Mengentheoretische Topologie

Manfred Hörz

Eine nichtleere Menge M mit einer Teilmenge T der Potenzmenge $\wp(M)$ von M, heißt **topologischer Raum** mit der **Topologie** T, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(T_1) $\emptyset \in T$ und $M \in T$
(T_2) $O_1 \in T \wedge O_2 \in T \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in T$
(T_3) $\bigwedge_{i \in I} O_i \in T \Rightarrow (\bigcup_{i \in I} O_i) \in T$

Die Mengen aus T heißen **offen**. Die Komplemente von offenen Mengen heißen **abgeschlossen**.

Die kleinste („gröbste“) Topologie einer beliebigen Menge M ist $T = \{\emptyset, M\}$ und heißt die **triviale** oder die **Klumpentopologie**.
Die größte („feinste“) Topologie einer beliebigen Menge M ist $\wp(M)$ und heißt die **diskrete Topologie** von M.

Beispiel 1: Jede einelementige Menge M lässt sich ausschließlich mit der Klumpentopologie versehen, die hier gleichzeitig die diskrete ist: $M = \{a\} \Rightarrow \wp(M) = \{\emptyset, M\}$

Beispiel 2: Eine zweielementige Menge $M = \{a, b\}$ besitzt vier Teilmengen: $\wp(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\}$ und damit auch vier Topologien: $T_1 = \{\emptyset, M\}$, $T_2 = \{\emptyset, \{a\}, M\}$, $T_3 = \{\emptyset, \{b\}, M\}$, $T_4 = \wp(M)$

Ist N eine nichtleere echte Teilmenge von N, so ist $T = \{\emptyset, N, M\}$ eine Topologie von M.
Ist $Z = \{\emptyset \neq N_i \subset M / i \in I\}$ eine Zerlegung von M, so ist $T = \{\emptyset, N_1, \ldots, N_i, \ldots, \bigcup_{i \in I' \subseteq I} N_i\}$ eine Topologie von M. $Z \cup \{\emptyset\}$ nennt man **Basis** dieser Topologie T, weil man alle offenen Mengen dieser Topologie als Vereinigungen aus Mengen der Basis darstellen kann.

Beispiel 3: Für $M = \{a, b, c\}$ besitzt man schon $29 = 1 + (3+3) + (3+6) + (3+3) + 6 + 1$ verschiedene Topologien. Beispielsweise ist $T = \{\emptyset, M, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ eine von 6 verschiedenen Topologien mit 6 offenen Mengen. Eine Topologie der Mächtigkeit 7 gibt es nicht.

Mächtigkeit	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	1	3+3	3+6	3 +3	6	0	1

Es gibt 9 strukturell verschiedene Topologien (unter Berücksichtigung der topologischen Äquivalenz).

Beispiel 4: $M = \mathbb{R}^n$ Unter der $\boldsymbol{\epsilon}$**– *Kugel um x*** versteht man $K_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n / \| y - x \| < \epsilon\}$.
Die **Standardtopologie** des $\mathbb{R}^n$ ist $T_S = \{O \subseteq \mathbb{R}^n / \bigwedge_{x \in O} \bigvee_{\epsilon > 0} K_\epsilon(x) \subseteq O\}$.

Eine Teilmenge B von T des topologischen Raums (M, T) heißt **Basis von T,** wenn jede offene Menge $O \in T$ sich als Vereinigung von Mengen aus B darstellen lässt.

B **Basis von T** $\Leftrightarrow \bigwedge_{O \in T} \bigvee_{B' \subseteq B} O = \bigcup_{U \in B'} U$.

Eine Teilmenge S von T des topologischen Raums (M,T) heißt **Subbasis von T**, wenn jede offene Menge $O \in T$ sich als Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus S darstellen lässt.

