\boldsymbol{r}_k$ (*) $(\delta\boldsymbol{\phi}\perp\delta\boldsymbol{r}_k \wedge \boldsymbol{r}_k\perp\delta\boldsymbol{r}_k)$.

Ähnlich gilt ungefähr $\delta\boldsymbol{v}_k=\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v}_k$ (**)

Der Raum sei nun isotrop angenommen, d.h. Drehungen des Systems haben keinen Einfluß auf die

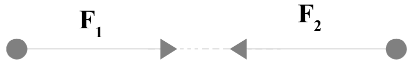
Lagrange-Funktion, die Bewegungsgleichungen bleiben unverändert: $\delta L = 0$.

$$0 = \delta L = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_k}} \delta \boldsymbol{r_k} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_k}} \delta \boldsymbol{v_k} \right)$$. Ersetzt man gemäß der Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_k}}$ durch $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_k}} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{p_k} = \dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{k}}$, Letzteres ist der konjugierte Impuls, so ergibt das $\sum_{k=1}^{N} \left(\dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{k}} \delta \boldsymbol{r_k} + \boldsymbol{p_k} \delta \boldsymbol{v_k} \right) = 0$. Mit (*) $\delta \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r_k} = \delta \boldsymbol{r_k}$ und (**) $\delta \boldsymbol{v_k} = \delta \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{v_k}$ erhält man nach Ersetzung $\sum_{k=1}^{N} \left(\dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{k}} \delta \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r_k} + \boldsymbol{p_k} \delta \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{v_k} \right) = 0$ Durch zyklische Vertauschung der Spatprodukte und mit $\boldsymbol{v_k} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}$ hat man

$$\sum_{k=1}^{N} \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \left(\boldsymbol{r_k} \times \dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{p_k} \right) = \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{r_k} \times \boldsymbol{p_k} \right) = \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r_k} \times \boldsymbol{p_k} = \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{L_k} = \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \boldsymbol{L_{ges}} = 0$$

Da $\delta \boldsymbol{\phi} \neq \boldsymbol{0}$ und $\frac{d}{dt} \boldsymbol{L_{ges}} = \boldsymbol{M}$ und $\delta \boldsymbol{\phi}$ und $\boldsymbol{M}$ nicht orthogonal sind, ist das Skalarprodukt nur dann Null, wenn $\frac{d}{dt} \boldsymbol{L_{gesamt}} = \boldsymbol{0}$ ist, und damit ist der Drehimpuls erhalten geblieben.

E 1.22 Verwende die elementare Vorgehensweise um zu zeigen, dass der Drehimpuls eines Systems von Teilchen konstant ist, wenn keine äußeres Drehmoment auf das System einwirkt. Verwende dazu das dritte Axiom von Newton in seiner starken Form, die besagt, dass die beiden gleichgroßen entgegengesetzten Kräfte auf einer Strecke wirken, die die beiden Teilchen verbindet.



Nun soll die **Erhaltung der Energie** diskutiert werden.

Die kinetische Energie T_1 eines Teilchens, auf das eine äußere Kraft $\boldsymbol{F}$ während seiner Bahn von $\boldsymbol{s_1}$ nach $\boldsymbol{s_2}$ einwirkt, wird auf T_2 erhöht: $T_2 = T_1 + \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}$.

Ist die Kraft konservativ, d.h. hängt der Energiegewinn $\int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}$ nicht von der konkreten Bahn von $\boldsymbol{s_1}$ nach $\boldsymbol{s_2}$ ab (wie bspw. die Kraft in einem Gravitations-oder elektrostatischen Feld, die so genannten Gradientenfelder), so ist $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}$ das Differential einer skalaren Größe, die sogenannte **Arbeitsfunktion** U : $dU = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}$ oder $\boldsymbol{F} = \frac{dU}{\boldsymbol{ds}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla U$. Die potentielle Energie V ist die negative Arbeitsfunktion: $V = -U$ und damit gilt $\boldsymbol{F} = -\nabla V$. Dann ergibt das obige Theorem der Arbeitsenergie: $T_2 = T_1 + \int_{s_1}^{s_2} -\nabla V \cdot \boldsymbol{ds}$ oder

$$T_2 - T_1 = \int_{s_1}^{s_2} -\nabla V \cdot \boldsymbol{ds} \quad .$$

Da $\nabla V \cdot \boldsymbol{ds} = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = -dU = dV$, ist

$$T_2 - T_1 = \int_{s_1}^{s_2} -\nabla V \cdot \boldsymbol{ds} = -\int_{s_1}^{s_2} dV = V(\boldsymbol{s_1}) - V(\boldsymbol{s_2}) = V_1 - V_2 \quad \text{oder} \quad T_2 + V_2 = T_1 + V_2 \quad .$$

Da die Gesamtenergie des mechanischen Systems $E = T + V$ ist bedeutet $T_2 + V_2 = T_1 + V_2$, dass die Gesamtenergie erhalten bleibt, wenn das System von einer Konfiguration zu einer anderen unter dem Einfluß konservativer Kräfte übergeht.

