Lagranges Multiplikatoren

Manfred Hörz

Es wurde kurz auf die Variationsrechnung im Artikel über Taylorpolynome eingegangen, die für die Darstellung der ersten und zweiten Variation günstig waren. Sie dienen zur Berechnung der stationären (oder extremalen) Punkte einer Funktion innerhalb der Grenzen eines Konfigurationsraumes: http://philmath.org/wordpress/wp-content/uploads/2018/01/Taylor2.pdf

Die Bewegung eines „Punktes" im Konfigurationsraum eines mechanischen Systems ist nicht immer frei, sondern unterliegt oft gewissen Bedingungen, Nebenbedingungen oder Zwangsbedingungen. Bewegt sich ein Partikel auf einer Ebene und nicht frei im Raumgebiet, so unterliegt es der Bedingung $ax+by+cz-d=0$. Die freien Variablen x, y und z werden also eingeschränkt, und die Dimension der freien Variablen sinkt von 3 auf 2, sodass die Stationärität nicht direkt aus der Bedingung $\delta\phi=0 \Leftrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x_k}=0 \;\; (k=1,2,3)$ herleitbar ist, die unter der Voraussetzung unabhängiger Variablen entwickelt wurde.

Sei allgemein eine Funktion ϕ gegeben mit n unabhängigen Variablen $\phi(x_1,\ldots,x_n)$, die nun aber zusätzlich einer Nebenbedingung unterworfen seien, die sich in der Form $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ (sogenannte holonome Zwangsbedingung) darstellen lässt, die die Variablen insgesamt abhängig machen . Man kann nun die Gleichung nach einer Variablen auflösen und so eine Variable in der Funktion ϕ eliminieren, so dass die restlichen $n-1$ Variablen wieder unabhängig sind.

Das Variationsproblem $\delta\phi=0$ wurde bei n unabhängigen Variablen gelöst durch die n Gleichungen $\frac{\partial\phi}{\partial x_k}=0 \;\; (k=1,\ldots,n)$. Bisweilen kann es aber sehr umständlich sein, eine Variable aufgrund von $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ zu eliminieren.

Hier erfand nun Lagrange die $\lambda-\text{Methode}$, die es ermöglicht, auf die Eliminierung zu verzichten. Sie funktioniert wie folgt:

Man bildet zunächst die Variation der Zwangsbedingung $f(x_1,\ldots,x_n)=0$:

$$\delta f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n=0$$

und wählt einen „(noch) unbestimmten Multiplikator" $\lambda=\lambda(x_1,\ldots,x_n)$, den man mit obiger Gleichung multipliziert und erhält so:

$$\lambda\delta f=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n=0 \quad (*)$$

Unter der bekannten Bedingung, dass die Variation von ϕ verschwindet: $\delta\phi=0$ bzw.

$\delta\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\delta x_n=0$ addiert man hierzu die Gleichung (*) , also Null hinzu

$$\delta\phi+\lambda\delta f=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\delta x_n+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n=0\Leftrightarrow$$

$$\delta\phi+\lambda\delta f=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\delta x_1+\ldots+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_n}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\delta x_n=0 \quad (**)$$

Nun bestimmt man den Multiplikator λ , so dass bspw. $\frac{\partial\phi}{\partial x_n}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n=0$ unter der Voraussetzung, dass $\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n\neq 0$. Der Term $\frac{\partial\phi}{\partial x_n}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n$ fällt dadurch aus der Gleichung (**) weg, die dann in reduzierter Form erscheint:

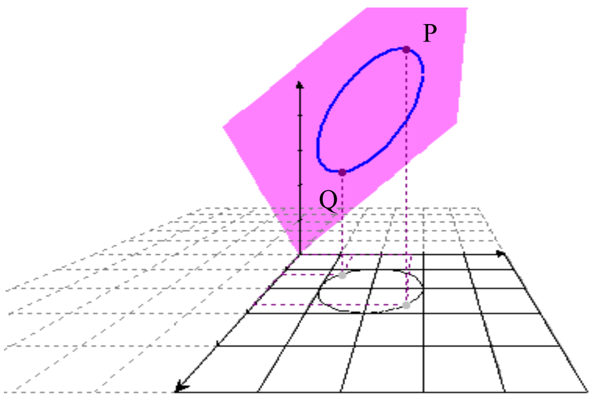
$$\delta\phi+\lambda\delta f=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\delta x_1+\ldots+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)\delta x_{n-1}=0$$

wobei jetzt nur noch unabhängige $\delta x_k(k=1,\ldots,n-1)$ vorkommen, sodass die Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn die $\frac{\partial\phi}{\partial x_k}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k=0 \quad (k=1,\ldots,n-1)$ sind, was zur Folge hat, dass mit $\frac{\partial\phi}{\partial x_n}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n=0$ nun *alle* Gleichungen $\frac{\partial\phi}{\partial x_k}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k=0 \quad (k=1,\ldots,n)$ gelten.