Ist $S \subseteq \wp(M)$ eine Menge von Teilmengen eines topologischen Raums (M,T), dann ist $T(S)$ die gröbste Topologie von M, die S enthält. $T(S)$ heißt die von **S erzeugte Topologie,** $<S>:=T(S)$. S ist dann Subbasis von $<S>$.

Man vereinbart hierzu noch, dass $\emptyset$ die „leere" Vereinigung ist (d.h. gar keine Mengen werden vereinigt) und M der „leere" Durchschnitt ist.
Wählt man alle endlichen Schnitte einer Subbasis, so erhält man daraus eine Basis.

Beispiel 1: $M=\{a,b,c\}$ und $T=\{\emptyset, M, \{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. Dann ist $B=\{\{a\},\{b\},\{a,b,c\}\}$ Basis von T und $S=\{\{a\},\{b\}\}$ Subbasis, denn Die Durchschnitte sind $\emptyset, M$ als leerer Durchschnitt $,\{a\},\{b\}$. Die Vereinigungen davon ergeben: $\emptyset, M, \{a\},\{b\},\{a,b\}$. $T=<S>$.

Beispiel 2: $M=\mathbb{R}$ Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Standardtopologie T_S.
$K_r(x)=]x-r, x+r[$ ist offenes Intervall für jedes $x, r \in \mathbb{R}$ mit Mittelpunkt x und Radius r. Sei $O \in T_S \Rightarrow \bigwedge_{x \in O} \bigvee_{r>0} K_r(x) \subset O$ Dann ist $O=\bigcup_{x \in O} K_r(x)$. Denn sei

$y \in O \Rightarrow \bigvee_{r>0} K_r(y) \subset O$, da $y \in K_r(y)$ folgt $y \in \bigcup_{x \in O} K_r(x)$. Andrerseits sei

$y \in \bigcup_{x \in O} K_r(x) \Rightarrow \bigvee_{x \in O} y \in K_r(x)$ und da $K_r(x) \subset O$ ist auch $y \in O$.
Wählt man $x, r \in \mathbb{Q}$, so ist diese Basis abzählbar.

Als Subbasis kommt in Frage: $S=\{]-\infty, b[,]a, \infty[\ / a, b \in \mathbb{Q}\}$. Auch sie ist abzählbar. Jedes offene Intervall $]a,b[$ lässt sich als Schnitt zweier Intervalle $]-\infty, b[\cap]a,\infty[$ darstellen, wenn $a<b$.

Man verlangt von einer Basis jedoch nicht, dass sie minimal ist, wie bei Vektorräumen.

Teilraumtopologie

Ist T Topologie auf M und $N \subseteq M$ eine Teilmenge von M.

Dann ist die Menge $T|_N=\{U \cap N / U \in T\}=\{O \subseteq N / \bigvee_{U \in T} O=U \cap N\}$ eine Topologie auf N und heißt die **Teilraumtopologie** oder die **von N induzierte Topologie** oder auch die **Relativtopologie oder Spurtopologie bzgl. N.**

Bew.: (1) $\emptyset \in T|_N$, da $\emptyset \cap N=\emptyset$ $N \in T|_N$, da $N=M \cap N$
(2) Mit $U_1 \cap N$ und $U_2 \cap N$ ist auch $(U_1 \cap N) \cap (U_2 \cap N) \in T|_N$, denn: $(U_1 \cap N) \cap (U_2 \cap N)=(U_1 \cap U_2) \cap N$
(3) $\bigcup_i (U_i \cap N)=(\bigcup_i U_i) \cap N$

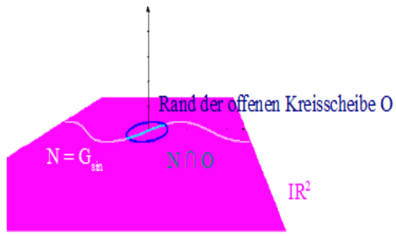
Eine Menge $A \subseteq N$ **ist abgeschlossen in** N $\Leftrightarrow \overline{A}=N \setminus A$ offen in $N \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow N\setminus A = O\cap N$ mit $O\in T \Leftrightarrow A = N\setminus(O\cap N) = N\setminus O = N\cap(M\setminus O)$ mit $M\setminus O$ abgeschlossen in M .

