

Status der Mathematik bei Gödel

Manfred Hörz

In seinem Buch „Les démons de Gödel“ stellt Pierre Cassou-Noguès die platonisch inspirierte These auf, dass die Mathematik in der Sicht Gödels einen vom bewussten Ich unabhängigen Status hätte. Damit steht Gödel in einer langen Tradition von mathematisch und logisch inspirierten Denkern: Platon, Frege, Husserl, Popper, Wittgenstein ... , um nur einige Philosophen zu nennen.

Zunächst begründet Gödel diese These damit, dass es in der Mathematik Sachverhalte gebe, die uns nicht bekannt seien und dass wir demnach die (Grundlagen der) Mathematik nicht erzeugt hätten. Denn was wir bewusst erzeugen, davon müssen wir alle Eigenschaften auch kennen. Wir wissen bspw. immer noch nicht, ob es eine Formel für Primzahlen gibt oder nicht. Wir haben zwar Maschinen erzeugt, deren Produktionen wir nicht vollständig überblicken können, aber Maschinen sind nicht unabhängig von ihren konkreten physikalischen Realisierungen, die die Unvollkommenheiten unseres Wissens über sie erklären können.

Für Gödel gebe es zwei Erklärungen für den Status der Mathematik. Erstens übernimmt er Descartes' Denkansatz, ohne seine Argumentationen vollständig zu teilen. Descartes behauptete, dass wir endlichen Wesen die Idee eines Unendlichen (Gottes) in uns haben. Da ein endliches Wesen jedoch nicht die Unendlichkeit erzeugen könne, müsse es Gott selbst sein, der uns die Idee eingepflanzt hätte. Auch Gödel hat ja bekanntlich einen Gottesbeweis formuliert. Er glaubte an die Existenz eines Gottes. Nur Descartes Argument über das Unendliche teilt Gödel nicht. Es ist eine Möglichkeit für Gödel, dass bspw. Axiome der Mathematik, die ja nicht beweisbar sind, sondern intuitiv eingesehen werden, aus dem Geist Gottes stammen, zu dem wir in irgendeiner Weise in der Intuition Kontakt haben könnten.

In seinem berühmten Unvollständigkeitssatz weist er ja nach (zumindest für die Unendlichgläubigen), dass ein formales System, das reichhaltig genug ist, d.h. mindestens die natürlichen Zahlen enthält, nicht jede mathematisch wahre Aussage innerhalb des Systems formal herleiten könnte. In jedem derartigen System lassen sich solche wahren Aussagen angeben, die das gegebene System übersteigen. Diese wahren Aussagen dürften also per Intuition jenseits des Systems ermittelbar sein. Sie sind es in der Tat, da hierzu die Intuition der Unendlichkeit zählt, und die Unendlichkeit ist ja bekanntlich eine der definierenden Eigenschaften Gottes.

Die andere mögliche Erklärung hängt mit dem Unbewussten zusammen. Das Unbewusste ist dem Bewusstsein eben in der Regel nicht zugänglich, außer einigen Straßen, bspw. der des Traums, die Freud ja als die Königsstraße (via regia) zum Unbewussten empfand, oder eben der Straße der Intuition. Dieses Unbewusste ist dem bewussten Ego also ähnlich transzendent wie Gott, nur dass es irgendwie im kollektiven Menschen wurzelt. Denn kollektiv muss es sein, sonst wäre Mathematik nicht intersubjektiv mitteilbar. Gödel war mit einem Analytiker Jungscher Provenienz in Kontakt. Jung schuf ja das Konzept des kollektiven Unbewussten. Dieses für das Bewusstsein transzendente Reich soll aus den frühen Kindheitstagen stammen, in dem wir die mathematischen und logischen Grundlagen aufbauten, von denen wir Erwachsene keinen Begriff mehr haben (können).

Beide Erklärungen schlossen sich aber laut Cassou-Noguès nicht aus. Denn der zweite Ansatz erlaube nicht die Behauptung der Objektivität der Mathematik, nur deren Intersubjektivität. Dazu sei die Gottesthese im Stande. Interessanter Ansatz, wenn man ihn etwas modifiziert.

