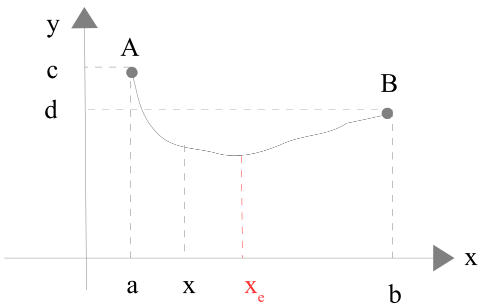
Herleitungen der Euler-Lagrange-Gleichung

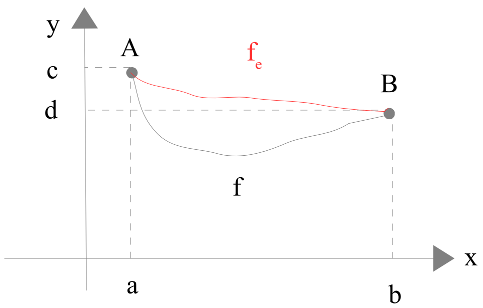
Manfred Hörz

1. ohne neue Hilfsmittel (Euler):

Beispiel: Brachystochrone

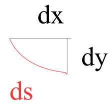
Im Gegensatz zu den klassischen Extremwertproblemen (1. Grafik), bei denen bei vorgegebener Funktion f diejenigen Argumente x gesucht werden, bei denen die Funktion f im Innern eines Intervalls $[a, b]$ stationär wird, handelt es sich nun um Probleme, bei denen nicht ein solches x gesucht wird, sondern eine *Funktion*, die ein bestimmtes Integral mit Randbedingungen stationär (i. a. extremal) werden lässt (2. Grafik).





Im zweiten Bild ist eine differenzierbare Funktion f_e gesucht, die für eine freie Punktmasse der schnellste Weg von A nach B ist unter Voraussetzung der Gravitation.

Ein infinitesimales Längenstück des Graphen ist $ds \approx \sqrt{dx^2+dy^2}$



Die Länge l des Graphen ist demnach $l=\int_a^b ds=\int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2}=\int_a^b dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$

Die Zeit, die dabei benötigt wird ist über den Energieerhaltungssatz $E=T+V=const$

berechenbar: Im Punkt A gilt: $V=-mg(c-d)$ und $T=0$, also ist $-mg(c-d)=const$

Für $a \leq x \leq b$ gilt $T(x)+V(x)=-mg(c-d)=-mgy(x)+\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ mit $y=y(x)=f(x)$

oder $-mg(c-d)=-mgy(x)+\frac{m}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}\right) \Rightarrow -g(c-d)=-gy(x)-\frac{1}{2}\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} \Rightarrow$

$$2g(y+d-c)=\frac{dx^2(1+\frac{dy^2}{dx^2})}{dt^2} \Rightarrow dt=dx\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y+d-c)}} \Rightarrow t=\int_0^{t_e} dt=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y+d-c}}\,dx$$

Das Integral $I(y,y')=\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y+d-c}}\,dx$ mit dem Integranden $\phi(y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y+d-c}}$ muss nun minimiert werden. Gesucht ist also die Funktion f_e bzw. $\phi(f_e, f'_e)$, sodass das Integral $I(y_e, y_e')=I(f_e, f_e')$ minimal bzw. stationär in f_e wird.

Bemerkung: y_e tritt hier nicht als abhängige Variable, sondern als Funktion f_e auf.

Zunächst zum klassischen Bild: Vermutet man an der Stelle x_e eine extremale Stelle, so darf eine *infinitesimale* Verschiebung bei x_e : $x_e \pm dx$ für die Funktionswerte keine Veränderung bringen: $df=f(x_e \pm dx)-f(x_e)=0$ (es muss dort eine waagrechte Tangente vorliegen).

Zum unteren Bild: Die Überlegung ist, kann ich das kompliziertere Problem mit den klassischen Mitteln behandeln? Dazu könnte man eine beliebige Funktion $f(x)$ mit den gegebenen Bedingungen mittels Fourier entwickeln. Dazu betrachtet man die Funktion f als periodisch zur Periode $b-a$. Die sin- und cos-Anteile der Fourierreihe müssen dann auch entsprechend gestreckt und verschoben werden:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2}+a_1\cos(z)+a_2\cos(2z)+\ldots+a_n\cos(nz)+b_1\sin(z)+b_2\sin(2z)+\ldots+b_n\sin(nz)$$

mit $z=\frac{2\pi}{b-a}(x-a)$ und mit eindeutigen Koeffizienten

$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$ und $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{p} f(x)\sin(kx)\,dx$. Wählt man n hinreichend groß, so

wird die Approximation beliebig gut.