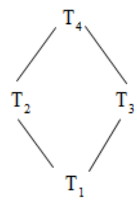
Eine Menge $A\subseteq N$ ist also abgeschlossen in N genau dann, wenn $A = N\cap B$ mit B abgeschlossen in M .
Die offenen bzw. abgeschlossenen Mengen in N sind also die „Spuren“ von den entsprechenden offenen bzw. abgeschlossenen Mengen in M.

Beispiel 1: Sei $M=\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie $S=\{O\subseteq\mathbb{R} / \bigwedge_{x\in O}\bigvee_{r>0} K_r(x)\subseteq O\}$ mit $K_r(x)=\{y\in\mathbb{R}/\|x-y\|<r\}$. Sei weiter $I\subseteq\mathbb{R}$ Intervall und $]a,b[\subset I$ offen in S, dann ist $]a,b[\cap I=]a,b[$ offen in I mit der Relativtopologie T_I .
$[a,b]\subset I$ ist abgeschlossen in S, also ist $[a,b]=[a,b]\cap I$ abgeschlossen in I.

Beispiel 2: Sei $M=\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der Standardtopologie S:
$S=\{O\subseteq\mathbb{R}^2/ \bigwedge_{\boldsymbol{x}\in O}\bigvee_{r>0} K_r(\boldsymbol{x})\subseteq O\}$ mit $K_r(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2/\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<r\}$ und sei $N=G_{\sin}$ Graph der Sinus-Funktion und $O=K_1((0,0))$ die offene Einheitskreisscheibe. Dann ist $N\cap O$ offen in N, aber nicht offen in $(\mathbb{R}^2, S)$, da es bspw. zum Ursprung $(0,0)$ keine offene Kreisscheibe gibt, die Teilmenge von $N\cap O$ ist.



Beispiel 3: $Sei\, M=\{a,b\}$. Dann gibt es genau vier mögliche Topologien auf M.
Die triviale (gröbste) Topologie $T_1=\{\emptyset,M\}$, $T_2=\{\emptyset,M,\{a\}\}$, $T_3=\{\emptyset,M,\{b\}\}$ und die diskrete (feinste) Topologie $T_4=\{\emptyset,M,\{a\},\{b\}\}=\wp(M)$.
Sei (M,T_2) der topologische Raum und $N=\{a\}\subset M$.
Dann ist $T_2|_N=\{\emptyset,N\}$ die Relativtopologie, die einzige, die auf N möglich ist, die zugleich trivial und diskret ist.
In diesem Fall sind alle offenen Mengen in N auch offen in M.



Beispiel 4: Sei wieder $M=\mathbb{R}^2$ versehen mit der Standardtopologie S und $N=S^1=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2/\|\boldsymbol{x}\|=1\}$ der Einheitskreis oder die eindimensionale Einheitssphäre.
Die Relativtopologie $S|_{S^1}$ besteht aus der Vereinigung von „offenen“ Kreisbögen, deren Endpunkte (Randpunkte) nicht dazu gehören.
$B_{\mathbb{R}^2}=\{K_r(\boldsymbol{x})/x\in\mathbb{R}^2, r>0\}$, die Menge aller offenen r-Kreisscheiben ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Sei $\phi:\mathbb{R}\to S^1, t\mapsto(\cos(t),\sin(t))$, dann ist
$B_{\mathbb{R}^2}\cap S^1=\{\phi(]a,b[), a,b\in\mathbb{R}, a<b\}=B_{S^1}$ Basis der Einheitssphäre, die aus „offenen Bögen“ besteht.