Mir ist Gödel deswegen sympathisch, weil er keine Denkhemmungen kennt, außer denen des logisch Unmöglichen (ähnlich wie im Übrigen Leibniz). Allerdings hätte ich auch davor keine Angst, wie man gleich sehen wird, wie ich hoffe. Das hängt mit der zweiten Gödelschen These

zusammen. Ich möchte mich dabei auf die Logik beschränken, weil sie grundlegender ist als die Mathematik. Wie entsteht Logik? Diese Frage impliziert zunächst, dass Logik nicht objektiv und transzendent ist wie viele Logiker glauben, sondern ihre Grundlage in anderen Verhältnissen findet. Zwar ist Logik transzendent bzgl. unserer konstruierten Welt, aber in einem Sinn, der der These des Unbewussten nahekommt.

Die menschliche Basis (nicht die Basis überhaupt) ist m.E. die Dialektik des Menschen, die in der Geburt ihren stiftenden Aus- und Eindruck erfährt. Sie ist der Angelpunkt der Entstehung unserer Welt, der empirischen wie auch der logisch-mathematischen. Sie ist der Neubeginn einer jeden Phase der weltlichen Evolution, die eben hier im menschlichen Stadium stattfindet.

Die Geburt ist ambivalent. Einerseits gewollt, andererseits bedauert, wie jeder Grenzüberschritt. Das Verlassen des Diesseits erzeugt Trauer des heimattrunkenen Menschen, aber das Jenseits, die Fremde, wird dennoch voll Ungeduld freudig erwartet. Da wir aber den Fluss der Lethe dabei überqueren müssen, bleibt auch der Anfang des Neuen noch ins Geheimnis und Dunkel gehüllt. An der Grenze sind wir weder hier noch dort. Wir sind orts- und heimatlos, ebenso wird es an der anderen äußeren Grenze werden, im Angesicht des Todes. Wir bauen uns durch den Dschungel der Neuen Welt neue Straßen, um uns hier nicht zu verlieren. Das ist Logik. Doch damit wird auch unser Leben geleert und getötet. Es kommt darauf an, diesem Dschungel nicht mehr als notwendig zu domestizieren durch kleine und oft unwegsame Pfade, auf denen wir noch die Wunder und Schönheiten der uns vorgängigen Welt erleben können. Das haben wir zumeist versäumt.

Doch wie entsteht nun dieser Weg der Logik? Die Hauptmethoden sind erzeugt durch unsere Not, die Differenz, der Abgrund und die Einheit, was sich in den Grundsätzen der Prälogik, dem Satz des Widerspruchs und dem der Identität darstellen wird.

Bei der Geburt ist die eine Seite die Trennung, die für das Kind ein emotionaler Schock ist und die es dadurch zu reparieren versucht, dass es diese Absonderung in eine semiotische, d.h. einer scheinbaren Reintegration lösen will. Oder genauer gesagt, es ist zunächst darauf angewiesen, dass diese partielle Reintegration ihm geschieht, so wie auch die reale Trennung ihm vorwiegend geschah. Das passiert auf mehrere Arten. Zuerst schafft sich das Kind eine neue abstrakte Welt, eine Umwelt, in der es integriert ist, den virtuellen Uterus, die unspezifische Situation. Diese hat zwei kontradiktorische Tönungen, die versöhnende, in der die nun diesseitige Mutter anwesend ist, die emotionale Erlösung, dann die gegenseitige der Abwesenheit, den Abgrund der Verlassenheit, der Angst. Diese gegenteilige Situationen bilden den emotionalen Hintergrund des Satzes vom Widerspruchs, die notwendige Bedingung der Konstruierbarkeit einer neuen Welt, die sich zeitlich in einem dynamischen Wechsel konstituiert. Damit ist die Intentionalität festgeschrieben, die von der Negativität zur Positivität zeigt und damit eine Teleologie und Zeitrichtung erzeugt. Noch ganz abstrakt, d.h. ohne Konkretion einer Wirklichkeit. Der eigene Teil und der Teil der Anderen (Mutter) wird im Ganzen der erlebten partiellen Einheit intuitiv, aber noch unklar erlebt.