Die Funktion f lässt sich nun durch ein $2n+1-Tupel$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ darstellen. Diesem Tupel ordnet man nun das obige Integral als Funktionswert zu. Graphisch hätte man im $\mathbb{R}^{2n+2}$ jedem Argument, Punkt $(a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$, also einer Funktion f einen Wert, also das Integral $I(f)$ zu geordnet, und der Graph dieser Zuordnung wäre eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Wir suchen also dasjenige Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ für das die Hyperfläche ein Minimum hat.

Geht man von der Hyperfläche im $\mathbb{R}^2$, der Graphenlinie, also dem oberen Bild in höhere

Dimensionen, so lässt sich das Problem ganz klassisch behandeln: um eine einheitliche Bezeichnung für die Variablen zu erhalten sei $\alpha_0=a_0,\dots,\alpha_{2n}=b_n$, dann ist

$$dI(f)=dI(a_0,\dots,b_n)=dI(\alpha_0,\dots,\alpha_{2n})$$

Damit ein stationärer Punkt vorhanden ist, muss gelten $dI=0$.

Zurück zum Brachystochronen - Beispiel:

Unser Integral $I(y)=\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y+d-c}}dx$ oder $I(y)=\int_a^b \phi(y,y')dx$ können wir

näherungsweise als endliche Summe betrachten, indem wir das Intervall $[a,b]$ zerlegen in Teilintervalle $[x_i,x_{i+1}]$ $i=0,\dots,m-1$ und $a=x_0, b=x_m$, $\xi_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$, $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ und die entsprechenden Ordinaten $y_i=f(x_i)$, also $c=y_0,\dots,y_m=d$. Weiter werde $f'(x_i)$ ersetzt (approximiert): $y_i'\approx\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{y_{i+1}-yi}{x_{i+1}-x_i}$

Das Integral ist der Grenzwert der approximierenden Summen

$S=S(y_1,\dots,y_{m-1})=\sum_{i=0}^{m-1}\phi(y_i,y_i')\Delta x_i$. Hierfür gilt analog:

$dS=0\Leftrightarrow\frac{\partial S}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial S}{\partial y_{m-1}}dy_{m-1}=0$ oder , da die dy_i unabhängig sind,

$\frac{\partial S}{\partial y_i}=0$ $(i=1,\dots,m-1)$. Zu beachten ist nun, dass in *zwei* Summanden y_i vorkommt:

in $\phi(y_{i-1},y_{i-1}')(x_i-x_{i-1})=\phi(y_{i-1},\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}})(x_i-x_{i-1})$ und in

$\phi(y_i,y_i')(x_{i+1}-x_i)=\phi(y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i})(x_{i+1}-x_i)$, die andern ergeben in dieser Ableitung Null.

$$\frac{\partial\phi(y_{i-1},y_{i-1}')(x_i-x_{i-1})}{\partial y_i}=\frac{\partial\phi(y_{i-1},y_{i-1}')(x_i-x_{i-1})}{\partial y_{i-1}'}\cdot\frac{\partial y_{i-1}'}{\partial y_i}=\frac{\partial\phi}{\partial y_{i-1}'}\cdot\frac{1}{x_i-x_{i-1}}(x_i-x_{i-1})=\frac{\partial\phi}{\partial y_{i-1}'}$$

Und $\frac{\partial\phi(y_i,y_i')(x_{i+1}-x_i)}{\partial y_i}=\frac{\partial\phi(y_i,y_i')}{\partial y_i}\cdot(x_{i+1}-x_i)+\frac{\partial\phi(y_i,y_i')(x_{i+1}-x_i)}{\partial y_i'}\cdot\frac{\partial y_i'}{\partial y_i}\cdot(x_{i+1}-x_i)=$
$=\frac{\partial\phi(y_i,y_i')}{\partial y_i}\cdot(x_{i+1}-x_i)+\frac{\partial\phi(y_i,y_i')}{\partial y_i'}\cdot\frac{-1}{x_{i+1}-x_i}\cdot(x_{i+1}-x_i)=$, also insgesamt

$$\frac{\partial S}{\partial y_i}=\frac{\partial \phi(y_{i-1})}{\partial y_{i-1}'}+\frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x_{i+1}-x_i)-\frac{\partial \phi(y_i)}{\partial y_i'}\Rightarrow\frac{\frac{\partial S}{\partial y_i}}{\Delta x_i}=\frac{\partial \phi}{\partial y_i}-\frac{\left(\frac{\partial \phi(y_i)}{\partial y_i'}-\frac{\partial \phi(y_{i-1})}{\partial y_{i-1}'}\right)}{\Delta x_i}$$