Die Bedingung, dass eine Kraft konservativ ist, ist dass sie gleich dem negativen Gradienten einer Skalarfunktion ist, wie $\boldsymbol{F} = -\nabla V$, das ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Rotation der Kraft Null ist: $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.
Denn $\boldsymbol{\nabla} \times -\boldsymbol{\nabla} f = -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = -(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}) f = \boldsymbol{0} f = \boldsymbol{0}$. Umgekehrt sei $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, dann sind $\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{F}$ linear abhängig, d.h. $\boldsymbol{F} = c \boldsymbol{\nabla} = -\boldsymbol{\nabla} c_1$.

Jetzt soll gezeigt werden, dass die **Energieerhaltung eine Konsequenz der Homogenität der Zeit** ist.

Die Zeitableitung der Lagrange-Funktion $L = L(q, \dot{q}, t)$ ist allgemein:

$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$ und mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
gilt $\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$ (*). Da aber
$\frac{d}{dt} \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \overset{\text{Produktregel}}{=} \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right)$ folgt nach Ersetzung des rechten Terms in (*) $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial t}$ oder die beiden ersten Terme zusammengefasst
$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial t}$.

Unter der **Energiefunktion** h versteht man $h = h(q, \dot{q}, t) := \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$, sodass das obige Resultat als $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dh}{dt}$ geschrieben werden kann.

Wenn nun die Homogenität der Zeit angenommen wird, so Ändert sich die Lagrange-Funktion zeitlich nicht, d.h. $0 = \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow -\frac{dh}{dt} = 0$, d.h. die Energiefunktion ist konstant. Ist damit aber auch die Gesamternergie $E = T + V$ konstant? Dazu folgende Überlegungen:

Die kinetische Energie T lässt sich in folgende Anteile zerlegen: $T = T_0 + T_1 + T_2$, wobei T_0 der Anteil ist, der nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, T_1 der Anteil, der eine homogene Funktion 1. Grades der Geschwindigkeiten ist und T_2 der Anteil, der eine homogene Funktion 2. Grades der Geschwindigkeiten ist.

Dabei heißt eine Funktion $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\dots,x_n)$ **homogen vom Grad k,** wenn für alle $\boldsymbol{x}$ und α gilt: $f(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha^k f(\boldsymbol{x})$.

Diese Zerlegbarkeit soll zunächst nachgewiesen werden für ein System aus N Teilchen:

Dann ist die gesamte kinetische Energie $T=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right)$, mit den Transformationsgleichungen $x_i=x_i(q_1,\dots,q_N,t)$ und der Zeitableitungen

$$\dot{x}_i=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t} \quad \text{folgt} \quad \dot{x}_i^{\,2}=\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2+2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2$$

wobei wegen $(a_1+\dots+a_n)^2=a_1^2+\dots+a_n^2+2(a_1a_2+\dots+a_1a_n)+2(a_2a_3+\dots+a_2a_n)+\dots+2a_{n-1}a_n$ oder $\sum_{j,l=1}^{n}a_j a_l$ und demnach $\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2=\left(\sum_{j,l=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right)$ und also

$$\dot{x}_i^{\,2}=\left(\sum_{j,l=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right)+2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\dot{y}_i^{\,2}=\left(\sum_{j,l=1}^{N}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\frac{\partial y_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right)+2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\dot{z}_i^{\,2}=\left(\sum_{j,l=1}^{N}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right)+2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial z_i}{\partial t}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\begin{aligned}T=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\Bigg(&\sum_{j,l=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\sum_{j,l=1}^{N}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\frac{\partial y_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\sum_{j,l=1}^{N}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\\&+2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial z_i}{\partial t}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\\&+\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\Bigg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\Bigg(&\sum_{j,l=1}^{N}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}+\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}+\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_j\dot{q}_l+\\&+2\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+\frac{\partial z_i}{\partial t}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+\\&+\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\Bigg)\end{aligned}$$

$$T_2=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\sum_{j,l=1}^{N}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}+\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}+\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_j\dot{q}_l=T_2(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$$

$$T_1=m\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+\frac{\partial z_i}{\partial t}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k=T_1(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$$

$$T_0=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right)$$

Ersetzt man in T_1 $\dot{q}_i$ durch $\alpha\dot{q}_i$ so ist $T_1(\alpha\dot{q}_1,\dots,\alpha\dot{q}_n)=\alpha T_1(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$.
Ersetzt man in T_2 $\dot{q}_i$ durch $\alpha\dot{q}_i$ so ist $T_2(\alpha\dot{q}_1,\dots,\alpha\dot{q}_n)=\alpha^2 T_2(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$.