Die Situationen sind der abstrakte, d.h. semiotischen Bausteine des entstehenden Bewusstseins und der Welt. Die Behagenssituationen sind Abglanz und Reminiszenz der symbiotischen intrauterinen nun jenseitigen Welt, die Unbehagenssituationen die diesseitigen Anteile der neuen Wirklichkeit. Der Übergang wird sozial vermittelt, zunächst von der Mutter. Es gibt also zwei verschränkte Folgen von gegensätzlichen Situationen. Die des Da und die des Nichtda. Beide unterliegen der kreativen subjektiven Integration. Weshalb? Weil die Da-Situationen nicht so da sind, wie es sie erwünscht. Es fehlt immer notwendigerweise etwas, selbst im optimalen psychischen Empfinden. Die Reintegration ist schlichtweg nicht möglich, die Geburt ist ein irreversibler Prozess, das physisch-psychische Geschehen der „Entropie“. Um diese mangelnde Qualität des Symmetriebruches weitgehend auszugleichen, wird quantitativ repariert. Das Kind integriert nun die mental erlebten Situationen in eine Folge von schematisierenden Situationen, die sich immer ähnlicher werden aufgrund des Überlagerungsprozesses. Sind sie hinreichend ähnlich, d.h. ist der Unterschied zwischen der schematisierten Situation S_n und der S_{n+1} so gering, dass die Kraft der Unterscheidung (ein Abkömmling der selbst initiierten Geburtsmimesis) nicht mehr ausreicht, also unterhalb eines Schwellwertes liegt, so identifiziert sie das Kind, d.h. es definiert

$S_n = S_{n+1} =: S$. Dies ist die erste Setzung, der spätere Satz der Identität. Damit erzeugt sich das Kind die ersten Bilder, Präobjekte und Begriffe, hier alles noch das Gleiche, d.h. ununterschieden. Und in eins das erste Bedürfnis, d.h. die erste logische Artikulation seines Unbehagens. Es ist eine Setzung ohne Differenz zu anderen (noch nicht vorhandenen) Bedürfnissen, aber in Differenz zu der Befriedigung, die den Begriff des Bedürfnisses erst ermöglicht. Das Unbehagen ist nämlich teleologisch auf das Behagen gerichtet, das nun logisch erwartet werden kann. Hat ein Kind bspw. lauter Behagenssituationen erlebt, in denen es die Mutter „gesehen“ hat, so ist sein Unbehagen als Bedürfnis, die Mutter zu sehen, verstanden, es hat das Bedürfnis, seine Mutter zu sehen. Hieran schließt sich dann eine weitere Aufspaltung an, die aus der Frustration der logischen Erwartung entsteht, in denen es die Mutter eben nicht sieht, aber trotzdem irgendwie zufrieden ist. Nach einer gewissen Zeit der Wiederholung hat es dann die Möglichkeit, eine neue Befriedigung zu artikulieren. Es hat damit zwei Befriedigungen A und B und infolgedessen zwei Bedürfnisse zur Verfügung.

Damit kann die nächste Stufe der Logik (außer dem fundamentalen Satz der Identität) entstehen: Die Und-Situation, in der das Kind eine Situation sowohl als A-Situation als auch als B-Situation identifizieren kann. Und so geht es weiter zu den anderen Junktoren auf der nächsten Stufe, bis es schließlich zu der höheren Stufe der Schlussfolgerung kommen kann. All diese Stufen sind Setzungen immer höheren und schwierigeren Grades. Allerdings nicht rein autonom, sondern von der sozialen Interaktion abhängig, die die Möglichkeit überhaupt erst erzeugt, solche Situationen zu definieren und kombinieren. Damit wird, glaube ich, in Ansätzen deutlich, wie die Logik aus den menschlichen Situationen und dem kreativen Akt der Integration dieser und dem passiven Geschehen der Differenzierung (logische Erwartung, die nicht befriedigt wird) der Folgen entsteht. Da erst später auf diese Logik reflektiert werden kann, da die Reflexion diese Logik voraussetzt, gehört sie nicht dem bewussten Subjekt, aber dem kreativen und sozialen Subjekt an.

Zum zweiten Punkt nun. Der göttlich-objektiven Seite der Logik und Mathematik.

