Darstellungstheorie

Manfred Hörz

Die (lineare) Darstellungstheorie versucht schwer zu durchschauende Eigenschaften von gewissen Gruppen (oder Algebren) durch strukturerhaltende Abbildungen auf Matrizen, deren Eigenschaften gut untersucht sind zu klären. Ist in einem Vektorraum eine Basis vorgegeben, so können (quadratische) Matrizen als Beschreibungen von Automorphismen (bijektive strukturerhaltende Abbildungen, d.h. bijektive lineare Abbildungen) des Vektorraums in sich selbst angesehen werden.

So spielen Darstellungen in der Elementarteilchenphysik und Atomphysik eine wichtige Rolle, ebenso in der Molekülphysik und Chemie, aber auch innerhalb der Mathematik, wo sie ihre Anfänge hatte (Frobenius), ist sie von eminenter Bedeutung. Beispielsweise wurde beim Beweis des Primzahlsatzes von Dirichlet (dass jede arithmetische Folge unendlich viele Primzahlen als Glieder enthält) oder beim Beweis des großen Satzes von Fermat ($x^n+y^n=z^n, n>2$ keine Lösung in $\mathbb{N}$) die Darstellungstheorie verwendet.

Beispiel 1: Sei K ein Körper, der auch als Vektorraum (Koordinatenraum) der Dimension 1

aufgefasst werden kann. Die invertierbaren 1 x 1 Matrizen, also i.A. die Zahlen, sind dann aus

$K^*=K\setminus\{0\}$, die die „Automorphismen" von $K\rightarrow K$ bezeichnen, die allgemeine lineare

Gruppe bzgl. der Multiplikation: $GL(1,K)$. Denn ist $k\in K\setminus\{0\}$, dann ist

$\varphi: K\rightarrow K\,;\, a\mapsto\varphi(a)=k\cdot a$ eine Homomorphismus, denn $\varphi(\lambda a+b)=k\cdot(\lambda a+b)=$

$=k\cdot\lambda a+k\cdot b=\lambda(k\cdot a)+k\cdot b=\lambda\varphi(a)+\varphi(b)$. φ *ist injektiv* $:\varphi(a)=\varphi(b)\Rightarrow ka=kb\Rightarrow a=b$ und *surjektiv* $: b\in K\Rightarrow$ es existiert ein $a\in K$ mit $b=\varphi(a)=ka$ da $a=\dfrac{b}{k}$; da $k\neq 0$. Also ist φ ein Automorphismus.

Die Darstellung, die jedem Gruppenelement $g\in G$ den identischen Automorphismus

$\varphi(a)=1\cdot a$ $id_{K^*}=1$ zuordnet, heißt *triviale Darstellung:* $\mathbf{1}: g\mapsto 1$

Beispiel 2: Eine Darstellung der zyklischen Restklassengruppe

$\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{[0],[1]\}$ mit der Addition ist die Abbildung auf die komplexe multiplikative

Einheitengruppe $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, die das Gleiche ist wie die Gruppe der Automorphismen

$GL(1,\mathbb{C})$: $[0]\mapsto e^{\pi i 0}=1=id_{\mathbb{C}}$ $[1]\mapsto e^{\pi i\cdot 1}=-1$. Dieser Homomorphismus (die Darstellung)

ist sogar injektiv. Man nennt die Darstellung dann *treu*. Diese Darstellung hat die *Dimension* 1, da der Vektorraum $\mathbb{C}$ als Koordinatenraum über $\mathbb{C}$ **,** der sogenannte *Darstellungsraum* die Dimension1 hat.

Beispiel 3: Sei G die Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_{3,}+)=(\{[0],[1],[2]\},+)$ und $V=\mathbb{R}^3$ Vektorraum mit der Standardbasis $e_{[0]}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_{[1]}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_{[2]}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Für $[0]$ sei $\rho_{[0]}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ linear mit

$e_{[0]}\mapsto e_{[0]+[0]}=e_{[0]}$; $e_{[1]}\mapsto e_{[0]+[1]}=e_{[1]}$; $e_{[2]}\mapsto e_{[0]+[2]}=e_{[2]}$, also $\rho_{[0]}=id$. Sie ist sicher ein Automorphismus. Für $[1]$ sei $\rho_{[1]}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ linear mit $e_{[0]}\mapsto e_{[1]+[0]}=e_{[1]}$;

$e_{[1]}\mapsto e_{[1]+[1]}=e_{[2]}$; $e_{[2]}\mapsto e_{[1]+[2]}=e_{[0]}$. Auch hier liegt ein Automorphismus vor:

$$\rho_{[1]}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=\rho_{[1]}(a\,e_{[0]}+b\,e_{[1]}+c\,e_{[2]})=a\,\rho_{[1]}(e_{[0]})+b\,\rho_{[1]}(e_{[1]})+c\,\rho_{[1]}(e_{[2]})=a\,e_{[1]}+b\,e_{[2]}+c\,e_{[0]}=\begin{pmatrix}c\\a\\b\end{pmatrix}$$

Und für $[2]$ sei $\rho_{[2]}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ linear mit $e_{[0]}\mapsto e_{[2]+[0]}=e_{[2]}$; $e_{[1]}\mapsto e_{[2]+[1]}=e_{[0]}$;

$e_{[2]}\mapsto e_{[2]+[2]}=e_{[1]}$. Diese Abbildung ist ebenfalls automorph, denn

$$\rho_{[2]}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=\rho_{[2]}(a\,e_{[0]}+b\,e_{[1]}+c\,e_{[2]})=a\,\rho_{[2]}(e_{[0]})+b\,\rho_{[2]}(e_{[1]})+c\,\rho_{[2]}(e_{[2]})=a\,e_{[2]}+b\,e_{[0]}+c\,e_{[1]}=\begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix}$$

$\rho:\mathbb{Z}_3\to Aut(\mathbb{R}^3)$ ist eine lineare Darstellungen von $\mathbb{Z}_3$, die jeder Restklasse eine zyklische Permutation der Koordinaten von $\mathbb{R}^3$ zuordnet. Man sagt, dass die Darstellung vom *Grad* 3 ist. Weiter ist $\rho:G\to Aut(V)$ ein Homomorphismus, der die Struktur der Gruppe, d.h. die Restklassenaddition auf die Struktur der Automorphismengruppe, d.h. auf die Hintereinanderausführung überträgt: bspw. ist $[1]+[2]=[0]$ in G und $\rho_{[0]}=\rho_{[1]+[2]}=\rho_{[1]}\circ\rho_{[2]}$, da

$\rho_{[0]}(a,b,c)=(a,b,c)$ und $\rho_{[1]}\circ\rho_{[2]}(a,b,c)=\rho_{[1]}(b,c,a)=(a,b,c)$.

Da jedem Automorphismus $\varphi:V\to V$ bei einer gegebenen Basis $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ von V eine quadratische Matrix $A=(a_{ij})$ zuordenbar ist: $\varphi(b_j)=\sum_i a_{ij}b_i$ mit $det\,A\neq 0$ und umgekehrt, kann die Gruppe dieser invertierbaren (d.h. regulären) Matrizen $GL(n,K)$, die sogenannte allgemeine lineare Gruppe (general linear group) anstatt der Automorphismengruppe gewählt werden. Im Fall dieses Beispiels sind die zugeordneten Matrizen: $M_0=E\,;M_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,

$M_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. $\rho([0])=E;\rho([1])=M_1;\rho([2])=M_2$ oder kurz: $\rho([k])=M_k$

$\rho([k]+[l])=\rho([k])\cdot\rho([l])=M_k\cdot M_l$. Wählt man anstatt der ganzen Automorphismengruppe die Untergruppe der drei angegebenen Automorphismen bzw. die drei angegebenen regulären

Matrizen (die eine Untergruppe der $SL(3,\mathbb{R})$ ist, da alle ihre Determinanten 1 sind), so ist die Darstellung nicht nur ein Homomorphismus, sondern sogar ein Isomorphismus.