Da $\frac{\partial S}{\partial y_i}=0\Rightarrow\frac{\partial \phi}{\partial y_i}-\frac{\left(\frac{\partial \phi(y_i)}{\partial y_i'}-\frac{\partial \phi(y_{i-1})}{\partial y_{i-1}'}\right)}{\Delta x_i}=\frac{\partial \phi}{\partial y_i}-\frac{\Delta\frac{\partial \phi}{\partial y_i'}}{\Delta x_i}=0$. Für $\Delta x_i\rightarrow 0$ gilt dann in der Regel $\frac{\partial \phi}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i'}\right)=0$ für alle $(i=1,\ldots,m-1)$. Da für hinreichend großes m die x_i und entsprechend die y_i jedem Punkt des Intervalls $[a,b]$ beliebig nahe kommen, gilt die Differenzialgleichung $\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right)=0$ im ganzen Intervall $[a,b]$.

Das ist die konventionell hergeleitete Gleichung von Euler.

Sie hat allerdings einen Nachteil. Der doppelte Grenzwertprozess muss nicht immer gültig sein.

2. Herleitung mit Variationsrechnung (Lagrange)

Zunächst soll das Fundamentallemma der Variationsrechnung angegeben werden, das von Lagrange stillschweigend vorausgesetzt wurde.

Def: Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ eine offene Menge. Und $f:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ eine Funktion.

$Tr(f)=\overline{\{x\in\Omega/f(x)\neq 0\}}$ heißt der **Träger (Support) von f,** also die abgeschlossene Hülle der verschwindenden Funktionsstellen.

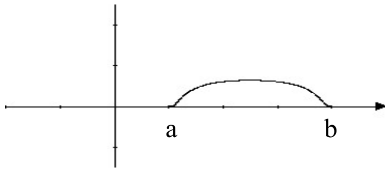
Beispiel 1: $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}; f(x)=x$ **.** f wird nur bei 0 Null, an alle anderen Stellen ist f nicht Null. Die abgeschlossene Hülle ist dann wieder $\mathbb{R}$, also $Tr(f)=\mathbb{R}$

Beispiel 2: $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R};\begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} & a<x<b \\ 0 & sonst\end{cases}$ hat als Träger die kompakte Menge $[a,b]$. Man nennt ihn daher **kompakten Träger**.

Def: Eine Funktion $f:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ heißt **glatt,** wenn sie beliebig oft differenzierbar ist. Man schreibt das auch als $f\in C^{\infty}$.

Beispiel: Jede Polynomfunktion ist glatt. Auch die obige Funktion aus Beispiel 2 ist glatt, denn bezeichnet man mit $p(x)=(x-a)(x-b)$, so ist die Ableitung von $f(x)=e^{\frac{1}{p}}$:
$f'(x)=-\frac{p'}{p^2}f(x)$. $\lim_{x\rightarrow a^+}p(x)=0^-$ und $\lim_{x\rightarrow b^-}p(x)=0^-$ $\lim_{x\rightarrow a^+}p'(x)=a-b<0$

$\lim\limits_{x\to b^-} p'(x)=b-a>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=0^+$ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=0^+$ Also $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=0^+$ $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)=0^-$



Die n-te Ableitung ist $f^{(n)}=\frac{q(x)}{p^{2^n}} e^{\frac{1}{p}}$ wobei $q(x)$ ein Polynom ist mit $\lim q(x)\neq 0$ und $\lim q'(x)\neq 0$ also $\lim f^{(n)}=0$ jeweils für $x\to a^+$ und $x\to b^-$.

Nachweis über vollst. Induktion.

Def: Eine Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$ die glatt ist und einen kompakten Träger hat, heißt **Testfunktion**.

Die Funktionen aus Beispiel 1 und 2 sind Testfunktionen.