Wie angekündigt, möchte ich diesen Punkt etwas anders sehen, nämlich als objektiven Naturprozess, der selbst die eben dargestellte intersubjektive menschliche Bewusstseinsbildung erzeugt. Grundlegend scheint mir der evolutionäre Vorgang zu sein, der durch die Struktur der Welt entsteht. Gödel nennt ihn Gott, man kann ihn vielleicht etwas adäquater, wenn man sich religiöser Metaphern bedienen will, die Tätigkeit des „heiligen Geistes“ nennen. Dieser Geist ist aber rein physikalischer Natur. Das philosophische Nichts, das Nicht-Sein, aus dem das Sein hervorgeht, ist am besten durch den virtuellen Raum, das Quantenvakuum, vorstellbar. In ihm aber regiert das Gesetz der Unbestimmtheitsrelation in der Form der wirklichen Wirkung. Zunächst aber der Zufall. Aus dem Nichts entsteht zufällig in einem Raum-Zeit-Gebiet eine Fluktuation, die das Entstehen zweier virtueller Photonen bedeutet, die sofort nach dem Entstehen wieder ins Nichts vergehen. Das Entstehen ist im Raum-Zeit-Gebiet zwar zufällig, aber nicht, dass es überhaupt entsteht. Leibnizens Frage, warum überhaupt etwas ist und nicht vielmehr nichts, kann m.E. beantwortet werden. Genau das ist die Grundstruktur und der Grundprozess der Welt, das Drehbuch vor der Realität. Es entsteht das Paar der Photonen, weil es sich erst dann wieder in Nichts auflösen, verbindet kann. Die Differenzierung ist der ermöglichende Grund für die Integration und die Integration, Vernichtung, ist der teleologische Grund für die Differenzierung. Aus dem Nichts differenzieren sich zwei (virtuelle) Photonen, um sich wieder vereinen zu können, die abstrakte Liebe. Allerdings hier noch sehr abstrakt, weil die Integration zur Vernichtung führt. Liebe erfüllt sich hier noch im Tod. Die weitere Entwicklung möchte ich hier nicht darstellen (siehe meinen Artikel über „Allgemeine Evolution“). Die vorgeburtliche Symbiose entspricht am Anfang der Welt dem Schlummern im Nichts. Die Geburt ist die Trennung von Photon und Antiphoton, die gleich sind. Dem Bedürfnis dort entspricht der Telos der Vereinigung hier, der Befriedigung dort der Tod, die Vernichtung hier. Nur dass die Geburt nicht mehr symmetrisch ist.

Dies scheint mir die objektive Struktur der Welt zu sein, ja sogar jeder möglichen Welt und ihre „Logik“. Der Unterschied der intersubjektiven und objektiven Realität ist also nur ein Unterschied in der Evolutionsstufe. Damit hat Gödel in der Tat die richtige Intuition.

Gödel zieht eine gewisse Analogie zwischen den sinnlichen Sinnen (Gesichtssinn, Tastsinn etc.) und einem andersartigen Sinn, dem der mathematisch-logischen Objekte. Jene sind die Schnittstelle zwischen der physischen Welt und uns, diese die Schnittstelle zwischen der geistig-mathematischen Welt und unser Vernunft. Die Vernunft vernimmt die mathematischen Objekte (und die Geister) aber auf eine andere Weise.

Ich meine, dass dieses Vernehmen eine Art Superposition der fremdartigen Objekte mit den Schwingungen unseres Geistes und Bewusstseins ist. Oder etwas anders formuliert: Meines Erachtens sind die Bausteine der Welt, egal welcher, der der Materie oder der der Energie die Photonen. Sie sind die geistigen Elemente, die Elemente eines jeden Geistes, sei es des tierischen oder menschlichen oder göttlichen und auch die Elemente der Materie.