Definition 1: Ein Homomorphismus $\rho:(G,*)\rightarrow GL(V)=Aut(V)$ von einer Gruppe G in die Automorphismengruppe $(Aut(V),\circ)$ eines Vektorraums V über einem Körper K heißt **lineare Darstellung von G**. Es gilt also: $\rho(g*h)=\rho(g)\circ\rho(h)$

V heißt der **Darstellungsraum** und die **Dimension (Grad) der Darstellung** wird als Dimension des Darstellungsraums definiert: $dim\,\rho:=dim\,V$.

Ist eine Basis von V gegeben, so können die Automorphismen durch Matrizen mit Einträgen aus K angegeben werden. Die „general linear group“ $GL(V)$ ist dann isomorph zu $GL(n,K)$ der allgemeinen linearen Gruppe der invertierbaren Matrizen, mit $n=dim\,V$.

Ist der Darstellungshomomorphismus injektiv (Monomorphismus), so nennt man die Darstellung **treu**.

Satz 1: Für jede Darstellung $\rho:G\rightarrow GL(V)$ ist auch $det\,\rho:G\rightarrow GL(1,K);\,g\mapsto det\,\rho(g)$ eine (eindimensionale) Darstellung.

Beweis: $det\,\rho(g*h)=det(\rho(g)\circ\rho(h))=det\,\rho(g)\cdot det\,\rho(h)$

Beispiel 4: (Verallgemeinerung von Beispiel 3)

Sei $(G,\circ)$ eine endliche Gruppe der Ordnung m und V ein Vektorraum der Dimension m. Seine Basis B sei indiziert mit den Elementen von G: $B=\{b_g/g\in G\}$. Für jedes $g\in G$ sei

$\rho_g:V\rightarrow V$ Homomorphismus mit $\rho_g(b_h)\mapsto b_{g\circ h}$, $h\in G$. Es gilt also

$\rho_g(v)=\rho_g(\sum_{h\in G}\alpha_h b_h)=\sum_{h\in G}\alpha_h\rho_g(b_h)=\sum_{h\in G}\alpha_h b_{g\circ h}$. ρ_g ist injektiv, denn $\rho_g(v)=\rho_g(u)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{h\in G} \alpha_h \rho_g(b_h) - \sum_{h\in G} \beta_h \rho_g(b_h) = 0 \Leftrightarrow \sum_{h\in G} (\alpha_h - \beta_h) b_{g\circ h} = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{h\in G} \alpha_h = \beta_h \Rightarrow v = u \quad .$$

ρ_g ist surjektiv: Zunächst wird gezeigt, dass die Links-Operation g auf G: $G\to G\,;h\mapsto g\circ h$ surjektiv ist, denn zu $k\in G$ bildet man das Inverse zu g und verknüpft es linksseitig mit k: $h:=g^{-1}\circ k\in G$. Zu $k\in G$ gibt es also ein $h\in G$ mit $k=g\circ h$, da $g\circ h=g\circ g^{-1}\circ k=k$.

Sei nun $v=\sum_{k\in G} \alpha_k b_k \in V$. Zu $k\in G$ gibt es in $h\in G$ mit $k=g\circ h$, also gilt $v=\sum_{h\in G} \alpha_{g\circ h} b_{g\circ h} = \sum_{h\in G} \alpha_{g\circ h} \rho_g(b_h) = \rho_g(\sum_{h\in G} \alpha_{g\circ h} b_h)$ mit $u=\sum_{h\in G} \alpha_{g\circ h} b_h \in V$. Also ist ρ_g ein Automorphismus von V auf V. Und $\rho: G\to GL(V); g\mapsto \rho_g$ ist lineare Darstellung von G vom Grad m und heißt die *reguläre Darstellung* von G.

Beispiel 5 und Definition 2: (Verallgemeinerung von Beispiel 4)

Sei X eine endliche Menge (Indexmenge) und G operiere auf X von links, d.h.

$\triangleright : G\times X\to X\,;(g,x)\mapsto g\triangleright x$ mit den beiden Postulaten:

(1) Identität: $\bigwedge_{x\in X} e\triangleright x=x$

(2) Verträglichkeit mit Gruppenverknüpfung: $\bigwedge_{g,\,h\in G\,;\,x\in X} (g\circ h)\triangleright x = g\triangleright(h\triangleright x)$

was bedeutet, dass $g\circ h$ eine Komposition der Einzeloperationen bewirkt.

Die Operation $g\triangleright X$ von g auf alle $x\in X$ bewirkt auf X eine Transformation

$\theta_g : X\to X\,;x\mapsto \theta_g(x)=g\triangleright x$, die bijektiv, also eine Permutation von X ist: 1. injektiv:

$$\theta_g(x)=\theta_g(y)\Rightarrow g\triangleright x=g\triangleright y\Rightarrow g^{-1}\triangleright(g\triangleright x)=g^{-1}\triangleright(g\triangleright y)\overset{(2)}{=}(g^{-1}\circ g)\triangleright x=(g^{-1}\circ g)\triangleright y\Rightarrow$$
$\Rightarrow e\triangleright x=e\triangleright y\overset{(1)}{\Rightarrow} x=y$ und sie ist surjektiv: Sei $y\in X\Rightarrow x:=g^{-1}\triangleright y$ x ist Urbild von y:

$$\theta_g(x)=g\triangleright x=g\triangleright(g^{-1}\triangleright y)=(g\circ g^{-1})\triangleright y=e\triangleright y=y \quad .$$

G nennt man auch die *Transformationsgruppe* von X.

(In Beispiel 3 war die Transformationsgruppe $G=(\mathbb{Z}_3,+)$ und $X=\mathbb{R}^3$. $g=[1]$ etwa operierte auf X folgendermaßen: $\theta_{[1]}((a,b,c)):=\rho_{[1]}((a,b,c))=[1]\triangleright(a,b,c)=(c,a,b)$.
Man erkennt hier die Permutation sehr einfach.)

V sei ein Vektorraum mit Basis $B=\{b_x / x\in X\}$. Für $g\in G$ sei $\rho_g : V\to V\,;b_x\mapsto \rho_g(b_x)=b_{g\triangleright x}$

eine lineare Abbildung.

