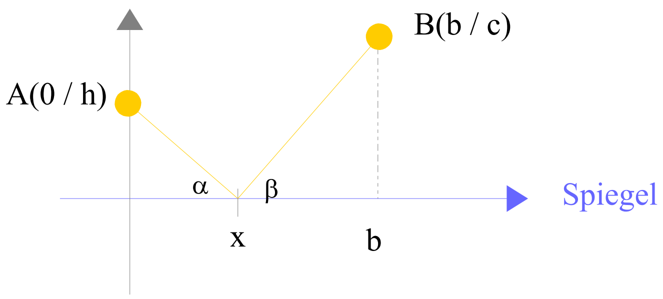
Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz (Heron und Fermat)

Manfred Hörz

Gegeben ist ein Punkt $A(0/h), h>0$ von dem aus Licht gesandt wird, auf einen Spiegel trifft und das dann im Punkt $B(b/c), b>0$ detektiert wird.



Im Punkt $P(x/0), x>0$ soll die Reflexion am Spiegel (x-Achse) stattfinden. Die Idee ist, dass das Licht um von A nach B zu kommen, den kürzest möglichen Weg nimmt. Dies ist dann der Fall, wenn die Länge l_1 der Strecke AP plus der Länge l_2 der Strecke PB am kürzesten ist. Nimmt man an, dass Lichtgeschwindigkeit endlich ist, so ist das gleichbedeutend mit dem Weg kürzester Zeit (im homogenen Medium oder Vakuum).

$l_1(x)=\sqrt{h^2+x^2}$ und $l_2(x)=\sqrt{(x-b)^2+c^2}$ $\quad d(x)=l_1(x)+l_2(x)$ soll also möglichst klein sein.

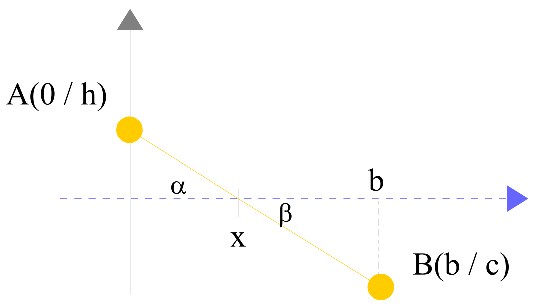
1. Als analytische Extremwertaufgabe: $d'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}+\dfrac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}=0\Leftrightarrow$

$$x\sqrt{(x-b)^2+c^2}=(b-x)\sqrt{h^2+x^2}\Leftrightarrow x^2(x^2+b^2+c^2-2\mathrm{bx})=(b^2+x^2-2\mathrm{bx})(h^2+x^2)\Leftrightarrow$$
$$x^4+b^2x^2+c^2x^2-2\mathrm{bx}^3=b^2h^2+b^2x^2+h^2x^2+x^4-2\mathrm{bh}^2x-2\mathrm{bx}^3\Leftrightarrow c^2x^2=b^2h^2+h^2x^2-2\mathrm{bh}^2x\Leftrightarrow$$
$$(c^2-h^2)x^2+2\mathrm{bh}^2x=b^2h^2$$

$Fall\,1:\ c^2=h^2\Rightarrow 2\mathrm{bh}^2x=b^2h^2\Rightarrow x=\dfrac{b}{2}$. $\quad \tan\alpha=\dfrac{2\mathrm{h}}{b}\quad \tan\beta=\dfrac{c}{b-\dfrac{b}{2}}=\dfrac{2\mathrm{c}}{b}$.

$Fall\,1\mathrm{a}:\ c=h\Rightarrow\tan\beta=\tan\alpha\Rightarrow\beta=\alpha$

$Fall\,1\mathrm{b}:\ c=-h\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{2\mathrm{h}}{b}\quad \tan\beta=\dfrac{2\mathrm{c}}{b}=-\dfrac{2\mathrm{h}}{b}\Rightarrow\beta=-\alpha$ $\qquad$ *Transmission*



$$Fall\,2:\quad c^2 \neq h^2 \Rightarrow x^2 + \frac{2\mathrm{bh}^2}{c^2-h^2}x = \frac{b^2h^2}{c^2-h^2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{2\mathrm{bh}^2}{c^2-h^2}x + \left(\frac{bh^2}{c^2-h^2}\right)^2 = \frac{b^2h^2}{c^2-h^2} + \left(\frac{bh^2}{c^2-h^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{bh^2}{c^2-h^2}\right)^2 = \frac{b^2h^2(c^2-h^2)+b^2h^4}{(c^2-h^2)^2} \Leftrightarrow x + \frac{bh^2}{c^2-h^2} = \pm\frac{bhc}{|c^2-h^2|} \Leftrightarrow x = -\frac{bh^2}{c^2-h^2} \pm \frac{bhc}{|c^2-h^2|}$$