Beispiel 5: Die Menge aller komplexen (2 ,2)-Matrizen $Mat(2,\mathbb{C})$ ist homöomorph (siehe unten) zu $\mathbb{C}^4$, mit der Standardtopologie (Normtopologie) versehen. Die euklidische Norm in $\mathbb{C}^n$ ist definiert durch $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|x_1|^2+...+|x_n|^2}=\sqrt{\overline{x_1}\,x_1+...+\overline{x_n}\,x_n}=\sqrt{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>}$.
$K_r(\boldsymbol{x}):=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n/\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<r\}$ heißt offene **r-Kugel um x.**
Die **Standardtopologie** T_S des $\mathbb{C}^n$ ist nun $T_S=\{O\subset\mathbb{C}^n/\bigwedge_{x\in O}\ \bigvee_{r>0} K_r(\boldsymbol{x})\subseteq O\}$.
Die Relativtopologie von $SU(2)=\{A\in Mat(2,\mathbb{C})/A^\dagger=A^{-1}\wedge det\,A=1\}$ =
$=\left\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2\\ -\overline{z_2} & \overline{z_1}\end{pmatrix}/|z_1|^2+|z_2|^2=1\right\}$ der unitären (2, 2)-Matrizen mit positiver Determinante (die komplexe Rotationsgruppe) ist
$T_S|_{SU(2)}=\{O\cap SU(2)/O\subset\mathbb{C}^4,\bigwedge_{x\in O}\ \bigvee_{r>0} K_r(\boldsymbol{x})\subseteq O\}$.

Quotiententopologie

Sei T eine Topologie auf M. Sei weiter N eine Menge und $f:M\rightarrow N$ eine surjektive Abbildung. Die Menge $O:=\{U/U\subseteq N\wedge f^{-1}(U)\in T\}$ ist dann eine Topologie auf N und heißt die von f auf N induzierte **Quotiententopologie** von $N=M/f$ oder **Identifizierungstopologie**. Damit ist f gleichzeitig stetig.

Bew.: $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in T\Rightarrow\emptyset\in O$, $f^{-1}(N)=M$, da f surjektiv $\Rightarrow N\in O$, weil $M\in T$,
$U_1,U_2\in O\Rightarrow f^{-1}(U_1\cap U_2)=f^{-1}(U_1)\cap f^{-1}(U_2)\in T\Rightarrow U_1\cap U_2\in O$
$U_i\in O\Rightarrow f^{-1}\left(\cup\,U_i\right)=\cup\,f^{-1}(U_i)\in T\Rightarrow\cup\,U_i\in O$

f stetig, da mit $U\in O\Rightarrow f^{-1}(O)\in T$.

Die Quotiententopologie auf N ist die feinste Topologie, für die $f:M\rightarrow N$ stetig ist. Die gröbste Topologie, die **triviale** $\{\emptyset,N\}$ auf N macht f auch stetig.

Beispiel 1: Sei $M=\mathbb{N}$ versehen mit der Relativtopologie T von $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie S. Offene Intervalle sind aus S und ebenso ihre beliebigen Vereinigungen.
$\{1\}=]0,2[\cap\mathbb{N}$ offen in T. Ebenso alle anderen einelementigen Mengen aus $\mathbb{N}$:
$\{n\}=]n-1,n+1[\cap\mathbb{N}$.
Jede beliebige Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist demnach auch offen in T, auch die leere Menge, denn $\emptyset=]0,1[\cap\mathbb{N}$. T ist also die diskrete Topologie.
$\sim$ sei auf $\mathbb{N}$ nun folgende Äquivalenzrelation: $n\sim m\Leftrightarrow n\equiv m\,mod\,2$.
N sei die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Also $N=\{[0],[1]\}$.
$f:\mathbb{N}\rightarrow N;n\mapsto[n]$. Man schreibt auch $N=\mathbb{N}/\sim$. N hat wieder die diskrete Topologie O: $\emptyset\in O$, da $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in T$, $f^{-1}(N)=\mathbb{N}\in T$, also $N\in O$,
$f^{-1}([0])=\{2,4,6,...,\}\in T\Rightarrow[0]\in O$ $f^{-1}([1])=\{1,3,5,...,\}\in T\Rightarrow[1]\in O$,
$f^{-1}([0]\cap[1])=f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in T\Rightarrow[0]\cap[1]\in O$.
$f^{-1}([0]\cup[1])=f^{-1}(N)=M\in T\Rightarrow[0]\cup[1]\in O$.