Damit ist die Behauptung der genannten Zerlegung gezeigt.

Da die kinetische Energie T zerlegbar ist in $T=T_0+T_1+T_2$ und demnach

$L=T-V=T_0+T_1+T_2-V=(T_0-V)+T_1+T_2$ mit $L_0=T_0-V$, $L_1=T_1$ und $L_2=T_2$ mit

L_1 homogen in $\boldsymbol{q}$ vom Grad 1 und L_2 homogen in $\boldsymbol{q}$ vom Grad 2.

Nach der **Eulerschen Homogenitätsrelation** gilt allgemein für eine Funktion $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\dots,x_N)$ die homogen zum Grad k ist, dass $\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}=k\,f$.

Es gilt $\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i}=0$, da L_0 nicht von $\dot{q}_i$ abhängt, also bzgl. $\dot{q}_i$ konstant und $\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i}=0$.

Nach Euler gilt dann $\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}=1\ \cdot L_1=L_1$ und $\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}=2\,L_2$ und in der Summe ist

$\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial (L_0+L_1+L_2)}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i}+\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}+\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}=L_1+2\mathrm{L}_2$ und

$h=\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=L_1+2\mathrm{L}_2-L_0-L_1-L_2=L_2-L_0$.

Falls nun in den Transformationsgleichungen der Parameter t nicht explizit vorkommt also $x_i=x_i(q_1,\dots,q_n)$ und nicht $x_i=x_i(q_1,\dots,q_n,t)$, dann verschwinden die partiellen Ableitungen nach t und $T_0=T_1=0$. Dann ist $T=T_2=L_2$ und $L_0=-V$, sodass gilt $h=L_2-L_0=T+V=E$.

Unter diesen Bedingungen wird also die Gesamtenergie E erhalten, da h erhalten bleibt.

Wenn man $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ durch den generalisierten Impuls p_i ersetzt, hat man

$h(q,\dot{q},t)=\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i\,p_i-L(q,\dot{q},t)=:H=H(q,p,t)$ ist die Energiefunktion durch die **Hamilton-Funktion** dargestellt, insofern $\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)$.
Ist h bzw. L eine Funktion in Abhängigkeit vom Ort und der *Geschwindigkeit*, so ist die Hamiltonsche Funktion vom Ort und *Impuls* abhängig.

E 1.23 (a) Zeige, dass $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ nicht konservativ ist. (b) Zeige, dass dahingegen $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$ konservativ ist.

Lösung: a) $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\partial x}{\partial z} \\ \frac{-\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$, also nicht konservativ

b) $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, also konservativ.

E 1.24 Zeige, dass $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 3x^2 y \\ x^3+1 \\ 9z^2 \end{pmatrix}$ konservativ ist.

Lösung: $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3x^2 y \\ x^3+1 \\ 9z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial 9z^2}{\partial y} - \frac{\partial (x^3+1)}{\partial z} \\ \frac{\partial 3x^2 y}{\partial z} - \frac{\partial 9z^2}{\partial x} \\ \frac{\partial (x^3+1)}{\partial x} - \frac{\partial 3x^2 y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 - 3x^2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, also konservative Kraft.

E 1.25 s.o. Seite 23

E 1.26 Beweise Eulers Theorem.

Lösung:

$$f(\alpha x_1 + ... + \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, ..., x_n) \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} f(\alpha x_1 + ... + \alpha x_n) = \frac{d}{d\alpha}(\alpha^k f(x_1, ..., x_n)) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = k\,\alpha^{k-1} f(x_1, ..., x_n) \overset{\alpha := 1}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k\, f(x_1, ..., x_n) \quad .$$

E 1.27 Zeige, dass $z^2 \ln(\frac{x}{y})$ homogen vom Grad 2 ist.

Lösung: $(tz)^2 \ln(\frac{tx}{ty}) = t^2 (z^2 \ln(\frac{x}{y}))$.

E 1.28 Zeige, dass $\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} = 2L_2$

Lösung: $\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} = 2T_2 = 2L_2$, da mit

$$T_2=T_2(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\sum_{j,l=1}^{N}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}+\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}+\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_j\dot{q}_l$$

$$T_2=T_2(a\dot{q}_1,\dots,a\dot{q}_n)=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\sum_{j,l=1}^{N}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}+\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}+\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right)a\dot{q}_j a\dot{q}_l=a^2T_2$$

homogen vom Grad 2.

Virialsatz: Für ein geschlossenes konservatives System (wie für einen Planeten, der einen Stern umkreist) ist der (arithmetische) Mittelwert der kinetischen Energie proportional zum Mittelwert der potentiellen Energie: $\langle T\rangle\propto\langle V\rangle$.