Sie ist injektiv: $u,v\in V$ mit $u=\sum_{x\in X}\alpha_x b_x; v=\sum_{x\in X}\beta_x b_x$ $\rho_g(u)=\rho_g(v)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\rho_g(\sum_{x\in X}\alpha_x b_x)=\rho_g(\sum_{x\in X}\beta_x b_x)\Rightarrow\sum_{x\in X}\alpha_x\rho_g(b_x)=\sum_{x\in X}\beta_x\rho_g(b_x)\Rightarrow\sum_{x\in X}\alpha_x b_{g\triangleright x}-\sum_{x\in X}\beta_x b_{g\triangleright x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{x\in X}(\alpha_x-\beta_x)b_{g\triangleright x}=0\Rightarrow\bigwedge_{x\in X}\alpha_x=\beta_x\Rightarrow u=v$$

Sie ist surjektiv: Sei $v\in V$ mit $v=\sum_{x\in X}\beta_x b_x$ $u:=\sum_{x\in X}\beta_x b_{g^{-1}\triangleright x}\in V$. Dann gilt:

$$\rho_g(u)=\rho_g\left(\sum_{x\in X}\beta_x b_{g^{-1}\triangleright x}\right)=\sum_{x\in X}\beta_x\rho_g(b_{g^{-1}\triangleright x})=\sum_{x\in X}\beta_x b_{g\triangleright(g^{-1}\triangleright x)}=\sum_{x\in X}\beta_x b_{e\triangleright x}=\sum_{x\in X}\beta_x b_x=v\quad.$$

Also ist $\rho_g\in Aut(V)$ und $\rho:G\to Aut(V); g\mapsto\rho(g):=\rho_g$ eine lineare Darstellung von G und sie heißt die Permutationsdarstellung von G bzgl. der Indexmenge X. Denn G permutiert die Indizierung der Basis $B=\{b_x/x\in X\}$ von V über $\theta_g: X\to X; x\mapsto\theta_g(x)=g\triangleright x$ und damit die Koordinaten von V bzgl. B. Man kann das gut sehen, wenn man anstatt die Indizes der Basisvektoren mittels g zu permutieren $b_x\mapsto b_{g\triangleright x}$, die Indizes der Koeffizienten mittels g^{-1} permutiert $\alpha_x\mapsto\alpha_{g^{-1}\triangleright x}$ und die Basisvektoren fest lässt, was auf das gleiche Ergebnis herausläuft. Ist bspw. nämlich $V=\mathbb{R}^3$ und $u=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3\in V$ und $\theta_g(1)=2;$ $\theta_g(2)=3;\theta_g(3)=1$ also die Permutation $\theta_g:(1,2,3)\mapsto(2,3,1)$, dann ist

$$\rho_g(u)=\alpha_1\rho_g(b_1)+\alpha_2\rho_g(b_2)+\alpha_3\rho_g(b_3)=\alpha_1 b_{g\triangleright 1}+\alpha_2 b_{g\triangleright 2}+\alpha_3 b_{g\triangleright 3}=\alpha_1 b_2+\alpha_2 b_3+\alpha_3 b_1=$$
$$=\alpha_3 b_1+\alpha_1 b_2+\alpha_2 b_3=\alpha_{g^{-1}\triangleright 1}b_1+\alpha_{g^{-1}\triangleright 2}b_2+\alpha_{g^{-1}\triangleright 3}b_3$$ mit $\theta_{g^{-1}}(1,2,3)=(3,1,2)$, wobei $\theta_{g^{-1}}=(\theta_g)^{-1}$.

Definition 3: Zwei lineare Darstellungen $\rho_1: G\to GL(V_1),\rho_2: G\to GL(V_2)$ der gleichen Gruppe und gleicher Dimension heißen **ähnlich** oder **äquivalent** oder **isomorph** ($\rho_1\sim\rho_2$), wenn es einen Vektorraum-Isomorphismus $\tau: V_1\to V_2$ gibt, der ρ_1 in ρ_2 transformiert, d.h. der die Gleichung $\tau\circ\rho_1(g)=\rho_2(g)\circ\tau$ oder $\tau\circ\rho_1(g)\circ\tau^{-1}=\rho_2(g)$ oder $\rho_1(g)=\tau^{-1}\circ\rho_2(g)\circ\tau$ für alle $g\in G$ erfüllt:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\tau} & V_2 \\ \rho_1(g)\downarrow & & \downarrow\rho_2(g) \\ V_1 & \xleftarrow[\tau^{-1}]{} & V_2 \end{array}$$ (kommutierendes Diagramm)

Ist B_1 eine Basis von V_1 und B_2 Basis von V_2 und schreibt man die Automorphismen $\rho_1(g)$ bzw. $\rho_2(g)$ in Matrixform $R_{1,g}$ bzw. $R_{2,g}$, dann müssen diese Matrizen (für alle g) ähnlich sein, d.h. es muss eine invertierbare Matrix T existieren, sodass für alle $g \in G$ gilt:

$T \cdot R_{1,g} \cdot T^{-1} = R_{2,g}$.

Solche Darstellungen können also identifiziert werden. Jedes $x \in V_1$ entspricht dem $\tau(x) \in V_2$.

Beispiel 6: Sei $G = <a> = \{e, a\}$ und $V_1 = \mathbb{R}^2$ mit Standardbasis $B_1 = \{e_0, e_1\}$ und $\rho_1(e) = id_{V_1}$ und $\rho_1(a): V_1 \to V_1$ linear mit $e_0 \mapsto e_0; e_1 \mapsto -e_1$, d.h. ist $v = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1$, dann ist $\rho_1(a)(v) = \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1$, d.h. $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} \overset{\rho_1(a)}{\mapsto} \begin{pmatrix}\alpha_0\\ -\alpha_1\end{pmatrix}$ x-Achsenspiegelung. Die zu $\rho_1(e)$ gehörige Matrix ist $R_{1,e} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = E$ und die zu $\rho_1(a)$ gehörige Matrix ist $R_{1,a} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

$V_2 = \mathbb{C}$ mit Basis $B_2 = \{1, i\}$ und $\rho_2(e) = id_{V_2}$ und $\rho_2(a): V_2 \to V_2; v = a + ib \mapsto \bar{v} = a - ib$ ist ein Homomorphismus, der zugleich injektiv und surjektiv ist, also ein Automorphismus.

Die zu $\rho_2(e)$ gehörige Matrix ist $R_{2,e} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = E$ und die zu $\rho_2(a)$ $R_{2,a} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

ρ_1 und ρ_2 sind also lineare Darstellungen von G in $GL(\mathbb{R}^2)$ bzw. $GL(\mathbb{C})$ vom Grad 2.

Der Vektorraum-Isomorphismus ist $\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}; \tau(\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1) = \alpha_0 + \alpha_1 i$, denn τ ist linear, er ist injektiv und surjektiv. Man zeigt leicht, dass $\rho_1(e) = \tau^{-1} \circ \rho_2(e) \circ \tau$. Ich zeige $\rho_1(a) = \tau^{-1} \circ \rho_2(a) \circ \tau$. Sei $v = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 \in \mathbb{R}^2$, dann ist $\rho_1(a)(v) = \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1$.

$\tau(v) = \alpha_0 + \alpha_1 i$ $\quad \rho_2(a)(\alpha_0 + \alpha_1 i) = \alpha_0 - \alpha_1 i$ $\quad \tau^{-1}(\alpha_0 - \alpha_1 i) = \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1$. Also sind die beiden Darstellungen äquivalent. Die Matrix T ist die Einheitsmatrix.

Bemerkung: Ist e das neutrale Element der Gruppe G und g^{-1} das Inverse des Gruppenelements g, so gilt (1) $\rho(e)=id_V$ (2) $\rho(g^{-1})=\rho(g)^{-1}$

Beweis:

(1) Sei $w\in V$ beliebig und $v=\rho(e)^{-1}w\in V$, dann ist

$w=\rho(e)v=\rho(e*e)v=(\rho(e)\circ\rho(e))v=\rho(e)(\rho(e)v)=\rho(e)w$, also ist $\rho(e)=id_V$.

(2) $\rho(g)^{-1}=id_V\circ\rho(g)^{-1}=\rho(e)\circ\rho(g)^{-1}=\rho(g^{-1}*g)\circ\rho(g)^{-1}=(\rho(g^{-1})\circ\rho(g))\circ\rho(g)^{-1}=$

$=\rho(g^{-1})\circ(\rho(g)\circ\rho(g)^{-1})=\rho(g^{-1})\circ id_V=\rho(g^{-1})$.

