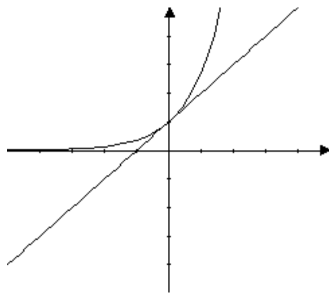
Geometrische Maxima

Manfred Hörz

1. Dreieck mit maximalem Flächeninhalt bei gegebenem Umfang

Beweis von Polya, dass geometrisches Mittel kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel.



Es gilt $e^x \geq 1+x$. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $x=0$

Sei $\overline{x_a} = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ und $\overline{x_g} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

Ersetzt man für x $\frac{x_i}{\overline{x_a}} - 1$, erhält man

$e^{\frac{x_i}{\overline{x_a}}-1} \geq \frac{x_i}{\overline{x_a}}$ für alle $i=1,\ldots,n$ und multipliziert alle Ungleichungen, so ist

$e^{\frac{x_1+\ldots+x_n}{\overline{x_a}}-n} \geq \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{\overline{x_a}^n}$ und da $n = \frac{x_1+\ldots+x_n}{\overline{x_a}}$ ist $1 = e^0 \geq \frac{\overline{x_g}^n}{\overline{x_a}^n}$ und also

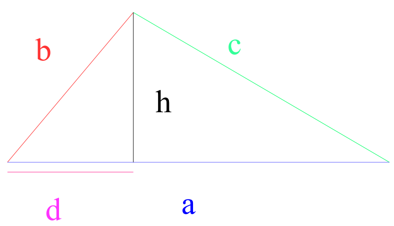
$$\overline{x_a} \geq \overline{x_g} \ .$$

Die Gleichheit gilt, wenn $\frac{x_i}{\overline{x_a}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x_i = \overline{x_a}$ für alle i und damit sind alle x_i gleich.

Satz von Heron (Archimedes):

Der Flächeninhalt F eines Dreiecks mit den Seiten a, b und c ist $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $2s = a+b+c$.

Beweis:



$$F=\frac{1}{2}ha \text{ oder bequemer } F^2=\frac{1}{4}h^2a^2$$

$$h^2=c^2-(a-d)^2=b^2-d^2 \Rightarrow c^2-a^2+2\mathrm{ad}-d^2=b^2-d^2 \Rightarrow c^2-a^2+2\mathrm{ad}=b^2 \Rightarrow d=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\mathrm{a}}$$

$$h^2=b^2-d^2=(b+d)(b-d)=\left(b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2\mathrm{a}}\right)\left(b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2\mathrm{a}}\right)=(2\mathrm{ab}+a^2+b^2-c^2)\frac{(2\mathrm{ab}-a^2-b^2+c^2)}{4\mathrm{a}^2}$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{a}^2}\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)=\frac{1}{4\mathrm{a}^2}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)=$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{a}^2}(2\mathrm{s})(2\mathrm{s}-2\mathrm{c})(2\mathrm{s}-2\mathrm{b})(2\mathrm{s}-2\mathrm{a})=\frac{16}{4\mathrm{a}^2}s(s-c)(s-b)(s-a) \quad \text{Also ist}$$

$$F^2=h^2\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2\frac{\cdot 16}{4\mathrm{a}^2}s(s-c)(s-b)(s-a)=s(s-a)(s-b)(s-c) \quad .$$

Satz: Das Dreieck mit größtem Flächeninhalt bei festem Umfang ist ein gleichseitiges Dreieck.

Beweis: Seien die Dreiecksseiten wieder mit a, b und c bezeichnet. Also $a+b+c=const=:2\mathrm{s}$.

Dann ist der Flächeninhalt $F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Er ist maximal, wenn

$F^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ maximal ist und das ist wegen der Konstanz von s der Fall, wenn

$(s-a)(s-b)(s-c)=:x_1x_2x_3$ maximal ist. $x_1x_2x_3=\overline{x_g}^3\le\overline{x_a}^3$.

$\overline{x_a}=\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}=s-\frac{2\mathrm{s}}{3}=\frac{s}{3}$, also konstant. $x_1x_2x_3$ ist am größten, wenn

$\overline{x_g}=\overline{x_a}=\frac{s}{3}$. Das ist der Fall, wenn $x_1=x_2=x_3$, also $s-a=s-b=s-c$ und das gilt, wenn

$a=b=c$ ist, das Dreieck also gleichseitig ist.