Für das Planet-Stern-Beispiel gilt: $\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle$.

Beweis: In kartesischen Koordinaten ist die kinetische Energie

$T(\dot{\boldsymbol{x}}_i)=T(\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i)=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right)$, die nur von den Geschwindigkeiten abhängt, eine homogene quadratische Funktion, so dass nach Euler gilt: $\sum_{i=1}^{N}\dot{\boldsymbol{x}}_i\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_i}=2\mathrm{T}$.

Wenn die potentielle Energie nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, kann der Impuls als $\boldsymbol{p}_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_i}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_i}-\frac{\partial V}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_i}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_i}$ dargestellt werden und damit gilt $2\mathrm{T}=\sum_{i=1}^{N}\dot{\boldsymbol{x}}_i\boldsymbol{p}_i$. Die Zeitableitung von $\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i$ ergibt $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i)=\sum_{i=1}^{N}\dot{\boldsymbol{x}}_i\boldsymbol{p}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\dot{\boldsymbol{p}}_i$ und also ist $2\mathrm{T}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\dot{\boldsymbol{p}}_i$ (*) . Nach Newtons 2. Gesetz gilt $\boldsymbol{F}_i=\dot{\boldsymbol{p}}_i$ und in einem konservativen System ist $\boldsymbol{F}=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}_i}$, so dass $\dot{\boldsymbol{p}}_i=-\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}_i}$. In (*) eingesetzt ist das $2\mathrm{T}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}_i}$. Für die Mittelwerte der Terme ergibt sich

$$\langle 2\mathrm{T}\rangle=\left\langle\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}_i}\right\rangle .$$

Für den zeitlichen Mittelwert einer Funktion $f:[0,\infty[\to\mathbb{R},t\mapsto f(t)$ gilt bekanntlich $\langle f(t)\rangle=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt$.

Und $\langle f(t)+g(t)\rangle=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)+g(t)dt=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt+\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(t)dt=\langle f(t)\rangle+\langle g(t)\rangle$

so dass $\langle 2\mathrm{T}\rangle=\left\langle\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}_i}\right\rangle=\left\langle\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i\right\rangle+\left\langle\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}_i}\right\rangle$.

$$\left\langle\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i\right\rangle=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i dt=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau d\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\tau}\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i\Big|_\tau-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{p}_i\Big|_0\right)=0$$

wenn vorausgesetzt ist, dass $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{p}_i$ zu jeder Zeit endlich bleibt. Anders gesagt, wir nehmen an, dass die Bewegung begrenzt ist.

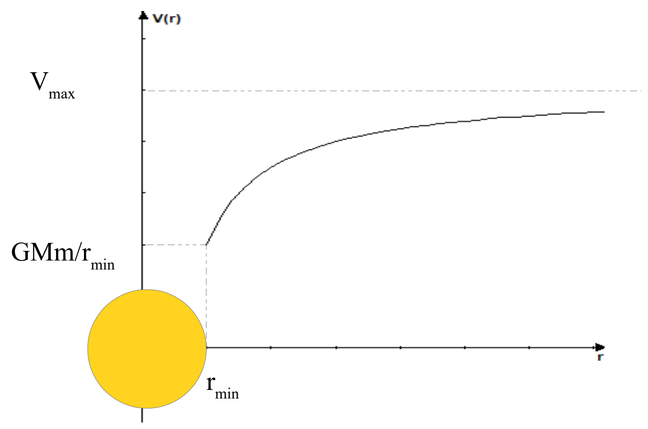
So bleibt übrig $2\langle T\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i} \right\rangle$.

Wenn die potentielle Energie eine homogene Funktion vom Grad k von den Örtern $\boldsymbol{x}_i$ ist, dann ist der rechte Term nach Euler $k\langle V\rangle$, so dass gilt $2\langle T\rangle = k\langle V\rangle$ also $\langle T\rangle \propto \langle V\rangle$.

Im Beispiel eines Planeten, der um einen Stern kreist, ist $V(r) = \frac{-GMm}{r}$:

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -GMm\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$. Die Arbeit W, die man aufbringen muss, um einen Körper der Masse m innerhalb des Gravitationsfeldes des Körpers der Masse M von $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}_1$ entgegen der Gravitationskraft $\boldsymbol{F}$ zu transportieren, ist $W = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$. Da $d\boldsymbol{r}$ der Kraft $\boldsymbol{F}$ entgegengesetzt ist, ist $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{r})\, dr \cos\pi = -F(\boldsymbol{r})\, dr$ und $W = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} F(\boldsymbol{r})\, dr$.