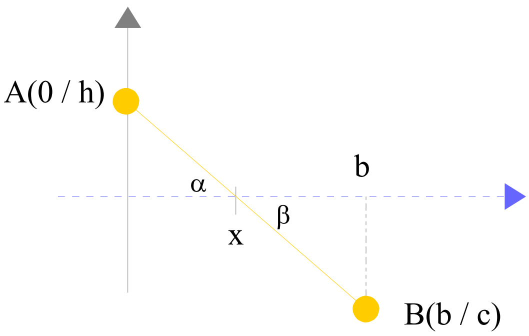
$$Fall\,2a:\quad c^2-h^2>0 \qquad x = -\frac{bh^2}{c^2-h^2} \pm \frac{bhc}{c^2-h^2} \Leftrightarrow x = \frac{bh}{c+h} \vee x = \frac{-bh}{c-h}$$

$Fall\,2a1:\ c>h$ das zweite x fällt weg, da negativ $\Rightarrow x = \dfrac{bh}{c+h}$ $\quad \tan\alpha = \dfrac{h}{\frac{bh}{c+h}} = \dfrac{c+h}{b}$

$$\tan\beta = \frac{c}{b-\frac{bh}{c+h}} = \frac{c+h}{b} \Rightarrow \beta = \alpha$$

$Fall\,2a2:\ c<-h$ erstes x fällt weg, da sonst negativ $\Rightarrow x = \dfrac{bh}{h-c}$ $\quad \tan\alpha = \dfrac{h-c}{b}$

$$\tan\beta = \frac{c}{b-\frac{bh}{h-c}} = \frac{c-h}{b} \Rightarrow \beta = -\alpha \quad \textit{Transmission}$$

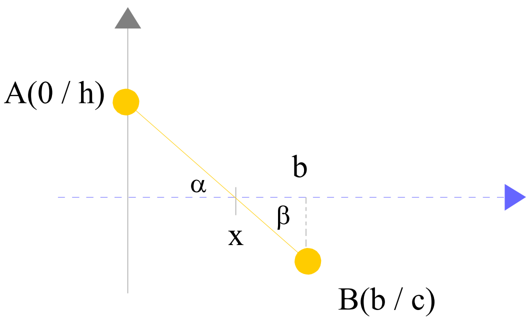


$$Fall\,2b:\ c^2-h^2<0 \qquad x = -\frac{bh^2}{c^2-h^2} \pm \frac{bhc}{|c^2-h^2|} \Rightarrow x = -\frac{bh^2}{c^2-h^2} \mp \frac{bhc}{c^2-h^2} \Rightarrow x = \frac{bh}{h-c} \vee x = \frac{bh}{c+h}$$

$Fall\,2b1:\ c+h<0 \wedge c>h$ Widerspruch, entfällt.

$Fall\,2b2:\ c+h>0 \wedge c<h$ Beide x möglich.

$Fall2b21:\ x = \dfrac{bh}{h-c} \Rightarrow \beta = -\alpha$ *Transmission*

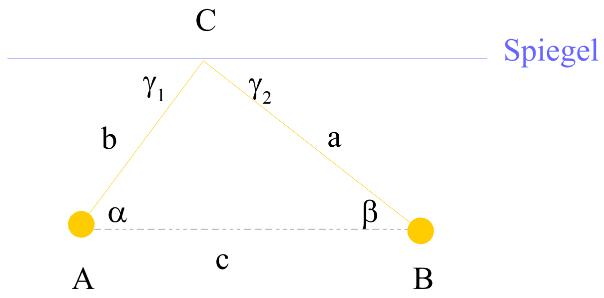


$Fall2b22:\ x = \dfrac{bh}{h+c} \Rightarrow \beta = \alpha$ normale Reflexion.

Verzichtet man auf die Transmission (die man ja im Brechungsgesetz (s.u.) nachweisen kann), so geht das noch viel einfacher. Sei also $c>0$.

$$\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{b-x}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\cos\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta$$

2. Elementargeometrisch bei gleicher Höhe:



Die Höhe aller möglichen Dreiecke mit C auf Spiegel sind gleich. Die Strecke AB ist fest. Also sind die Inhalte F aller Dreiecke gleich: $F=k=const$.