Beispiel 2: Versieht man $\mathbb{Z}$ mit der Relativtopologie T von $\mathbb{R}$, so hat $\mathbb{Z}/mZ=Z_m$ mit beliebigem natürlichem m wieder die diskrete Topologie als Quotiententopologie.
Sei etwa $m=3$. $a\sim b\Leftrightarrow a\equiv b\,mod\,3\Leftrightarrow a-b\in3\mathbb{Z}$ $3\mathbb{Z}=\{...,-6,-3,0,3,6,...\}$
$\mathbb{Z}_3=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\{[0]_3,[1]_3,[2]_3\}$ $[0]_3=\{...,-9,-6,-3,0,3,6,9,...\}$

$[1]_3=\{\ldots,-8,-5,-2,1,4,7,10,\ldots\}$ $[2]_3=\{\ldots,-7,-4,-1,2,5,8,11,\ldots\}$
Begründung für diskrete Topologie von $\mathbb{Z}_3$ analog zum ersten Beispiel.

Beispiel 3: Sei $M=[0,1]$ und $Z=\{0,1\}\subset M$. Sei $a\sim b \Leftrightarrow a=b \vee (a\in Z \wedge b\in Z)$. Man identifiziert jetzt die Zahlen 0 und 1 in der Äquivalenzklasse $[0]=[1]$ und erhält dann in $M/Z=]0,1[\cup\{[0]\}$ und ihrer Quotiententopologie einen zum Einheitskreis $S^1=\{x\in\mathbb{R}^2/\|x\|=1\}$ mit seiner Relativtopologie T_K bzgl. der Standardtopologie S_2 des $\mathbb{R}^2$ homöomorphen topologischen Raum: S sei die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. $T_M=\{V/V=[0,1]\cap W, W\in S\}$ die Relativtopologie auf M. Die Quotientenabbildung $f: M=[0,1]\rightarrow M/Z=]0,1[\cup\{[0]\}; x\mapsto[x]$ definiert die Topologie $T_{M/Z}$ auf M/Z : $T_{M/Z}=\{U/U\subseteq M/Z \wedge f^{-1}(U)\in T_M\}$. Die Quotientenabbildung $g: M/Z\rightarrow S^1; [t]\mapsto(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ ist bijektiv und g und g^{-1} sind stetig:

- g ist bijektiv, da jedem Punkt in $]0,1[$ genau ein Punkt auf dem in $(1,0)$ punktierten Einheitskreis entspricht und der Äquivalenzklasse $[0]=[1]$ der Punkt $(1,0)$ auf dem Kreis.
- g ist stetig, da mit jeder offenen Menge O aus T_K auf dem Einheitskreis auch $g^{-1}(O)$ aus $T_{M/Z}$ ist, also offen.

  Bspw. entspricht dem offenen Bogen $]0,\frac{\pi}{2}[$ aus T_K die offene Menge $]0,\frac{1}{4}[$ in T_M und der offenen Menge $\{[t]\in M/Z \;/\; 0<t<\frac{1}{4}\}$.
- g^{-1} ist stetig, da $(g^{-1})^{-1}=g$ jeder offene Menge aus $T_{M/Z}$ einen offenen Bogen in T_K zuordnet.

Also ist das Einheitsintervall nach Identifizierung seiner Randpunkte homöomorph zum Einheitskreis. Sie sind also topologisch äquivalent oder isomorph.