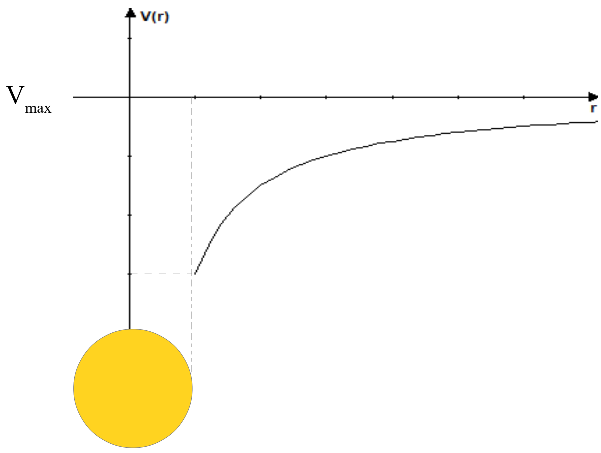
Da $F(\boldsymbol{r}) = -\frac{GMm}{r^2}$ ist $W = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} F(\boldsymbol{r})\, dr = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \frac{-GMm}{r^2} dr = \frac{-GMm}{r}\Big|_{r_0}^{r_1} = GMm\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)$. Damit hat der Körper der Masse m einen Zuwachs an potentieller Energie $\Delta V = GMm\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)$, die er in kinetische Energie umwandeln kann, wenn er von $\boldsymbol{r}_1$ nach $\boldsymbol{r}_0$ zurückkehrt. Die potentielle Energie ist an der Stelle Null, an der sie nicht mehr in kinetische Energie umsetzbar ist. Das ist bei $\boldsymbol{r} = 0$ der Fall. Bei $\boldsymbol{r} = 0$ liegt bzgl. der Kraft und der Potentialdifferenz jedoch eine Singulärität vor. Man müsste also den Radius des Körpers der Masse M als Nullpunkt setzen (wie es im Gravitationsfeld der Erde sinnvoll ist), weil sich der Körper der Masse m dort im Allgemeinen nicht weiter bewegen kann; oder aber man setzt den Bezugspunkt ins Unendliche, sodass man dieser Singulärität entflieht oder der genaueren Betrachtung der Verhältnisse auf dem Körper der Masse M. Dann ist $\Delta V = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{GMm}{r}; r := r_0$. Im Unendlichen ist die potentielle Energie V_∞ maximal. also ist $V_r = V_{max} - \frac{GMm}{r}$.



Da $T(r)+V(r)=c \Rightarrow T(r)=c-V(r)=c+\frac{GMm}{r}-V_{max}=\frac{GMm}{r}+c-V_{max}$.

Je kleiner r, desto größer wird die kinetische Energie $T(r)$. Da $T(\infty)=0=c-V_{max} \Rightarrow c=V_{max}$ $\Rightarrow T(r)=\frac{GMm}{r}$.

Setzt man $V_{max}=0$, was m. E. eher Unsinn ist, so ergibt sich $V_r=-\frac{GMm}{r}$ und die endlichen potentiellen Energien V_r sind dann negativ.



Wählt man $V(r)=-\frac{GMm}{r}$, so ist $V(\alpha r)=\frac{-GMm}{\alpha r}=\alpha^{-1}\left(\frac{-GMm}{r}\right)$ und V demnach homogen zum Grad $k=-1$, sodass gilt $2\langle T\rangle=-\langle V\rangle$. Da $E=T+V$ gilt $\langle E\rangle=\langle T\rangle+\langle V\rangle=\langle T\rangle-2\langle T\rangle=-\langle T\rangle$, was besagt, dass die gesamte Energie negativ ist und der Betrag der mittleren kinetischen Energie $\frac{1}{2}$ mal dem Betrag der mittleren potentiellen Energie.

Ein anderes Beispiel: betrachte die Masse einer Feder. Die potentielle Energie ist $V=\frac{1}{2}Kx^2$ und damit $k=2$ und somit $2\langle T\rangle=2\langle V\rangle$ oder $\langle T\rangle=\langle V\rangle$.

Probleme:

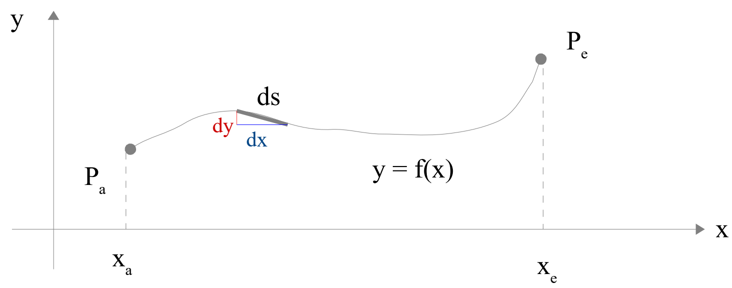
1) Ein schlauer Physikstudent behauptet, als er über eine rote Ampel gefahren ist, vor Gericht, dass es weder möglich war zu stoppen noch weiter zu fahren ohne über die rote Ampel zu fahren oder die Geschwindigkeitsbegrenzung zu überschreiten. Wir wollen untersuchen, ob die Behauptung glaubwürdig ist oder nur der Vorstellung eines überarbeiteten Studenten entsprang.
Wir nehmen an, dass das Auto des Physikstudenten mit konstanter Geschwindigkeit v_0 fuhr, die dier erlaubte Höchstgeschwindigkeit war. Als die Ampel von Grün auf Gelb schaltete, war seine Entfernung zur Ampel d. Er hatte eine Reaktionszeit von τ und das Auto bremst mit einer konstanten Entschleunigung a_c . Die Ampel bleibt auf Gelb für die Zeit t_G . Bestimme die Bedingungen unter denen das Auto weder stoppen noch mit v_0 weiterfahren kann ohne über Rot zu fahren. Verwende darüberhinaus realistische Werte für

τ, t_G, a_c und v_0 um zu bestimmen, ob diese Situation tatsächlich auftreten könnte oder nicht. (Löse die Aufgabe unter Verwendung einfacher kinematische Beziehungen).

2. Die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung

Einführende Beispiele

1. Die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten auf der Ebene



Die Länge der Kurve zwischen dem Anfangspunkt P_a und dem Endpunkt P_e ist $I=\int_{P_a}^{P_e} ds$, wobei ds eine infinitesimale Länge auf der Kurve ist.

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2} \Rightarrow I=\int_{P_a}^{P_e} \sqrt{dx^2+dy^2}=\int_{x_a}^{x_e} dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\int_{x_a}^{x_e} dx\sqrt{1+y'^2} \quad .$$

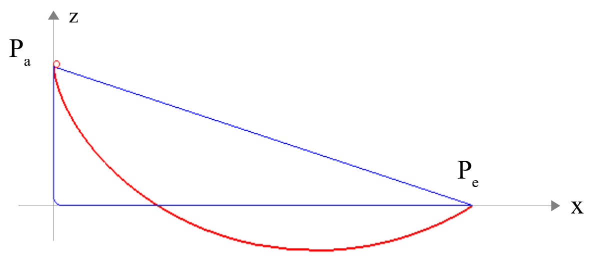
Gesucht ist nun eine Funktion $f: x \mapsto y=y(x)$ für die das Integral I minimal wird.

Das Integral soll verallgemeinert geschrieben werden in der Form $I=\int_{x_a}^{x_e} \phi(y)dx$, wobei $\phi(y)=\sqrt{1+y'^2}$ ist, also eine Funktion von y, das aber selbst eine Funktion von x ist.
ϕ ist also eine Funktion einer Funktion, was man als **Funktional** bezeichnet.

In dieser Formulierung ist also eine Funktion $y=y(x)$ gesucht, die das Integral von $\phi(y)$ minimiert.

Für andere Probleme ist dann ein anderes Funktional gegeben.

2. Brachystochrone

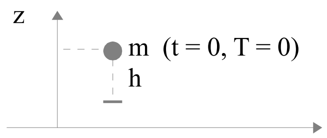


Eine Perle soll von einer oberen Stelle P_a zu einer rechts unterhalb gelegenen Stelle P_e auf einer reibungsfreien Schnur nur unter Einwirkung der Gravitationskraft sich fortbewegen. Welche Form muss die Schnur einnehmen, damit die Perle in kürzester Zeit in P_e ankommt?

Die Zeit, die die Perle braucht, ist die Strecke durch ihrer Geschwindigkeit, infinitesimal: $dt=\frac{ds}{v}$

Am Anfang sei die Zeit $t=0$ und die kinetische Energie ebenfalls $T_a=0$.

Ist ein Objekt der Masse m, das die Strecke h zurücklegt, formt einen Teil seiner potentiellen



Energie in kinetische um. Es ist $h=\frac{1}{2}g\,t^2$, die erreichte Geschwindigkeit $v=g\,t$ und die vergangene Zeit $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Die kinetische Energie ist dann

$T=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}m\,g^2t^2=\frac{1}{2}m\,g^2\frac{2h}{g}=mgh$ und die Geschwindigkeit ist $v=g\,t=g\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{2hg}$.