Bemerkung: Die Äquivalenz von Darstellungen ist eine Äquivalenzrelation und zerlegt die Menge aller Darstellungen in Klassen. Treue und Dimension sind Klasseneigenschaften, d.h. sie bleiben erhalten unter Transformation in äquivalenten Darstellungen.

Beispiel 7: 1. Eine treue 2-dimensionale Darstellung von $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/nZ$ ist

$$\rho: Z_n\to GL(2,\mathbb{R})\,;[k]\mapsto\rho([k])=\begin{pmatrix}\cos(\frac{2\pi k}{n}) & -\sin(\frac{2\pi k}{n})\\ \sin(\frac{2\pi k}{n}) & \cos(\frac{2\pi k}{n})\end{pmatrix}\quad \text{mit}\quad n\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{N}_0$$

denn: a) $det\begin{pmatrix}\cos(\frac{2\pi k}{n}) & -\sin(\frac{2\pi k}{n})\\ \sin(\frac{2\pi k}{n}) & \cos(\frac{2\pi k}{n})\end{pmatrix}=\cos^2(\frac{2\pi k}{n})+\sin^2(\frac{2\pi k}{n})=1$, also sind die Matrizen

regulär und aus $GL(2,\mathbb{R})$ und sogar aus $SL(2,\mathbb{R})$, also Drehungen der Ebene um den Winkel

$\alpha=\frac{2\pi k}{n}$.

b) ρ ist ein Homomorphismus:

$$\rho([k_1]+[k_2])=\rho([k_1+k_2])=\begin{pmatrix}\cos(\frac{2\pi k_1}{n}+\frac{2\pi k_2}{n}) & -\sin(\frac{2\pi k_1}{n}+\frac{2\pi k_2}{n})\\ \sin(\frac{2\pi k_1}{n}+\frac{2\pi k_2}{n}) & \cos(\frac{2\pi k_1}{n}+\frac{2\pi k_2}{n})\end{pmatrix}=\rho([k_1])\cdot\rho([k_2])\quad ,$$

da für die Drehmatrizen ρ gilt: $\rho(\alpha+\beta)=\rho(\alpha)\cdot\rho(\beta)$.

ρ ist injektiv: $\rho([k_1])=\rho([k_2])$. Das ist im Grundbereich $[0,2\pi[$ nur möglich, wenn

$\cos(\alpha)=\cos(2\pi-\alpha)$ oder $\cos(2\pi\frac{k_1}{n})=\cos(2\pi-2\pi\frac{k_1}{n})$, wobei $2\pi-2\pi\frac{k_1}{n}=2\pi\frac{k_2}{n}$, das gilt

wenn $k_2=n-k_1$. Für die gleichen Sinuswerte muss dann gelten:

$\sin(2\pi\frac{k_1}{n})=\sin(2\pi\frac{(n-k_1)}{n})=\sin(2\pi-2\pi\frac{k_1}{n})=\sin(-2\pi\frac{k_1}{n})=-\sin(2\pi\frac{k_1}{n})$ und das gilt nur,

wenn $2\pi\frac{k_1}{n}=0\vee 2\pi\frac{k_1}{n}=\pi\Leftrightarrow k_1=0\vee k_1=\frac{n}{2}$.

1) $k_1=0\Rightarrow k_2=n\Rightarrow[k_1]=[k_2]$ 2) $k_1=\frac{n}{2}\Rightarrow k_2=n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}\Rightarrow k_1=k_2\Rightarrow[k_1]=[k_2]$.

2. Ist $\zeta_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ die erste n-te primitive komplexe Einheitswurzel, so ist

$\rho:\mathbb{Z}_n\to GL(1,\mathbb{C})=\mathbb{C}^*;[k]\mapsto\rho([k])=\zeta_n^k$ eine treue Darstellung der Restklassengruppe der Dimension 1.

denn: Die regulären 1x1-Matrizen aus $\mathbb{C}$ sind die komplexen Zahlen z außer der Null, da $det\, z=z\neq 0$ sein muss wegen der Regularität: $\mathbb{C}^*$. Für $1\leq k<n$ sind die $\rho([k])=e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ die primitiven komplexen Einheitswurzeln. Liegt k außerhalb, so wiederholen sich die Einheitswurzeln zyklisch.

ρ Ist Homomorphismus:

$\rho([k_1]+[k_2])=\rho([k_1+k_2])=e^{\frac{2\pi i(k_1+k_2)}{n}}=e^{\frac{2\pi i(k_1)}{n}}\cdot e^{\frac{2\pi i(k_2)}{n}}=\rho([k_1])+\rho([k_2])$ und da der

$\mathbb{C}$ - Vektorraum $\mathbb{C}$ ist eindimensional, da $\{1+i\}$ Basis vom $\mathbb{C}$: zu beliebigem $z\in\mathbb{C}$ mit $z=a+ib$ gibt es einen Skalar $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2\in\mathbb{C}$ mit $\lambda_1=\frac{b+a}{2}$ und $\lambda_2=\frac{b-a}{2}$, sodass $z=\lambda\cdot(1+i)$. Also ist ρ eine eindimensionale Darstellung.

Sie ist treu, also injektiv, weil: $\rho([k_1])=\rho([k_2])\Rightarrow e^{\frac{2\pi i k_1}{n}}=e^{\frac{2\pi i k_n}{n}}\Rightarrow e^{\frac{k_1}{k_2}}=0\Rightarrow\frac{k_1}{k_2}=1\Rightarrow k_1=k_2$

Jeder Restklasse wird also eineindeutig eine primitive Einheitswurzel zugeordnet mit gleicher Gruppenstruktur.

ρ Ist aber nicht surjektiv, da nicht jede komplexe Zahl die Länge 1 hat.

Definition 4: Sei $U\subseteq V$ ein Unterraum von V und $\rho:G\to GL(V)$ eine lineare Darstellung von G auf dem K-Vektorraum V. Der Unterraum U heißt **invariant oder stabil (unter ρ)** oder **ρ-invariant oder Unterdarstellung von V**, gdw $\bigwedge_{g\in G}\rho_g(U)\subseteq U$, $(\rho_g:=\rho(g))$ oder, dass

$$\bigwedge_{g\in G}\ \bigwedge_{x\in U} \rho_g(x)\in U \quad .$$

Bemerkung: Beschränkt man die Automorphismen ρ_g auf U, so sind die $\rho_g^U: U\to U$ Automorphismen von U und natürlich immer noch linear, und es gilt: ρ^U ist weiter ein Homomorphismus, denn $\rho(g*h)(v)=\rho(g)\circ\rho(h)(v)$ gilt ja allgemein für alle $v\in V$, dann gilt es erst recht für alle $v\in U$, also gilt $\rho^U(g*h)=\rho^U(g)\circ\rho^U(h)$.
Also ist $\rho^U: G\to GL(U)$ eine lineare Darstellung von G auf U, so dass es gerechtfertigt ist, U als Unterdarstellung zu bezeichnen.

Bemerkung:

(1) Natürlich ist V auch eine Unterdarstellung (invarianter Unterraum) von V.

(2) Der triviale Unterraum $\{0\}$ ist stets Unterdarstellung (invarianter Unterraum) von V:

denn $\bigwedge_{g\in G}\bigwedge_{u\in\{0\}} \rho(g)u\in\{0\}$, da $\rho(g)0=0$.

Beispiel 8: Wählt man im Beispiel 3 den Vektor $v=e_{[0]}+e_{[1]}+e_{[2]}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ und als Unterraum

$U=<v>=\{x/x=\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix};a\in\mathbb{R}\}$ von $V=\mathbb{R}^3$, so gilt für beliebiges $\rho_{[k]}\in Aut(V)$,

$k\in\{0,1,2\}$: $\bigwedge_{x\in U}\rho_{[k]}(x)=x$.