Produkttopologie

Seien (M,T_M) und (N,T_N) topologische Räume. Das kartesische Produkt $M\times N$ lässt sich dann mit der **Produkttopologie** $T_{M\times N}:=\{U\subseteq M\times N / \bigvee_{V_i\in T_M} \bigvee_{W_i\in T_N} U=\bigcup V_i\times W_i\}$ versehen.

Bew.: $T_{M\times N}$ ist Topologie auf $M\times N$: $\emptyset=\emptyset\times\emptyset$ und $M\times N$ sind aus $T_{M\times N}$.
Zu $U_1, U_2\in T_{M\times N}$ existieren $V_{1,i}\in T_M$ und $W_{1,i}\in T_N$ sowie $V_{2,i}\in T_M$ und $W_{2,i}\in T_N$ mit $U_1=\bigcup V_{1,i}\times W_{1,i}$ und $U_2=\bigcup V_{2,j}\times W_{2,j}$.
$U_1\cap U_2=\left(\bigcup V_{1,i}\times W_{1,i}\right)\cap\left(\bigcup V_{2,j}\times W_{2,j}\right)=\bigcup V^{(i,j)}\times W^{(i,j)}$ wobei $V^{(i,j)}=V_{1,i}\cap V_{2,j}\in T_M$ und $W^{(i,j)}=W_{1,i}\cap W_{2,j}\in T_N$. Also ist $U_1\cap U_2\in T_{M\times N}$.
Für die Vereinigungen ist es klar.

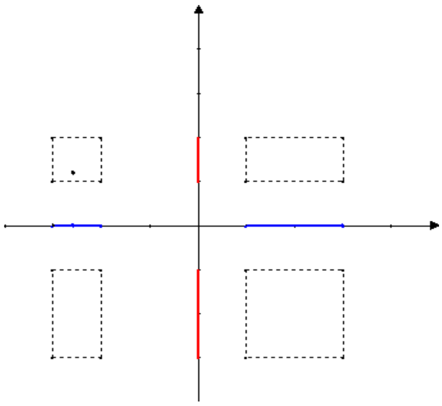
Bezeichnet man mit $p_1: M\times N\rightarrow M; (x,y)\mapsto x$ und $p_2: M\times N\rightarrow N; (x,y)\mapsto y$ die kanonischen Projektionen, so ist die Produkttopologie die gröbste Topologie, unter der die kanonischen Projektionen stetig sind. Wählt man bspw. die diskrete Topologie für $M\times N$, so sind die Projektionen natürlicherweise stetig.

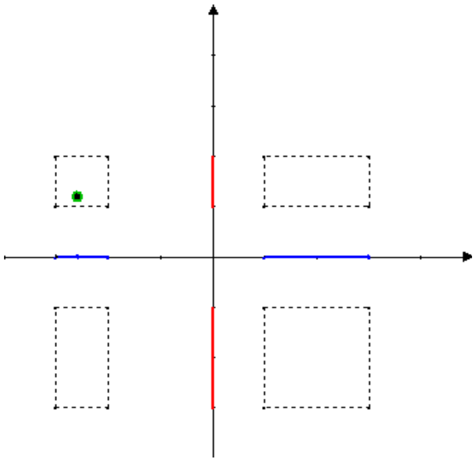
Beispiel 1: $M=N=\mathbb{R}$, die jeweils mit der Standardtopologie S von $\mathbb{R}$ ausgestattet seien.

$M \times N = \mathbb{R}^2 \quad T_{\mathbb{R}^2} := \{ U \subseteq \mathbb{R}^2 / \bigvee_{V_i \in S} \bigvee_{W_i \in S} U = \bigcup V_i \times W_i \}$ ist die Produkttopologie.