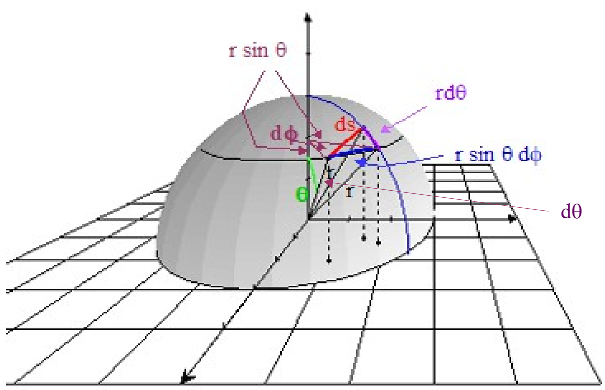
Die infinitesimale Zeit dt, die die Perle braucht um bei der Geschwindigkeit $v=\sqrt{2hg}$ die Strecke ds auf der Kurve zurückzulegen ist $dt=\frac{ds}{v}=\sqrt{\frac{dx^2+dz^2}{2gz}}=dx\sqrt{\frac{1+z'^2}{2gz}}$.

Die Größe, die mimimiert werden soll ist also $I=t_e=\int_0^{t_e}dt=\int_{x_a}^{x_e}\sqrt{\frac{1+z'^2}{2gz}}\,dx$ und das Funktional ist

$$\phi(z,z')=\sqrt{\frac{1+z'^2}{2gz}}$$.

3. Geodäte (Orthodrome)

Eine Geodäte bzw. genauer die Orthodrome ist die kürzeste Verbindunglinie zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche. Sie ist ein Segment des Großkreises. Hier sei nur das geeignete Funktional hergeleitet.



ds sei ein Wegelement auf einer Kugeloberfläche mit Radius r.

Dann ist $ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$ („Dreieck“ rot, blau, bordeau) und die Länge des Weges ist

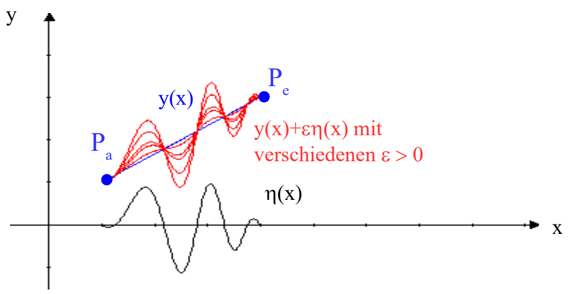
$$I = \int_{P_a}^{P_e} ds = r \int_{\theta_a}^{\theta_e} \sqrt{1 + \frac{d\varphi}{d\theta} \sin^2\theta}\, d\theta \quad \text{mit dem Funktional} \quad \phi(\theta, \varphi') = \sqrt{1 + \varphi' \sin^2\theta} \quad \text{mit} \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta} \quad .$$

Im Allgemeinen wird das Funktional von zwei Funktionen abhängen wie

$$y = y(x) \text{ und } y' = y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} \qquad \phi = \phi(x, y, y') \quad .$$

Nachdem die Funktionale beschrieben wurden, soll jetzt diejenige Funktion bestimmt werden, die das Integral minimiert bzw. stationär machen wird.

Als Beispiel soll das erste, das der kürzesten Verbindungskurve zweier Punkte, dienen.



Die blaue Gerade $y = y(x)$ ist natürlich die kürzeste. Es werden nun andere Kurven gezeichnet, die die beiden Punkte auch verbinden und aus der Addition von $y(x)$ und Variationen der Kurve $\eta(x)$, also $\epsilon\eta(x);\ \epsilon > 0$ hervorgehen: Sie mögen $Y = Y(x, \epsilon)$ heißen:

$Y = Y(x, \epsilon) = y(x) + \epsilon\eta(x)$. Die Kurve $\eta(x)$ muss an den Stellen x_a und x_e beidesmal Null sein, damit P_a und P_b Punkte der Graphen von $Y = Y(x, \epsilon)$ sind:
$Y(x_a, \epsilon) = y(x_a) + \epsilon\eta(x_a) = y(x_a) + 0 = y(x_a)$, ebenso für x_e .

Die Länge von diesen Kurven $Y = Y(x, \epsilon) = y(x) + \epsilon\eta(x)$ ist

$$I(\epsilon) = \int_{x_a}^{x_e} ds = \int_{x_a}^{x_e} dx \sqrt{1 + Y'(x, \epsilon)^2} = \int_{x_a}^{x_e} dx\, \phi(x, Y, Y') \quad \text{mit} \quad \phi(x, Y, Y') = \sqrt{1 + Y'(x, \epsilon)^2}$$

. Das Integral hängt wegen der Integration nach x nicht mehr von x ab und ist daher nur ein Funktional von ϵ .

$Y(x, \epsilon)$ soll nun in Abhängigkeit von ϵ so gewählt werden, dass $I(\epsilon)$ minimal (stationär) wird. Im normalen Infinitesimalkalkül, bei dem man den stationären Wert einer Funktion f bestimmen will setzt man das Differential $df = f'(x) dx = 0$.