Also ist U (besonders) invariant unter ρ und U ist demnach ein Unterdarstellung und die Beschränkung $\rho^U:\mathbb{Z}_3\to Aut(U)$ von ρ auf U eine lineare Darstellung der Dimension 1.

Definition 5: Eine Darstellung $\rho: G\to GL(V)$ bzw. der Darstellungsraum V heißt **irreduzibel**,

wenn es nur die beiden ρ-invarianten Unterräume $\{0\}$ und V gibt, andernfalls heißt sie **reduzibel**.

Beispiel 8 zeigt, dass die Darstellung $\rho:\mathbb{Z}_3\to Aut(\mathbb{R}^3)$ reduzibel ist. Jedoch ist die Darstellung

$\rho|U:\mathbb{Z}_3\to Aut(U)$ von $\mathbb{Z}_3$ irreduzibel

Bemerkung: Die Darstellungstheorie bemüht sich um die Klassifikation irreduzibler (einfacher) Darstellungen. Die irreduziblen Darstellungen einer Gruppe sind sozusagen die Grundbausteine der Darstellungen der Gruppe.

Definition 6: Sei V ein K-Vektorraum und U und W zwei Unterräume. Dann heißt der von

$U \cup W$ erzeugte Unterraum **die Summe von U und W**: $U+W=<U \cup W>$.

Gilt zusätzlich $U \cap W=\{0\}$, dann heißt die Summe **direkt** und wird geschrieben als $U \oplus W$ (die *innere* direkte Summe).

Satz 2: $U+W=\{x \in V / \bigvee_{u \in U, w \in W} x=u+w\}$ **.** Ist die Summe direkt, so ist die Summe

eindeutig: $U \oplus W=\{x \in V / \overset{1}{\bigvee_{u \in U, w \in W}} x=u+w\}$ und es gilt: $\dim U \oplus W=\dim U+\dim W$

Beweis: Siehe mathematische Notizen.

Bemerkung: 1) Ist $V=U \oplus W$, so nennt man U und W zueinander **komplementär** und

$V=U \oplus W$ eine **Zerlegung von V.**

2) Ist U Unterraum von V, so gibt es immer (mindestens) einen zu U komplementären Unterraum W. Meistens mehrere (siehe mathematische Notizen).

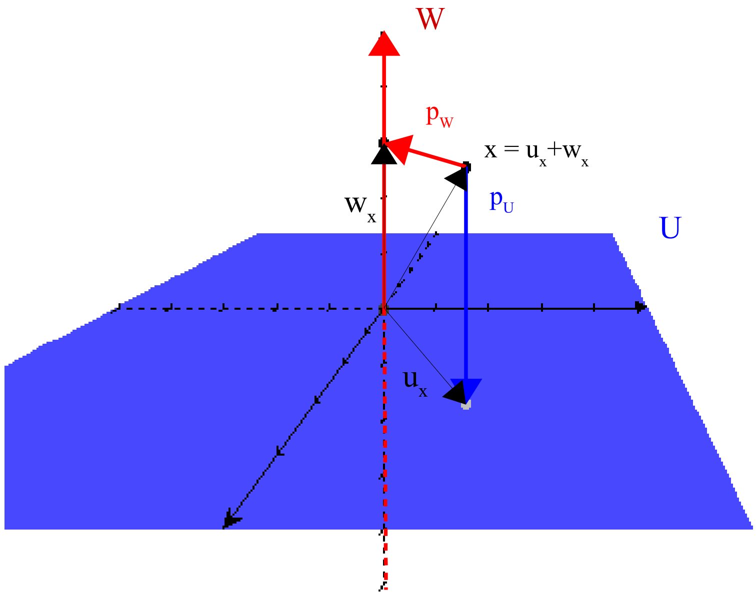
Beispiel 9: $V=\mathbb{R}^3$ $U=<\{(1,0,0),(0,1,0)\}>$ $W=<\{(0,0,1)\}>$ dann ist $V=U \oplus W$.

W ist das Komplement von U in V und umgekehrt.

Definition 7: Sei $V=U \oplus W$. Eine Abbildung $p_U: V \rightarrow V; x=u+w \mapsto u$ heißt **Projektion von V auf U.** Und analog $p_W: V \rightarrow V; x=u+w \mapsto w$ die Projektion von V auf W.

Beispiel 10: $V=U \oplus W$ mit $V=\mathbb{R}^3$ $U=<\{(1,0,0),(0,1,0)\}>$ $W=<\{(0,0,1)\}>$

$p_U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; x=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und $p_W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; x=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ sind die beiden Projektionen.



Satz 3: $V=U\oplus W$. Die Projektionen sind lineare Abbildungen. Für die U-Projektion

$p_U: V\to V\,;\, x=u+w\mapsto u$ gilt

(1) $\mathrm{im}(p_U)=p_U(V)=U$ **(2)** $ker(p_U)=p_U^{-1}(0)=W$ **(3)** $p_U(x)=x$ für alle $x\in U$

Also gilt: $V=\mathrm{im}(p_U)\oplus ker(p_U)$ und analog $V=\mathrm{im}(p_W)\oplus ker(p_W)$ oder

$V=U\oplus ker(p_U)$ bzw. $V=W\oplus ker(p_W)$

Bemerkung: auf (1) kann verzichtet werden, da (1) aus (3) folgt:

$x\in U\overset{(3)}{\Rightarrow} p_U(x)=x\Rightarrow x\in\mathrm{im}(p_U)$ also $U\subseteq\mathrm{im}(p_U)$

$x\in\mathrm{im}(p_U)\Rightarrow \bigvee_{y\in V} x=p_U(y)$ $p_U(y)=p_U(y_u+y_w)=y_u\in U\Rightarrow x\in U$ also $\mathrm{im}(p_U)\subseteq U$

also ist $\mathrm{im}(p_U)=U$, also (1).

Beweis: $p_U(x_1+x_2)=p_U(u_1+w_1+u_2+w_2)=u_1+u_2=p_U(x_1)+p_U(x_2)$

$p_U(\lambda x)=p_U(\lambda(u+w))=p_U(\lambda u+\lambda w)=\lambda u=\lambda\, p_U(x)$

(1) $y\in p_U(V)\Rightarrow y=p_U(x)\in U$ mit $x\in V\Rightarrow y\in U$. $y\in U\Rightarrow y=p_U(x)$ mit $x\in V\Rightarrow y\in p_U(V)$.

(2) $p_U^{-1}(0)=0+W=W$

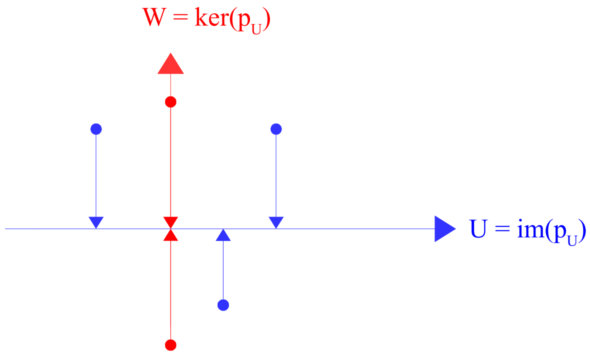
(3) $x\in U\Rightarrow p_U(x)=p_U(u+0)=u=x$

Beispiel 11: $V=\mathbb{R}^2$ $U=<\{(1,0)\}>$ (x-Achse) , $W=<\{(0,1)\}>$, dann ist $V=U\oplus W$.