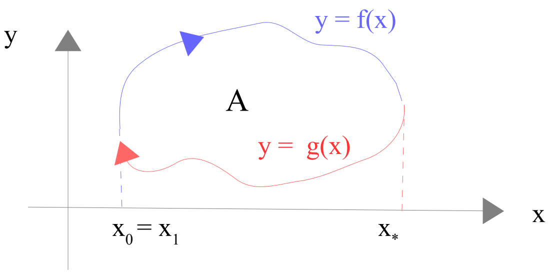
2. Die maximale Fläche einer geschlossenen Figur mit gegebenem Umfang ist der Kreis

1. Die Fläche, die eine geschlossene Kurve einschließt, berechnet man über eine parametrisierte Kurve k:

$k: x=x(t) \ ; \ y=y(t) \qquad t_0\le t\le t_1$

$x_0=x(t_0) \qquad y_0=y(t_0)$

$x_1=x(t_1) \qquad y_1=y(t_1)$

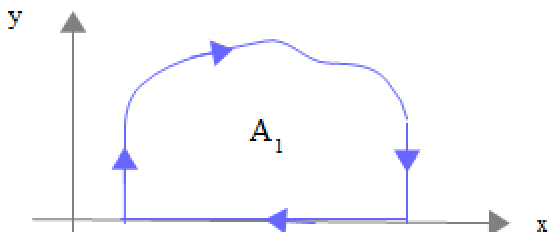


Ist die Kurve positiv orientiert, also gegen den Uhrzeigersinn, so ist die Fläche negativ, im andern Fall positiv. Die Kurve wird zerlegt in zwei Teile, der obere negativ orientiert, der untere positiv orientiert:

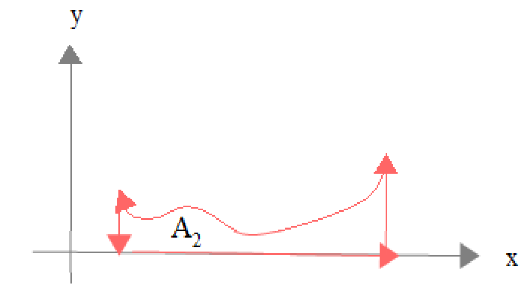
$A_1=\int_{x_0}^{x_*} f(x)dx$ oder parametrisiert $x_*=x(t_*)$

mit $t_0 \le t \le t_*$ und $\frac{dx}{dt}=x'(t) \Rightarrow dx=x'(t)dt$

$$A_1=\int_{t_0}^{t_*} y(t)x'(t)dt$$



$$A_2=\int_{x_*}^{x_1} g(x)dx=\int_{t_*}^{t_1} y(t)x'(t)dt$$



Da A_1 positiv und A_2 negativ ist die Differenzfläche $A=A_1+A_2$ die Fläche, die die gesamte Kurve einschließt.

Also $A=\int_{t_0}^{t_*} y(t)x'(t)dt+\int_{t_*}^{t_1} y(t)x'(t)dt=\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt$. Wendet man auf das letzte Integral

die partielle Integration an, erhält man $A=\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt=[y(t)x(t)]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} y'(t)x(t)dt$.

Da $[y(t)x(t)]_{t_0}^{t_1}=y(t_1)x(t_1)-y(t_0)x(t_0)=0$ ist $A=\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt=\int_{t_0}^{t_1} -y'(t)x(t)dt$.

Bildet man das arithmetische Mittel der beiden gleichwertigen Integrale, erhält man

$$A=\frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt+\int_{t_0}^{t_1} -y'(t)x(t)dt\right)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)-y'(t)x(t)dt=\frac{1}{2}\oint_k yx'-y'x\,dt$$

Das Funktional ist also $\phi=\frac{1}{2}\oint_k yx'-y'x\,dt$

2. Die Kurve soll eine feste Länge L haben. Die Länge der geschlossenen Kurve ist das Integral

$\oint_k ds=\oint\sqrt{dx^2+dy^2}=\oint_k\sqrt{x'^2dt^2+y'^2dt^2}=\oint_k\sqrt{x'^2+y'^2}dt$. Die isoperimetrische

Zwangsbedingung ist also $f=\oint_k\sqrt{x'^2+y'^2}dt-L=0$.

3. $\phi=\phi(x, y, x', y', t)$ hat nur t als unabhängigen Parameter.

Da $\phi+\lambda f=\frac{1}{2}\oint_k yx'-y'x\,dt+\lambda(\oint_k \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt-L)$ stationär sein soll, genügt es den

folgenden Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial(\phi+\lambda f)}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial(\phi+\lambda f)}{\partial x'}=0 \qquad \frac{\partial(\phi+\lambda f)}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial(\phi+\lambda f)}{\partial y'}=0$$

und das ist

$$\frac{-1}{2}y'-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y+\frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)=0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}x'-\frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{2}x+\frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)=0 \quad .$$

Unbestimmte Integration ergibt

$$\frac{-1}{2}y-\frac{1}{2}y-\frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=c_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x-\frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=c_2 \quad \text{oder kürzer}$$

$$y+c_1=\frac{-\lambda x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \quad \text{und} \quad x-c_2=\frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \quad \text{Quadrieren und addieren ergibt}$$

$$(x-c_2)^2+(y+c_1)^2=\lambda^2\frac{(x'^2+y'^2)}{x'^2+y'^2} \quad \text{oder} \quad (x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2 \quad \text{mit} \quad a=c_2 \quad \text{und} \quad b=-c_1 \quad .$$

Das ist aber die Gleichung eines **Kreises** mit Radius λ um den Mittelpunkt $M(a, b)$.