Ist etwa $]-3,-2[\cup]1,3[$ eine offene Menge in $M=\mathbb{R}$ und $]-3,-1[\cup]1,2[$ eine offene Menge in $N=\mathbb{R}$, so ist $U =]-3,-2[\cup]1,3[\times]-3,-1[\cup]1,2[=$ $]-3,-2[\times]-3,-1[\cup]-3,-2[\times]1,2[\cup]1,3[\times]-3,-1[\cup]1,3[\times]1,2[$ als Vereinigung von kartesischen Produkten offener Intervalle eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$.

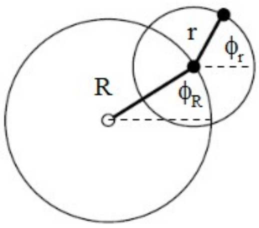
Diese Menge ist auch offen in der Standardtopologie des $\mathbb{R}^2$
Zu jedem Punkt in dieser Menge gibt es eine offene Kreisscheibe, die ganz in dieser Menge liegt. Sei etwa $\boldsymbol{x} = (-2{,}6 ; 1{,}2)$ ein Punkt, der in U liegt. Dann gibt es eine offene Kreisscheibe $K_{(0,1)}(\boldsymbol{x}) \subset U$.

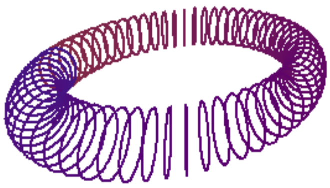


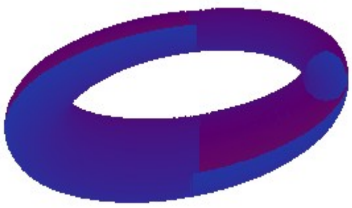


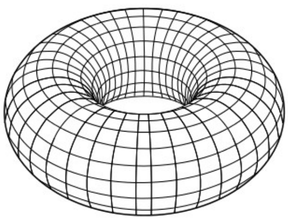
Die Standardtopologie ist aber feiner als die Produkttopologie, da es offene Mengen in der Standardtopologie gibt, die nicht offen in $T_{\mathbb{R}^2}$ sind, wie bspw. eine offene Kreisscheibe.

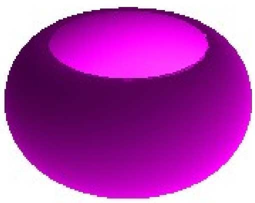
Beispiel 2: Der Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ lässt sich mit der Produkttopologie $T_{S^1 \times S^1}$ belegen, wobei S^1 der Einheitskreis (die eindimensionale Sphäre) ist. Jeder Punkt auf einem Torus mit Großradius R und Kleinradius r ist durch zwei Winkel ϕ_R und ϕ_r bestimmt.







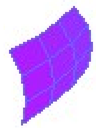




Die Parameterdarstellung des Torus lautet: $\begin{matrix} x=(R+r\cdot\cos(\phi_r))\cdot\cos(\phi_R) \\ y=(R+r\cdot\cos(\phi_r))\cdot\sin(\phi_R) \\ z=r\cdot\sin(\phi_r) \end{matrix}$ mit $0\leq\phi_R,\phi_r<2\pi$

$T_{S^1\times S^1}:=\{U\subseteq S^1\times S^1/\bigvee_{V_i\in T_K}\bigvee_{W_i\in T_K} U=\bigcup V_i\times W_i\}$ ist seine Produkttopologie.

Beispielsweise wäre das Produkt der Kreisbögen $]0{,}5;0{,}8[\times]0;1[$ eine offene Menge des Torus $R=4;r=0{,}5$ mit $\phi_r\in]0;1[$ und $\phi_R\in]0{,}5;0{,}8[$.



Summentopologie

Sind zwei Mengen M und N disjunkt, so nennt man $M+N:=M\cup N$ die Summe der Mengen. Falls sie nicht disjunkt sind, so definiert man die Summe $M+N:=M\times\{0\}\cup N\times\{1\}$.