Heuristisch ist klar, dass die Summe der Seitenlängen a und b immer größer werden, wenn C weit nach rechts (oder links) rückt. Demnach dürfte die Summe am kleinsten werden, wenn C über der Mitte von A und B liegt, wenn das Dreieck also gleichschenklig ist.

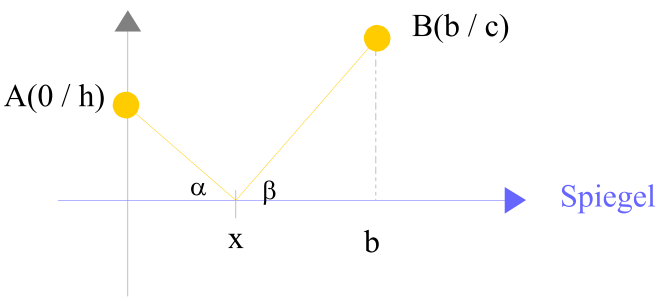
Gemäß der Herleitung des Satzes von Heron ergibt sich für den Flächeninhalt F des Dreiecks mit den Seiten a, b und c:

$$F=\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-(a-b))=\frac{1}{16}((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)=k$$, also

$$c^2-(a-b)^2=\frac{16k}{(a+b)^2-c^2}$$.

$a+b$ wird am kleinsten (rechter Term) genau dann, wenn $c^2-(a-b)^2$ am größten wird $(k$ und c sind konstant$)$ und das trifft genau dann zu, wenn $(a-b)^2$ wiederum am kleinsten ist, was genau für $a=b$ der Fall ist. Das Dreieck ist also dann gleichschenklig mit gleichen Basiswinkeln α,β , so dass die Wechselwinkel γ_1,γ_2 auch gleich sind.

3. Elementargeometrie mit Differenzialrechnung (Fermat)

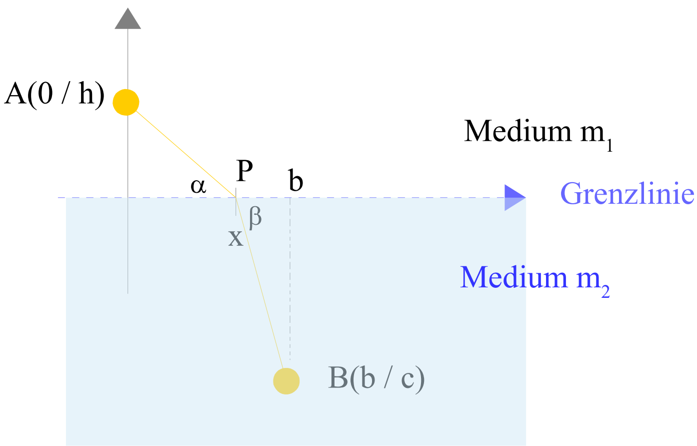


Unter obiger Voraussetzung, dass die Lichtgeschwindigkeit C endlich ist, minimiert man nach der

Zeit: $t=\frac{d(x)}{C}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{1}{C}\frac{d(x)}{dx}=\frac{1}{C}\left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}+\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}\right)=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{b-x}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}\Leftrightarrow$

Die linke Seite ist $\cos\alpha$ und die rechte Seite ist $\cos\beta$, also $\cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow\alpha=\beta$.

4. Brechungsgesetz (Fermat)



Der Lichtstrahl gehe nun an der Grenzlinie im Punkt P in ein anderes (dichteres) Medium über. Es soll wieder die Laufzeit minimiert werden.

$d(x)=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}$ Die Geschwindigkeit des Lichts ist nur im Vakuum C. Ist der Raum mit Energie bzw. Materie angereichert, so ist die Lichtgeschwindigkeit langsamer:

Im Medium m_1 sei sie $\frac{C}{m_1}$, im Medium m_2 sei sie entsprechend $\frac{C}{m_2}$ mit $m_2>m_1>1$.

Für die Zeit gilt dann $t=\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{\frac{C}{m_1}}+\frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{\frac{C}{m_2}}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{m_1}{C}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}+\frac{m_2}{C}\frac{x-b}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}=0\Leftrightarrow$

$\frac{m_1 x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{m_2(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}\Leftrightarrow m_1\cos\alpha=m_2\cos\beta\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. Man nennt m_1 und m_2 die

Brechungsindizes.

Sind die beiden Medien gleich, so gilt $\cos\beta=\cos\alpha\Rightarrow\beta=\alpha$ oder mit obiger Notation $\beta=-\alpha$, das Transmissionsgesetz.