$p_U: V\to V\,;\, x=u+w\mapsto u$ oder $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)\mapsto(a,0)$ Projektion auf x-Achse.

$\mathrm{im}(p_U)=\{(a,0)/a\in\mathbb{R}\}=U$ $ker(p_U)=\{(0,b)/b\in\mathbb{R}\}=W$ $p_U((a,0))=(a,0)$ also

$V=\mathrm{im}(p_U)\oplus ker(p_U)$



Satz 3': Ist $p:V\to V$ linear mit $\bigwedge_{x\in\mathrm{im}(p)} p(x)=x$, dann ist $V=\mathrm{im}(p)\oplus ker(p)$ und

p ist Projektion von V auf $\mathrm{im}(p)$, d.h. $p:V=\mathrm{im}(p)\oplus ker(p)\to\mathrm{im}(p)\,;u+w\mapsto u$

Beweis: $\Leftarrow$: $x\in imp(p)\oplus ker(p)\Rightarrow x=u_1+u_2\Rightarrow p(x)=p(u_1)+p(u_2)=p(u_1)+0=u_1\in V$

$u_2\in ker(p)\subseteq V\Rightarrow u_2\in V\Rightarrow x=u_1+u_2\in V$

$\Rightarrow$: $ker(p)\subseteq V$ und $\mathrm{im}(p)\subseteq V$.

Fall 1: Ist $V=\mathrm{im}(p)\Rightarrow V=\mathrm{im}(p)\oplus ker(p)$ mit $ker(p)=\{0\}$ weil $ker(p)\supseteq\{0,x\}$ mit

$x\neq 0\Rightarrow dim\,ker(p)\geq 1$ im Widerspruch zu Satz 2.

Fall 2: Ist $V\supset\mathrm{im}(p)\Rightarrow V=\mathrm{im}(p)\,\dot\cup R$ (R ist der Rest). Sei $x\in V$.

Ist $x\in\mathrm{im}(p)\Rightarrow x=x+0$ eindeutig und also $x\in\mathrm{im}(p)\oplus ker(p)$

Ist $x\notin\mathrm{im}(p)\Rightarrow x\neq 0$ $(da\ p(0)=0)$ und $x\in R\,;$ $\bigvee_{y\in\mathrm{im}(p)} p(x)=y$ und $p(y)=y\Rightarrow p(x-y)=0$

also $x-y\in ker(p)$ Also $x=y+(x-y)$ mit $y\in\mathrm{im}(p)$ und $x-y\in ker(p)$. Annahme, die

Summe wäre nicht eindeutig, d.h. es gäbe $z\in\mathrm{im}(p)$ und $x-z\in ker(p)$ mit $z\neq y$ und

$x=z+(x-z)$ $\Rightarrow p(x)=p(z)+p(x-z)=p(z)=z$ und da $p(x)=y\Rightarrow z=y$ Wid. Also ist die

Summe eindeutig und demnach $x\in\mathrm{im}(p)\oplus ker(p)$.

Sei $v\in V$ mit $v=u+w\overset{p}{\mapsto} p(u+w)=p(u)+p(w)=u+0=u$

Also ist p Projektion von V auf $\mathrm{im}(p)$.

Beispiel 12: $V=\mathbb{R}^2$ $p:V\to V;(a,b)\mapsto(b,a)$ ist linear mit $\mathrm{im}(p)=V$ und $ker(p)=\{0\}$ und

$V=\mathrm{im}(p)\oplus ker(p)$

Bemerkung: Beispiel 12 ist Beispiel für Fall 1 und Beispiel 11 für Fall 2.

(bijektive Beziehung zwischen was genau? >S.6)

Satz 4: Ist $\rho:G\to GL(V)$ eine lineare Darstellung von G in V und ist U ein Unterraum von V, der invariant ist unter G (d.h. $\bigwedge_{g\in G}\rho_g(U)\subseteq U$, also Unterdarstellung von G). Dann existiert ein Komplement W von U in V ($V=U\oplus W$) , das auch invariant unter G (Unterdarstellung von G) ist: $\bigwedge_{g\in G}\rho_g(W)\subseteq W$

Beispiel 13: $V=\mathbb{R}^3$, $U=<\{(1,0,0),(0,1,0)\}>$ $G=(\{[0],[1]\},+)=\mathbb{Z}_2$

$\rho:G\to Aut(V);\rho_{[0]}=id_V$, $\rho_{[1]}:(a,b,c)\mapsto(b,a,c)$ Homomorphismus, da

$\rho_{[1]}\circ\rho_{[1]}=id_V=\rho_{[0]}$.

U ist invariant unter ρ , da $\rho_{\{0\}}=id_V$ und $\rho_{\{1\}}(a,b,0)=(b,a,0)\in U$. Zu U gibt es das Komplement $W=<\{(0,0,1)\}>$ mit $\rho_{\{1\}}(0,0,c)=(0,0,c)\in W$, das also invariant unter G ist.

Beweis: Sei W' ein (beliebiger) komplementärer Unterraum von U in V: $V=U\oplus W'$ (siehe math. Notizen). Sei p_U die U-Projektion von V auf U. Nach Satz 3 gilt: $U=\mathrm{im}(p_U)$

$W'=ker(p_U) \quad \bigwedge_{x\in U} p_U(x)=x$.

Sei nun $\tilde{p}_u$ das arithmetische Mittel der Konjugierten von p_U bzgl. der ρ_g $g\in G$:

$\tilde{p}_U=\frac{1}{ord(G)}\sum_{g\in G}\rho_g\circ p_U\circ\rho_g^{-1}$. Es soll gezeigt werden, dass $\tilde{p}_U$ eine Projektion von V auf U ist.

ρ_g sind Automorphismen von V nach V. Also auch ρ_g^{-1} .

Zuerst: $\tilde{p}_U: V\rightarrow V$ ist linear. Sei $x\in V$ $\rho_g^{-1}(x)\in V$, $p_U(\rho_g^{-1}(x))\in U$,

$\rho_g(p_U(\rho_g^{-1}(x)))\in U$ (*) weil U stabil unter G.

Da $p_U, \rho_g, \rho_g^{-1}: V\rightarrow V$ zum Endomorphismenring $End(V)$ gehören, ist auch

$\varphi_g:=\rho_g\circ p_U\circ\rho_g^{-1}\in End(V)$, also linear. Also auch $\sum_{g\in G}\rho_g\circ p_U\circ\rho_g^{-1}$ und da mit einem

Endomorphismus ϕ auch $\lambda\phi$ mit $\lambda\in K$ auch $\tilde{p}_U$ und zwar ist $\tilde{p}_U: V\rightarrow U$, denn:

$x\in V\Rightarrow\varphi_g(x)\in U$ nach (*). Also auch $\sum_{g\in G}\varphi_g(x)\in U$ und

$\tilde{p}_U(x)=ord(G)x\in U\Rightarrow\tilde{p}_U(x)=\frac{1}{ord(g)}\sum\varphi_g(x)\in U$. Außerdem: $\mathrm{im}(\tilde{p}_U)\subseteq U$ (**).

Ist $x\in\mathrm{im}(\tilde{p}_U)$, also $x\in U\Rightarrow\rho_g^{-1}(x)\in U$ da $\rho_g: U\rightarrow U$ Automorphismus.