Mit der herkömmlichen Welt, der Materie werden sie in der Regel über die Sinne und dann vermittelt über die neuronalen Prozesse letztlich von uns, dem Geist, wahrgenommen, indem der durch sie erzeugte Photonenkomplex in unserm Gehirn in Interaktion treten mit dem bereits konstituierten Photonenkomplex, unserer Seele, durch eine partielle Integration mittels Superposition beider. Dieser Integrationsprozess ist das, was in der Philosophie als Qualia versus dem rein neurobiologischen Aktivitätsmuster gedacht und verteidigt wird. Auch mathematische Objekte sind größtenteils kodierte Gedanken, die meist intersubjektiv vorliegen und in ihren Grundlagen die frühen Grundmethoden unserer Weltbildung ausmachen. Insofern sie den menschlichen Individuen gemeinsam sind, die eben den gleichen Entstehungsbedingungen aufgrund ihrer gemeinsamen biologisch-seelischen Ausstattung unterworfen sind, können sie auch als objektiv gelten, eben relativ in Bezug auf unsere Gattung. Aber, dass sie in einem unabhängigen Bereich existieren, kann ich nicht glauben. Es gibt nur eine Welt, die eine gemeinsame Grundstruktur hat, egal ob es Sinneswahrnehmungen der Dinge sind oder geistige Produktionen oder Vernehmungen.

Die geistige Kommunikation ist allgegenwärtig und auch die Grundlage sinnlicher Wahrnehmung. Sie ist uns heute in der Quantenfeldtheorie zu Bewusstsein gekommen. Sie behauptet ja, dass die Wechselwirkung von Elektronen mit Elektronen auf dem kommunikativen Austausch von virtuellen Photonen beruht, also das begründet, was traditionell als elektrische Kraft bezeichnet wurde. Aber diese Kommunikation findet noch früher statt, bevor es überhaupt Materie gibt. Nämlich zwischen den Photonen selbst. Diese Interaktion ist noch weitgehend unerforscht und steckt noch in ihren Anfängen. Selbst ganz am Anfang, noch vor der Existenz unserer Welt, liegt sie sogar deren Entstehung zu Grunde, allerdings nicht in Form realer, sondern virtueller Photonen. Diese erzeugen erst durch Integration die realen und diese wiederum unter speziellen Bedingungen die Materie. Licht, Materie, Leben und Gedanken sind aus dem gleichen Stoff. Ein Modell, bekanntlich ein gedankliches Phänomen, kann nur ein System modellieren, indem es unter Absehung gewisser Determinanten und Einengung von Prozessen, dennoch in stimmige Interaktion mit dem System kommt und zwar auf wirklich elementarer Basis. Denken und Sein ist gewissermaßen das Gleiche, oder besser gesagt, Denken ist ein Teilprozess des gedachten Objekts und unter Umständen auch eine Erweiterung. Es gibt eine photonale Interaktion zwischen beiden, insofern das Modell etwas taugt und wenn man will, wahr ist. Um ein einfaches Beispiel zu nennen: Wenn man sagt „es regnet“ und damit jemandem etwas mitteilen will, so muss das Regnen mit der Wahrnehmung des Regens zunächst eine gewisse Interaktion eingehen, die diese Wahrnehmung wahr macht. Wahrnehmung ist letztlich ein geistiger Teil des geistigen Parts des Regens. Eine „Falschnehmung“, beruht auf einer Superposition, die gewisse Verbindungen, also schwache Kohärenzen erzeugt, die jedoch den anderen Wahrnehmungskanälen widerspricht, wenn man mal von neurotischen Falschnehmungen absieht, die eine vorlangende Geistesproduktion mit Unterdrückung der Sinneswahrnehmung sein kann, da dadurch der innere Zustand stabilisiert wird. Sodann wird diese Wahrnehmung auf ähnliche oben beschriebene Art über Zeichen übermittelt, die dann wieder invers bekannte Interferenzen beim Cosubjekt erzeugen. Wichtig sind hierbei, die Schnittstellen, also die Zeichenproduktion und Interpretation genauer zu betrachten, was ich in diesem Kontext nicht beabsichtige.

Worauf es hier ankam, war zu vermitteln, dass auch Wahrnehmung in letzter Instanz von dem Vernehmen mathematischer Objekte nicht grundsätzlich verschieden ist und einer gänzlich anderen Welt angehört, wie Gödel zu meinen scheint. Ob nun ein Elektron mit einem anderen kommuniziert oder wir mit andern Cosubjekten oder ob wir einen mathematischen Satz erkennen, sind zwar phänomenal sehr verschieden, beruhen aber auf dem gleichen Grundprozess.