Fundamentallemma der Variationsrechnung (Heine, du Bois-Reymond):

Sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und gelte für alle Testfunktionen $h:]a,b[\to\mathbb{R}$ $\int_a^b f(x)h(x)\,dx=0$, dann ist die Funktion f die Nullfunktion.

Beweis indirekt: Sei f nicht die Nullfunktion, dann gibt es eine Stelle $\xi\in]a,b[$ für die f nicht Null ist. Sei nun $f(\xi)>0$ (für $f(\xi)<0$ geht der Beweis ganz analog). Da f stetig, gibt es eine Umgebung $U(\xi)=]c,d[=]\xi-\epsilon,\xi+\epsilon[\subseteq]a,b[$ mit $f(x)>k>0$ für alle x $\in U(\xi)$. Es muss nun gezeigt werden, dass es eine Funktion h gibt mit den oben erwähnten Eigenschaften , sodass

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx\neq 0 \quad . \quad h(x):=\begin{cases} e^{\frac{1}{(x-c)(x-d)}} & x\in U(\xi) \\ 0 & x\in]a,b[\setminus U(\xi) \end{cases} \quad .$$

Nach obiger Bemerkung ist h eine Testfunktion in $]a,b[$. Es gilt

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx=\int_a^c f(x)h(x)\,dx+\int_c^d f(x)h(x)\,dx+\int_d^b f(x)h(x)\,dx=0+\int_c^d f(x)h(x)\,dx+0>$$

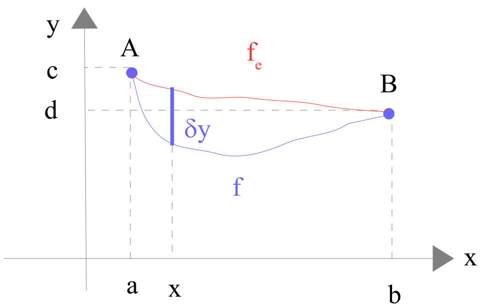
$>k\int_c^d h(x)\,dx>0$ da $k>0$ h in der Umgebung positiv ist.

Ich kehre nun zurück zu dem Funktional im Beispiel der Brachystochrone. Es war das Integral

$I(y)=\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y+d-c}}\,dx$ zu minimieren durch geeignete Wahl der Funktion $y=f(x)$.

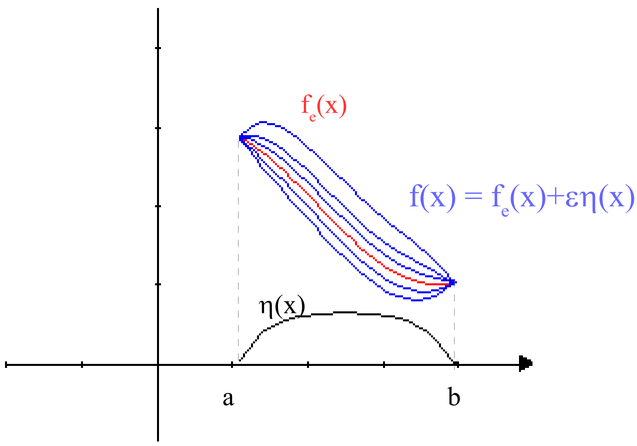
Dies Integral nennt man auch **Funktional**, das jeder Funktion f mit $y=f(x)$ eine Zahl $I(y)$ zuordnet. Der Integrand ist eine Funktion, die aus der Funktion f, ihrer Ableitung und anderen

Konstanten aufgebaut ist und eventuell noch mit der unabhängigen Variablen x. Sie werde allgemein mit $\phi(f, f', x) = \phi(y, y', x)$ bezeichnet. Es liegt also das Integral, Funktional $\int_a^b \phi(y, y', x)\,dx$ vor, dessen Wert minimiert oder allgemeiner stationär werden soll.



Wenn es eine Funktion gibt, die das leistet, so soll sie wieder f_e heißen. Die Funktion f_e wird nun variiert, d.h. eine andere stetige Funktion f gewählt, die **für jeden festen x-Wert** den y-Wert von f_e infinitesimal mit δy variiert. Dabei sollen die Randwerte jedoch unverändert bleiben: $f(a) = f_e(a)$ und $f(b) = f_e(b)$. Für die übrigen x-Werte gilt also jeweils $f(x) = f_e(x) + \delta y(x)$.