$p_U(\rho_g^{-1}(x))=\rho_g^{-1}(x)$, Da $\bigwedge_{x\in U} p_U(x)=x$. $\varphi_g(x)=\rho_g(p_U(\rho_g^{-1}(x)))=\rho_g(\rho_g^{-1}(x))=x\Rightarrow$
$\sum_{g\in G}\varphi_g(x)=ord(G)x\in U\Rightarrow\tilde{p}_U(x)=\frac{1}{ord(g)}\sum\varphi_g(x)=x\in U$, also $\bigwedge_{x\in\mathrm{im}(\tilde{p}_U)}\tilde{p}_U(x)=x$.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 3' für $\tilde{p}_U$ erfüllt und es gilt, da für $x\in U\Rightarrow\tilde{p}_U(x)=x$

und mit $\tilde{p}_U(x)\in\mathrm{im}(\tilde{p}_U)$ auch $x\in\mathrm{im}(\tilde{p}_U)$ mit (**): $\mathrm{im}(\tilde{p}_U)=U$. Nach Satz 3' folgt:

$V=U\oplus ker(\tilde{p}_U)$ und $\tilde{p}_U$ ist Projektion von V auf U: $\tilde{p}_U: U\oplus ker(\tilde{p}_U)\rightarrow U; u+w\mapsto u$.

Zu zeigen bleibt, dass $ker(\tilde{p}_U)$ invariant unter G ist: $\bigwedge_{g\in G}\rho_g(ker(\tilde{p}_U))\subseteq ker(\tilde{p}_U)$.

Dazu soll nachgewiesen werden, dass $\tilde{p}_U$ mit allen ρ_h mit $h\in G$ kommutiert,

$\bigwedge_{h\in G}\rho_h\circ\tilde{p}_U=\tilde{p}_U\circ\rho_h$ (***): da alle Abbildungen aus dem Ring $End(V)$ sind

$$\rho_h\circ\tilde{p}_U\circ\rho_h^{-1}=\rho_h\circ\left(\frac{1}{ord(G)}\sum_{g\in G}\rho_g\circ p_U\circ\rho_g^{-1}\right)\circ\rho_h^{-1}=\frac{1}{ord(G)}\sum_{g\in G}\rho_h\circ\rho_g\circ p_U\circ\rho_g^{-1}\circ\rho_h^{-1}=$$

$= \frac{1}{ord(G)} \sum_{g \in G} \rho_{h*g} \circ p_U \circ \rho_{(h*g)^{-1}} = \frac{1}{ord(G)} \sum_{g \in G} \rho_{h*g} \circ p_U \circ \rho_{h*g}^{-1} = \tilde{p_U}$, da $h \in G$ bijektiv auf G

operiert.

Sei $x \in ker(\tilde{p_U})$ und $g \in G \Rightarrow \tilde{p_U}(x)=0 \Rightarrow \tilde{p_U} \circ \rho_g(x) = \rho_g \circ \tilde{p_U}(x) = \rho_g(0)=0$, d.h.

$\rho_g(x) \in ker(\tilde{p_U})$ und damit $\rho_g : ker(\tilde{p_U}) \to ker(\tilde{p_U})$ oder $\rho_g(ker(\tilde{p_U})) \subseteq ker(\tilde{p_U})$ q.e.d.

Bemerkung: Sei V ein K-Vektorraum. Der Endomorphismenring $End(V)$ ist ein K-Ring (siehe mathematische Notizen).

Satz 5: Ist der Vektorraum zusätzlich mit einem Skalarprodukt $<x|y>$ versehen (das semilinear in y ist, linear in x und positiv definit) , das unter G invariant ist, d.h. dass $<\rho_g(x)|\rho_g(y)> = <x|y>$ für alle $g \in G$, und ist U invariant unter G, so ist das orthogonale Komplement $W^{\perp}$ von U in V stabil unter G.

Beispiel 14: Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $<x|y>$ das Standardskalarprodukt, das unter $G = (\{g_0, g_1\}, \circ)$ mit $g_0 = id_V$ und $g_1(a,b) = (a,-b)$ (x-Achsenspiegelung) invariant ist unter G: $<g_1(a,b)|g_1(c,d)> = ac+bd = ac+(-b)(-d) = <(a,b)|(c,d)>$; für g_0 trivial.

Sei $U = <\{(1,0)\}>$ mit $W^{\perp} = <\{(0,1)\}>$. U ist stabil unter G: Sei $x \in U \Rightarrow x = (\lambda, 0)$

$g_1(x) = g_1(\lambda, 0) = (\lambda, 0) \in U$. Auch $W^{\perp} = <\{(0,1)\}>$ ist stabil unter G: $x \in W^{\perp} \Rightarrow x = (0,\mu)$

und $g_1(x) = g_1(0,\mu) = (0,-\mu) \in W^{\perp}$.

$W^{\perp}$ muss jedoch nicht stabil sein, wenn U nicht stabil ist, wie folgendes Bsp. zeigt:

$U = <\{(1,1)\}>$ nicht stabil, da $g_1(1,1) = (1,-1) \notin U$. Auch $W^{\perp} = <\{(-1,1)\}>$ ist nicht stabil, da $g_1(-1,1) = (-1,-1) \notin W^{\perp}$.

Beweis: Sei U Unterrum von V stabil unter G, d.h. $\bigwedge_{g \in G} g(U) \subseteq U$. Das orthogonale Komplement von U ist $W^{\perp} := \{x \in V / \bigwedge_{y \in U} <x,y> = 0\}$. Sei $x \in W^{\perp}$ und $y \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow <x,y> = 0$ und $g(y) \in U$. $<g(x), g(y)> = <x,y> = 0 \Rightarrow g(x) \in W^{\perp}$, also ist $W^{\perp}$ invariant unter G. Weiter ist $V = U \oplus W^{\perp}$, da erstens $U \cap W^{\perp} = \{0\}$: Sei $x \in U \cap W^{\perp} \Rightarrow$

$x \in U \wedge x \in W^{\perp} \Rightarrow <x,x> = 0 \Rightarrow x = 0$. Dass $W^{\perp}$ Unterraum von V ist, ist klar:

$x_1, x_2 \in W^{\perp}, y \in U \Rightarrow <x_1 + x_2 | y> = <x_1 | y> + <x_2 | y> = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \in W^{\perp}$.

$\lambda \in K \wedge x \in W^{\perp}, y \in U \Rightarrow <\lambda x | y> = \lambda <x | y> = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda x \in W^{\perp}$. Bleibt zu zeigen, dass $V \subseteq U \oplus W^{\perp}$ (die Umkehrung ist klar). Sei also $x \in V$. Sei x_U die senkrechte Projektion von x auf den Unterraum U, wobei U die orthonormale Basis $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ habe. Dann ist

$x_U = \sum_{i=1}^{m} <x | u_i> u_i$, denn damit x_u Projektion, muss gelten $<x - x_u | x_u> =$

$<x - \sum_i <x | u_i> u_i \ | \sum_i <x | u_i> \ u_i> = <x | \sum_i <x | u_i> \ u_i> - <\sum_i <x | u_i> u_i | \sum_i <x | u_i> u_i> =$

$\sum_i \overline{<x | u_i>} <x | u_i> - \sum_i <x | u_i> \overline{<x | u_i>} = 0$. Dann ist $x = x_u + (x - x_u)$ mit $x_u \in U$ und

$x - x_u \in W^{\perp}$. Letzteres gilt, da $<x - x_u | u> = <(x - \sum_i <x | u_i> u_i) | \sum_i \alpha_i u_i> =$

$<x | \sum_i \alpha_i u_i> - <\sum_i <x | u_i> u_i \ | \ \sum_i \alpha_i u_i> = \sum_i <x | u_i> \overline{\alpha_i} - \sum_i <x | u_i> \overline{\alpha_i} = 0$ qed.