Hier wird nun die „erste Variation“ $\delta I(\epsilon) := I(\epsilon) - I(0)$ Null gesetzt: $\delta I(\epsilon) = 0$.

Die Taylorreihe für $f(x)$ um die Stelle x_0 ist:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \text{oder mit nur}$$

endlich vielen Summanden: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+O(x-x_0)^3$, wobei hier der Summand $O(x-x_0)^3$ für den Rest steht und „Ordnung hoch 3“ genannt wird.

$I(\epsilon)$ wird nun um die Stelle $x_0=0$ als Taylorreihe entwickelt und nach endlich vielen Schritten abgebrochen, hier nach der ersten: $I(\epsilon)=I(0)+\frac{dI}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\cdot\epsilon+O(\epsilon^2)$.

$\delta I(\epsilon)=I(\epsilon)-I(0)=\frac{dI}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\cdot\epsilon$ (mit Abbruch nach dem ersten Schritt ohne Rest) mit
$\delta I(\epsilon)=0$ ergibt: $\frac{dI}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\cdot\epsilon=0$ oder $\frac{dI}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}=0$, da $\epsilon>0$ und in das Integral eingesetzt:

$\frac{dI}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}=\frac{d}{d\epsilon}\int_{x_a}^{x_e}dx\,\phi(x,Y,Y')|_{\epsilon=0}=0$. Sowohl Y als auch Y' sind Funktionen von ϵ , sodass die Leibnizsche Kettenregel nachdem der Differentialoperator $\frac{d}{d\epsilon}$ ins Integral gezogen wurde, ergibt: $\int_{x_a}^{x_e}dx\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\epsilon}+\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial\epsilon}\right)|_{\epsilon=0}=0$. (*) Die partielle Integration auf den zweiten Summanden angewandt ergibt: $\int_{x_a}^{x_e}dx\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial\epsilon}=\int_{x_a}^{x_e}\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{dY}{dx}\right)dx=\int_{x_a}^{x_e}\frac{\partial\phi}{\partial Y'}d\left(\frac{\partial Y}{\partial\epsilon}\right)\overset{\text{p.I.}}{=}$
$=\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\frac{\partial Y}{\partial\epsilon}|_{x_a}^{x_e}-\int_{x_a}^{x_e}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\right)\frac{\partial Y}{\partial\epsilon}$. Da mit $Y=y(x)+\epsilon\eta(x)$ $\frac{\partial Y}{\partial\epsilon}=\eta(x)$ und
$\eta(x_a)=\eta(x_e)=0$ ist $\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\frac{\partial Y}{\partial\epsilon}|_{x_a}^{x_e}=0$.

Also ist (*) $\int_{x_a}^{x_e}dx\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\epsilon}+\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial\epsilon}\right)|_{\epsilon=0}=\int_{x_a}^{x_e}dx\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\epsilon}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\frac{\partial Y}{\partial\epsilon}\right)\right)|_{\epsilon=0}=$
$=\int_{x_a}^{x_e}dx\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\right)(\eta(x))\right)|_{\epsilon=0}=0$. Mit der Abkürzung $f(x):=\frac{\partial\phi}{\partial Y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\right)$ hat die

Gleichung folgende Gestalt: $\int_{x_a}^{x_e}dx\,f(x)\eta(x)|_{\epsilon=0}=0$. Da $\eta(x)$ unabhängig von ϵ und die Abhängigkeit von f von ϵ durch die Nullsetzung auch aufgehoben ist, ist das Integral nur noch von Y' abhängig. Da weiter $\eta(x)$ von den Endpunkten $\eta(x_a)=\eta(x_e)=0$ abgesehen eine beliebige unendlich oft differenzierbare Funktion ist, kann das Integral nach du Bois-Reymond nur Null werden, wenn $f(x)|_{\epsilon=0}\equiv 0$ ist, d.h. $\frac{\partial\phi}{\partial Y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y'}\right)|_{\epsilon=0}=0$, was gleichbedeutend ist mit
$\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y'}\right)=0$, da $Y=y$ für $\epsilon=0$.

Die letzte Gleichung ist die Euler-Lagrange-Gleichung.

Für das Problem der kürzesten Kurve hat man also mit $\phi(x,y,y')=\sqrt{1+y'^2}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \Leftrightarrow y''\cdot\sqrt{1+y'^2} - y'\cdot\frac{2y'\cdot y''}{2\sqrt{1+y'^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y''(1+y'^2) = y'^2\cdot y'' \Leftrightarrow y'' = 0 \vee 1 + y'^2 = y'^2 \Leftrightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow y' = c \Leftrightarrow y = cx + d$. Die kürzeste

Kurve ist also eine Gerade.