Damit diese (unendlich vielen) Variationen der y-Werte kohärent geschehen, ist es günstig von einer beliebigen glatten Funktion $\eta(x)$ auszugehen, die in a und b Nullstellen besitzt und die durch die berühmte Größe ϵ die Kohärenz für alle $\delta y(x)$ erreicht: $f(x) = f_e(x) + \epsilon\eta(x)$, also ist $\delta y(x) = \epsilon\eta(x)$. Wegen der Randbedingung $\eta(a) = \eta(b) = 0$ ist auch garantiert, dass $f(a) = f_e(a)$ und $f(b) = f_e(b)$ gilt.



Je geringer ϵ , desto kleiner die Differenz $\delta f_e(x) = f(x) - f_e(x) = \epsilon\eta(x)$, **die Variation von** $\boldsymbol{f_e}$. Sie ist also eine gänzlich neue Funktion, die Funktion $\epsilon\eta(x)$.

Die Ableitung der Variation von $\boldsymbol{f_e}$ ist:

$$\frac{d}{dx}\delta f_e(x) = \frac{d}{dx}\epsilon\eta(x) = \epsilon\frac{d}{dx}\eta(x) = \epsilon\eta'(x)$$

Euler-Lagrange-Gleichung als notwendiges Kriterium für extremales Funktional:

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\eta:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Testfunktion mit $\eta(a)=\eta(b)=0$ (mit den anderen geeigneten Voraussetzungen). Damit das Funktional

$I(f)=\int_a^b \phi(f,f',x)\,dx$ extremal wird, muss die Euler-Lagrange-Gleichung

$\frac{\partial\phi}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\phi}{\partial f'}=0$ gelten.

Beweis: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=f_e(x)+\epsilon\eta(x)$, eine variierte Funktion von f_e. wobei f_e die extremale Funktion ist, d.h. diejenige, die das Funktional $I(f_e)$ extremal macht.

Das Integral $I(f)=I(f_e+\epsilon\eta)=:\varphi(\epsilon)$ ist eine Funktion von ϵ. Die Variation von I ist

$\delta I:=I(f_e+\epsilon\eta)-I(f_e)=\varphi(\epsilon)-\varphi(0)$ und also ist

$$\delta I=\int_a^b \phi(f_e+\epsilon\eta, f_e'+\epsilon\eta, x)\,dx-\int_a^b \phi(f_e, f_e', x)\,dx=\int_a^b \phi(f_e+\epsilon\eta, f_e'+\epsilon\eta', x)-\phi(f_e, f_e', x)\,dx$$

Entwickelt man nun $\varphi(\epsilon)$ an der Stelle $\epsilon_0=0$ nach Taylor (Maclaurin) bis zur ersten Ordnung, ergibt das $\varphi(\epsilon)=\varphi(0)+\varphi'(0)\epsilon$ und also

$\delta I=\varphi(\epsilon)-\varphi(0)=\varphi'(0)\epsilon=\epsilon\frac{d}{d\epsilon}I(f)|_{\epsilon=0}=\epsilon\frac{d}{d\epsilon}\int_a^b \phi(f_e+\epsilon\eta, f_e'+\epsilon\eta', x)\,dx|_{\epsilon=0}=$ (wegen

Vertauschbarkeit von Ableitung und Integration)

$$=\epsilon\int_a^b \frac{d}{d\epsilon}\phi(f_e+\epsilon\eta, f_e'+\epsilon\eta', x)\,dx|_{\epsilon=0}=\epsilon\int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial\epsilon}+\frac{\partial\phi}{\partial f'}\frac{\partial f'}{\partial\epsilon}\,dx|_{\epsilon=0}\Rightarrow$$

$\varphi'(0)=\int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial\epsilon}+\frac{\partial\phi}{\partial f'}\frac{\partial f'}{\partial\epsilon}\,dx|_{\epsilon=0}$ und da $\frac{\partial f}{\partial\epsilon}=\eta$ und $\frac{\partial f'}{\partial\epsilon}=\eta'$ gilt weiter

$\varphi'(0)=\int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial f}\eta+\frac{\partial\phi}{\partial f'}\eta'\,dx=\frac{\delta I}{\epsilon}$. Da f_e extremal, muss $\frac{\delta I}{\epsilon}=\frac{I(f_e+\epsilon\eta)-I(f_e)}{\epsilon}=0$

für alle η mit hinreichend kleinem ϵ. Wäre das nicht der Fall, also $\frac{\delta I}{\epsilon}>0$ o.B.d.A., so würde die Ersetzung von η durch $-\eta$ und damit η' durch $-\eta'$ den Quotienten $\frac{\delta I}{\epsilon}<0$ negativ machen und I wäre für f_e nicht extremal. Also ist für alle η