Damit hat man unter der Voraussetzung der Existenz des Skalarprodukts einen anderen Beweis von Satz 4.

Bemerkung: Die Invarianz des Skalarprodukts bedeutet, dass, bei gegebener orthonormalen Basis $\{e_i\}$ von V, die Matrix R_g von ρ_g unitär ist. …..

Definition 7: $V_1 \oplus V_2 := \{(v_1, v_2), v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ heißt die (äußere) **direkte Summe** der Räume V_1 und V_2 . Sind $\rho_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ und $\rho_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ zwei Darstellungen der Gruppe G, dann ist $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$, $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) := (\rho_1(g) v_1, \rho_2(g) v_2)$ oder kurz $\rho_1 \oplus \rho_1(g) = (\rho_1(g), \rho_2(g))$ die **direkte Summe der Darstellungen von** ρ_1 **und** ρ_2 , die wieder eine Darstellung von G ist.

In Matrixschreibweise ist $(\rho_1(g), \rho_2(g)) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$, da

$$\left(\begin{pmatrix}\rho_1(g) & 0\\ 0 & \rho_2(g)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}\rho_1(g)v_1\\ \rho_2(g)v_2\end{pmatrix}^T\Leftrightarrow(v_1,v_2)\cdot\begin{pmatrix}\rho_1(g) & 0\\ 0 & \rho_2(g)\end{pmatrix}=(\rho_1(g)v_1,\rho_2(g)v_2)$$

Für eine erweiterte direkte Summe $\rho_1\oplus\rho_2\oplus\rho_3\oplus\ldots\oplus\rho_n(g)$ gilt in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix}\rho_1(g) & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \rho_2(g) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \rho_3(g) & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \rho_n(g)\end{pmatrix}$$

Definition 7: Eine Darstellung $\rho: G\to GL(V)$ heißt **vollständig reduzibel** oder **vollreduzibel**, wenn sie irreduzibel ist oder wenn sie sich als direkte Summe von irreduziblen Darstellungen schreiben lässt: $\rho=\bigoplus_{i\in I}\rho_i$, I Indexmenge und ρ_i irreduzibel.

Beispiel 8: $G=\mathbb{Z}_3$ $\rho:\mathbb{Z}_3\to GL(1,\mathbb{C})=\mathbb{C}^*;[k]\mapsto e^{\frac{2\pi i}{3}\cdot k}$ ist treue Darstellung vom Grad 1.

$\zeta_3:=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ist die dritte primitive Einheitswurzel. Das Bild $\rho(\mathbb{Z}_3)=\{1,\zeta_3,\zeta_3^2\}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_3=\{[0],[1],[2]\}$.

Eine weitere treue Darstellung vom Grad 2 derselben Gruppe wäre etwa:

$\rho_1:\mathbb{Z}_3\to GL(2,\mathbb{C});\rho_1([k]):=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta_3^k\end{pmatrix}$, die äquivalent ist zur treuen Darstellung ρ_2 vom selben Grad : $\rho_2:\mathbb{Z}_3\to GL(2,\mathbb{C});\rho_2([k]):=\begin{pmatrix}\zeta_3^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Die Matrix $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ mir ihrer Inversen $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ stellt den notwendigen Isomorphismus für die Äquivalenz dar.

Die Darstellung ρ_1 ist reduzibel. Sie lässt sich schreiben als direkte Summe von $\rho_0\oplus\rho$, wobei ρ_0 die triviale Darstellung ist mit $\rho_0([k])=id_{\mathbb{C}}=:1$: $\rho_0\oplus\rho=\begin{pmatrix}\rho_0(g) & 0\\ 0 & \rho(g)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta_3^k\end{pmatrix}=\rho_1$ und $\rho\oplus\rho_0=\begin{pmatrix}\rho(g) & 0\\ 0 & \rho_0(g)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\zeta_3^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\rho_2$.

Werden die Drehungen im $\mathbb{R}^2$ ausgeführt, so lauten die Drehmatrizen um den Winkel α :

$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Für die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_3$ ergibt sich dann die Darstellung

$\rho : \mathbb{Z}_3 \to GL(2, \mathbb{R}); [k] \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3} \cdot k) & -\sin(\frac{2\pi}{3} \cdot k) \\ \sin(\frac{2\pi}{3} \cdot k) & \cos(\frac{2\pi}{3} \cdot k) \end{pmatrix} = D_{\frac{2\pi}{3} \cdot k}$ vom Grad 2. Diese Darstellung ist

irreduzibel: Jeder echte nichttriviale Unterraum U von $\mathbb{R}^2$ ist vom Grad 1 und hat die Gestalt

$U = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\}$, wobei $a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0$. Sei $k = 1$. Es wird gezeigt, dass

$D_{\frac{2\pi}{3}} U \not\subseteq U$, dass also U nicht ρ-invariant ist. Sei $0 \neq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in U \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \neq 0$

$D_{\frac{2\pi}{3}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \cos(\frac{2\pi}{3}) - \lambda a_2 \sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \lambda a_1 \sin(\frac{2\pi}{3}) + \lambda a_2 \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \notin U$, denn sonst würde gelten mit $\cos(\frac{2\pi}{3}) =: c_1$ und

$\sin(\frac{2\pi}{3}) =: c_2$: (I) $\lambda a_1 c_1 - \lambda a_2 c_2 = \lambda_1 a_1$ und (II) $\lambda a_1 c_2 + \lambda a_2 c_1 = \lambda_1 a_2$ $\overset{a_2 I - a_1 II}{\Rightarrow}$

$\lambda(a_1 a_2 c_1 - a_1^2 c_2) = \lambda(a_2^2 c_2 + a_1 a_2 c_1) \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} -a_1^2 c_2 = a_2^2 c_2 \Rightarrow c_2(a_2^2 + a_1^2) = 0$. Das ist aber nicht

möglich, da $c_2 = \sin(\frac{2\pi}{3}) \neq 0$ und $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq 0$. Also ist ρ irreduzibel.

Bemerkung:

1) Darstellungen vom Grad 1 sind immer irreduzibel, da der Darstellungsraum nur den trivialen Unterraum und sich selbst als Unterraum hat.

2) die triviale Darstellung mit Darstellungsraumdimension größer 1 ist reduzibel, da für jeden

Unterraum U gilt: $id_V U \subseteq U$.

Definition 8: Sei G Gruppe. Zwei Gruppenelemente $g_1, g_2 \in G$ heißen **konjugiert** zueinander,

wenn es ein Gruppenelement $h \in G$ gibt, sodass gilt: $g_1 = h g_2 h^{-1}$.

$G g G^{-1} = \{ h g h^{-1} / h \in G \}$ heißt die **Konjugationsklasse von g**.

Bemerkung: Da die Konjugation eine Äquivalenzrelation ist, wird G in Konjugationsklassen vollständig zerlegt.

Satz 2: Jede Darstellung einer endlichen Gruppe ist vollreduzibel.

Satz 3: Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen derselbigen.

Definition 9: Sei $\rho: G \to GL(n, K)$ eine lineare Darstellung in Matrixform.

Die Abbildung $\chi_\rho: G \to K\,;\, g \mapsto \chi_\rho(g) = spur(\rho(g))$ heißt **Charakter von $\boldsymbol{\rho}$**.

Beispiel 9: $\rho: \mathbb{Z}_3 \to GL(2, \mathbb{C})\,;\, \rho([k]) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_3^k \end{pmatrix}$ hat den Charakter $\chi_\rho = 1 + \zeta_3^k \quad (k = 0, 1, 2)$