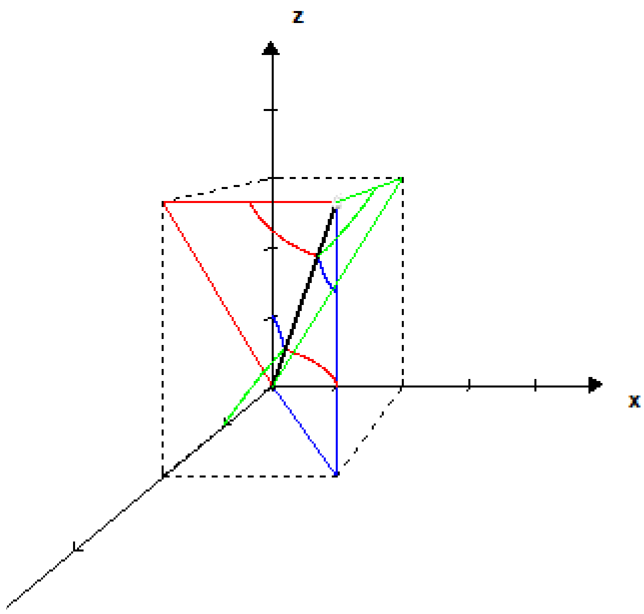
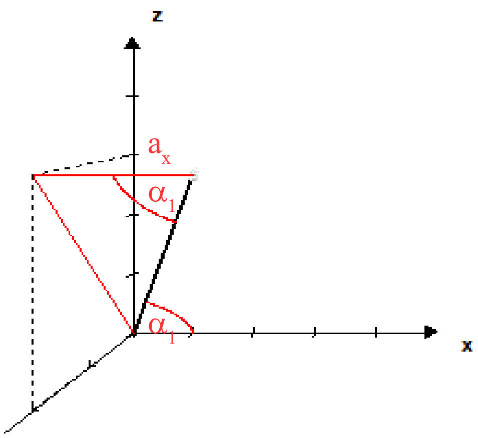
Richtungskosinus

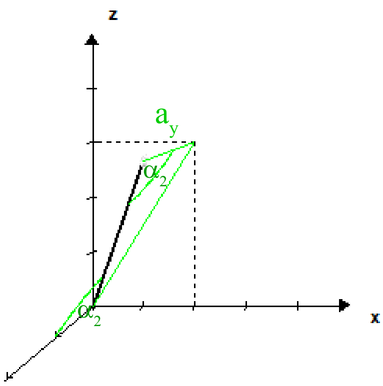
Manfred Hörz



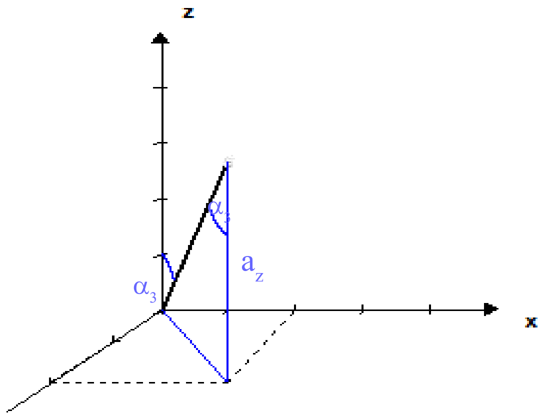
Die x-Komponente $\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{\|a\|} \Rightarrow a_x = \|a\| \cos\alpha_1$



Die y-Komponente $\cos\alpha_2 = \frac{a_y}{\|a\|} \Rightarrow a_y = \|a\| \cos\alpha_2$



Die z-Komponente $\cos\alpha_3 = \frac{a_z}{\|a\|} \Rightarrow a_z = \|a\|\cos\alpha_3$



Der Vektor $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{e_x} + a_y \boldsymbol{e_y} + a_z \boldsymbol{e_z}$ in kartesischen Koordinaten a_x, a_y, a_z lässt sich mit den Richtungskosinus $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3$ darstellen:

$\boldsymbol{a} = \|a\|\cos\alpha_1 \boldsymbol{e_x} + \|a\|\cos\alpha_2 \boldsymbol{e_y} + \|a\|\cos\alpha_3 \boldsymbol{e_z}$, also durch die Komponenten, die durch die Kosinus und die Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$ in der Standardbasis bestimmt werden:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \|a\| \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Demnach lässt sich die Richtung einer Strecke oder eines Vektors durch die drei Winkel charakterisieren.

Für den Betrag des Vektors $\boldsymbol{a}$ gilt: $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \|\boldsymbol{a}\|\sqrt{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3} \Rightarrow$
$\sqrt{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3} = 1 \Rightarrow$

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$

Beispiel 1: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \|\boldsymbol{a}\| = 3 \quad \cos\alpha_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_1 = 0{,}841\,rad = 48{,}2\,°$

$\cos\alpha_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}841\,rad = 48{,}2\,° \qquad \cos\alpha_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha_3 = 1{,}231\,rad = 70{,}53\,°$

Beispiel 2 (der in den obigen Diagrammen dargestellt Vektor):

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \|\boldsymbol{a}\| = 4{,}123 \quad \cos\alpha_1 = \frac{2}{4{,}123} \Rightarrow \alpha_1 = 61\,° = \alpha_2 \quad \cos\alpha_3 = \frac{3}{4{,}123} \Rightarrow \alpha_3 = 43{,}3\,°$