$\int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial f}\eta+\frac{\partial\phi}{\partial f'}\eta'\,dx=\frac{\delta I}{\epsilon}=0$. Man verändert den zweiten Teil des Integrals über partielle

Integration und kann dadurch das η innerhalb des Integrals ausklammern:

$\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial f'}\eta' dx = \left[\frac{\partial \phi}{\partial f'}\eta\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'}\eta$, wobei wegen $\eta(b)=\eta(a)=0$

$\left[\frac{\partial \phi}{\partial f'}\eta\right]_a^b = 0$ nur das letzte Integral $\int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'}\eta$ übrig bleibt, so dass nach Einsetzen des Resultats der partiellen Integration in

$\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial f}\eta + \frac{\partial \phi}{\partial f'}\eta' dx = 0$ sich ergibt $\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial f}\eta - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'}\eta dx = 0$ oder

$\int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'}\right)\eta dx = 0$ für alle Testfunktionen η , sodass nach dem Fundamentallemma

der Variationsrechnung gilt $\frac{\partial \phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'} = 0$.

3. Herleitung über d'Alemberts Prinzip

Es soll nun die Euler-Lagrange-Gleichung in der Form $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, n$
unter gewissen Voraussetzungen hergeleitet werden (s.u.) und zwar aus dem **Prinzip von d'Alembert**, das das zweite Axiom von Newton erweitert:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\boldsymbol{F_k} - \dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{k}}\right) \cdot \delta \boldsymbol{r_k} = 0$$

für ein System aus N Teilchen. Da nach Newton $\boldsymbol{F_k} - \dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{k}} = 0$ ist das Skalarprodukt mit dem virtuellen Verschiebungsvektor $\delta \boldsymbol{r_k}$ natürlich auch Null und die Summe aus lauter Nullen wieder Null. $\boldsymbol{F_k}$ ist die Kraft, die auf das k-te Teilchen einwirkt.

Hierdurch wird das Newtonsche zweite Axiom überführt in eine Aussage über (virtuelle) Energie und demnach dem Leibnizschen Ansatz angepasst.

Zunächst soll das Prinzip skalar in kartesischen Koordinaten reformuliert werden mit $n = 3\mathrm{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_i - \dot{p}_i\right)\delta x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} F_i \delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \delta x_i = 0$$

Weiter soll angenommen werden, dass k Zwangsbedingungen vorliegen, so dass sich der Freiheitsgrad auf $n-k$ reduziert und wir nur $n-k$ generalisierte Koordinaten brauchen:

Die Transformationsgleichungen sind
$$\begin{array}{c} x_1 = f_1(q_1, \ldots, q_{n-k}, t) \\ \vdots \\ x_n = f_n(q_1, \ldots, q_{n-k}, t) \end{array}$$

Für δx_i ergibt sich $\delta x_i=\sum_{j=1}^{n-k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j$.

Der erste Summand $\sum_{i=1}^{n} F_i \delta x_i$ ist gerade die virtuelle Arbeit δW , d.h. die Arbeit bei virtueller Verschiebung:

$\delta W=\sum_{i=1}^{n} F_i \delta x_i=\sum_{i=1}^{n} F_i\left(\sum_{j=1}^{n-k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)=\sum_{j=1}^{n-k}\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$. Den Klammerterm im letzten

Ausdruck nennt man die **generalisierte Kraft** $Q_j=\sum_{i=1}^{n} F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ **,** da die Arbeit (hier δW) elementar ja als Kraft mal Weg (hier δq_j) definiert wurde. Dann wird die virtuelle Arbeit zu

$$\delta W=\sum_{j=1}^{n-k} Q_j \delta q_j \quad .$$

Nun der zweite Summand ist $\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\sum_{j=1}^{n-k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j=\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{x}_i\sum_{j=1}^{n-k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j$

Da weiter $\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\overset{PR}{=}m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+m_i\dot{x}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ und das nach $m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ aufgelöst:

$$m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)-m_i\dot{x}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad \text{und}$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_j}x_i=\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d}{dt}x_i \overset{\text{Vertauschbarkeit von }\frac{\partial}{\partial q_j}\text{ mit }\frac{d}{dt}}{=} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$ und $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}$ gilt weiter