Man hat nun also folgendes erreicht: anstatt $\delta\phi=0$ mit der Nebenbedingung zu lösen, hat man $\delta\phi+\lambda\delta f=0$ zu lösen ohne Nebenbedingung. Anstatt der n Gleichungen mit nur n-1 unabhängigen Variablen hat man nun n+1 Gleichungen mit n+1 unabhängigen Variablen, sodass das Problem unkomplizierter zu lösen ist. Man kann zusätzlich die Gleichung $\delta\phi+\lambda\delta f=0$ aufgrund der Rechenregeln für die Variation δ noch in der Form $\delta(\phi+\lambda f)=0$ schreiben und braucht dann nur die Funktion ϕ durch die Funktion $\phi+\lambda f$ zu ersetzten, um klassisch vorzugehen: $\delta(\phi+\lambda f)\overset{\text{Linearität}}{=}\delta\phi+\delta(\lambda f)\overset{\text{Produktregel}}{=}\delta\phi+f\delta\lambda+\lambda\delta f\overset{f=0}{=}\delta\phi+\lambda\delta f$.

Also ist das Gleichungssystem $\delta(\phi+\lambda f)=0\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi+\lambda f)=0(k=1,\ldots,n)\wedge\frac{\partial}{\partial\lambda}(\phi+\lambda f)=0$ zu lösen.

Beispiel: Auf die Ebene $\phi(x,y)=x+y$ werde ein Kreis $f(x,y)=(x-2)^2+(y-2)^2-1=0$ (Nebenbedingung) projiziert. Wo erreicht das Partikel, das sich auf dem projizierten Kreis bewegt, seine maximale bzw. seine minimale Höhe?



Die Gleichung $\delta(\phi+\lambda f)=0 \Leftrightarrow \delta(x+y+\lambda(x-2)^2+\lambda(y-2)^2-1\lambda)=0$ ist also zu lösen oder das

Gleichungssystem $\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x}(\phi+\lambda f)=0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(\phi+\lambda f)=0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}(\phi+\lambda f)=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1+2\lambda(x-2)=0 \\ 1+2\lambda(y-2)=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2-1=0 \end{matrix}$. Die dritte Gleichung ist die Zwangsbedingung.

Die zweite Gleichung von der ersten subtrahiert ergibt $2\lambda(x-y)=0 \Leftrightarrow x=y$ und das in die dritte Gleichung eingesetzt, erzeugt $2(x-2)^2=1 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=y$.

Im Punkt $P(2+\frac{1}{2}\sqrt{2}|2+\frac{1}{2}\sqrt{2}|4+\sqrt{2}) \approx P(2{,}71|2{,}71|5{,}42)$ hat das Teilchen seinen höchsten Punkt erreicht und im Punkt $Q(2-\frac{1}{2}\sqrt{2}|2-\frac{1}{2}\sqrt{2}|4-\sqrt{2}) \approx Q(1{,}29|1{,}29|2{,}58)$ seinen niedrigsten Punkt.

Bestehen die (holonomen) Zwangsbedingungen aus m Gleichungen

$$f_i(x_1,\dots,x_n)=0 \quad (i=1,\dots,m)$$

so geht man ganz analog vor:

Die Variationen von ihnen ergeben: $\delta f_i(x_1,\dots,x_n)=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\delta x_1+\dots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\delta x_n=0$ und mit je einem unbestimmten Multiplikator λ_i multipliziert :

$$\lambda_i \delta f_i(x_1,\dots,x_n)=\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\delta x_1+\dots+\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\delta x_n=0$$

Man addiert wieder diese Nullen zur Variation von ϕ

$$\delta\phi+\lambda_1\delta f_1+\dots+\lambda_m\delta f_m=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_k}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\dots+\lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial x_k}\right)\delta x_k=0 \quad (***)$$

und bestimmt nun die λ_i , so dass die Koeffizienten etwa der letzten m δx_k Null werden.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_k}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\dots+\lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial x_k}=0 \quad (k=n-m+1,\dots,n)$$

Dadurch reduziert sich wieder die Summe auf:

$$\sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_k}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\dots+\lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial x_k}\right)\delta x_k=0$$

wobei die übrig bleibenden δx_k unabhängig sind, sodass die Koeffizienten Null sein müssen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k}+\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\ldots+\lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_k}=0 \quad (k=1, \ldots, m-1)$$

sodass mit den bereits vorhandenen Gleichungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k}+\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\ldots+\lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_k}=0 \quad (k=n-m+1, \ldots, n)$$

alle Koeffizienten Null sind $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}+\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\ldots+\lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_k}=0 \quad (1, \ldots, n)$

Das ergibt wieder die Äquivalenz von $\delta \phi+\lambda_1 \delta f_1+\ldots+\lambda_m \delta f_m=0$ mit den $n+m$ Gleichungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k}+\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\ldots+\lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_k}=0 \quad (1, \ldots, n)$$

$$f_i(x_1, \ldots, x_n)=0 \quad (i=1, \ldots, m)$$

mit $n+m$ Variablen $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Anstatt die Variationsgleichung $\delta \phi=0$ zu lösen mit m Zwangsbedingungen, kann nun die freie Variationsgleichung

$$\delta \phi+\lambda_1 \delta f_1+\ldots+\lambda_m \delta f_m=0 \Leftrightarrow \delta(\phi+\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_m f_m)=0$$

ohne Nebenbedingungen gelöst werden. Man ersetzt also wieder ϕ durch $\phi+\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_m f_m$.

Die Methode ist sogar unter leichten Veränderungen für gewisse nicht holonomische Zwangsbedingungen (differenziellen Bedingungen) anwendbar, die sonst nicht mit der Eliminationsmethode lösbar wären.