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\delta x_i=\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{x}_i\sum_{j=1}^{n-k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j=\sum_i\sum_j\left(m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=\sum_{i,j}\left(\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)-m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=$$

$$=\sum_{i,j}\left(\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

Mithilfe der kinetischen Energie T gilt: $\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right)=\sum_i\frac{1}{2}m_i\frac{\partial}{\partial q_j}\dot{x}_i^2$ und da

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\dot{x}_i^2=\frac{\partial}{\partial q_j}\dot{x}_i\dot{x}_i=\dot{x}_i\frac{\partial}{\partial q_j}\dot{x}_i+\frac{\partial}{\partial q_j}\dot{x}_i\cdot\dot{x}_i=2\dot{x}_i\frac{\partial}{\partial q_j}\dot{x}_i \quad \text{und also}$$

$\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_i m_i\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ und analog $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\sum_i m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}$ und somit ist der zweite Summand

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\delta x_i=\sum_{i,j}\left(\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=\sum_j\left(\frac{d}{dt}\sum_i m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}-\sum_i m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=$$

$$=\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Das gesamte Prinzip ist dann:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i - \dot{p}_i) \delta x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} F_i \delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \delta x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-k} Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^{n-k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \Leftrightarrow$$

$\sum_{j=1}^{n-k} \left(Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$ und da alle δq_j unabhängig sind, gilt

$$Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für alle} \quad j = 1, \dots, n-k$$

Das ist die **Nielsen Form** (Jakob Nielsen) der Euler-Lagrange-Gleichungen, formuliert mithilfe kinetischer Energie und generalisierten Kräften.

Unter der Bedingung, dass die generalisierten (konservativen) Kräfte Q_j aus einem Potenzial V ableitbar sind, d.h. dass $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ gilt, wird die Nielsen Form zu $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

und unter der zusätzlichen Bedingung, dass das Potenzial V unabhängig von den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ ist, dass also $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ gilt, wird die Nielsensche Gleichung zu

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ oder $\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ oder

$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$ und mit $L = T - V$ schließlich die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad .$$

4. Herleitung über das Prinzip von Hamilton

Der Unterschied zu „2 . Herleitung mit Variationsrechnung“ ist letztlich nur der verschiedener Symbole und eines allgemeineren Standpunkts.

Sei ein System von N Teilchen gegeben, das in $n = 3\mathrm{N}$ kartesischen Koordinaten dargestellt werden kann. Und seien wieder k Zwangsbedingungen gegeben, die die Anzahl unabhängiger Koordinaten auf $n-k$ unabhängige reduziert. Zu einer festen Zeit heißt diese Menge von unabhängigen Koordinaten der Konfigurationsraum des Systems. Man kann dann das ganze System zu einer festen Zeit als Punkt in diesem Konfigurationsraum ansehen. Den Punkt beschreibt man in generalisierten Koordinaten $(q_1, \dots, q_{n-k})$. Lässt man die Zeit wieder beweglich, so ändert der Punkt im Konfigurationsraum seine Stelle kontinuierlich. Ist t_1 die Anfangszeit der Betrachtung und t_2 die Endzeit, so gibt man die Bahn (Spur, Pfad, Kurve, Trajektorie) des Systems im

Konfigurationsraum als $\boldsymbol{q}(t)=(q_1(t),\ldots,q_{n-k}(t))\quad t_1\leq t\leq t_2$ an. Es gibt in diesem Raum unendlich viele mögliche Bahnen, wobei man annimmt, dass das System genau eine durchläuft. Hamilton war der Ansicht, dass die tatsächlich angenommene Bahn dadurch charakterisiert werden kann, dass sie die Wirkung S (Aktion), d.h. $S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ minimiert. Die Wirkung ist L, also $L=T-V$ Energie, mal Zeit und $L=L(q_1,\ldots,q_{n-k},\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_{n-k},t)$.

Das bedeutet nun bekanntermaßen, dass die Variation des Wirkungsintegrals in Bezug auf die tatsächliche Bahn Null sein muss:

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=0.$$

Die notwendige Bedingung hierfür ist wieder das System aus den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0\quad j=1,\ldots,n-k\quad .$$

Da die Herleitung strukturell identisch ist wie unter 2. nur dass die Namen andere sind, wird darauf hier verzichtet.