Für zwei topologische Räume (M,T_M) und (N,T_N) bildet die Menge $M+N$ versehen mit der Topologie $T_{M+N}:=\{U+V/U\in T_M,V\in T_N\}$ die **topologische Summe** der beiden Räume. Alternativ kann man die **Summentopologie** auch folgendermaßen definieren:

$T_{M+N}:=\{U\subset M+N/U\cap M\in T_M,U\cap V\in T_N\}$

Da es nur eine Topologie auf $\{a\}$ gibt, die triviale, und $U_i\times\emptyset=\emptyset$ ist die Produkttopologie von $M\times\{a\}$ $T_{M\times\{a\}}=\{U\subseteq M\times\{a\}/\bigvee_{U_i\in T_M} U=\bigcup U_i\times\{a\}\}\cup\{\emptyset\}$ und damit

$T_{M\times\{a\}}=\{U\subseteq M\times\{a\}/\bigvee_{U_i\in T_M} U=(\bigcup U_i)\times\{a\}\}\cup\{\emptyset\}\Rightarrow$

$T_{M\times\{a\}}=\{U\subseteq M\times\{a\}/\bigvee_{V\in T_M} U=V\times\{a\}\}\cup\{\emptyset\}$. Sind also M und N nicht disjunkt, so ist $T_{M+N}=\{W\subseteq M+N/W=U\times\{0\}\cup V\times\{1\}/U\in T_M$ und $V\in T_N\}$.

Bew., dass T_{M+N} Topologie: $(1)\emptyset+\emptyset=\emptyset$ $(\emptyset\cap\emptyset=\emptyset)$; $M+N\in T_{M+N}$.

(2) $(U_1+V_1)\cap(U_2+V_2)=(U_1\cup V_1)\cap(U_2\cup V_2)=(U_1\cap U_2)\cup(U_1\cap V_2)\cup(V_1\cap U_2)\cup(V_1\cap V_2)=$ $=U_1\cap U_2\cup\emptyset\cup\emptyset\cup V_1\cap V_2=U_1\cap U_2\cup V_1\cap V_2=(U_1\cap U_2)+(V_1\cap V_2)\in T_{M+N}$ falls M und N disjunkt.

$(3) W_i\in T_{M+N}\Rightarrow\bigvee_{U_i\in T_M,V_i\in T_N} W_i=U_i\cup V_i$

$\Rightarrow\bigcup W_i=\bigcup(U_i\cup V_i)=\left(\bigcup U_i\cup\bigcup V_i\right)\in T_{M+N}$

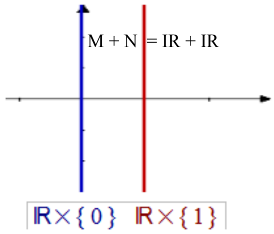
Sonst: (1) da $\emptyset\in T_M$ und $\emptyset\in T_N$ ist auch $\emptyset\in T_{M+N}$ $M+N\in T_{M+N}$, da $M\in T_M$ und $N\in T_N$

(2) $W_1,W_2\in T_{M+N}\Rightarrow W_1=U_1\times\{0\}\cup V_1\times\{1\},W_2=U_2\times\{0\}\cup V_2\times\{1\}\Rightarrow$ $W_1\cap W_2=(U_1\times\{0\}\cup V_1\times\{1\})\cap U_2\times\{0\}\cup V_2\times\{1\}=$

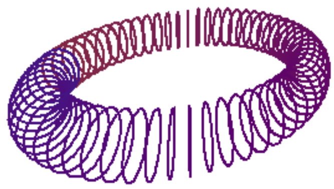
$$=(U_1\cap U_2)\times\{0\}\cup(V_1\cap V_2)\times\{1\}\cup\underbrace{U_1\times\{0\}\cap V_2\times\{1\}}_{\emptyset}\cup\underbrace{V_1\times\{1\}\cap U_2\times\{0\}}_{\emptyset}=$$
$$=\underbrace{(U_1\cap U_2)}_{\in T_M}\times\{0\}\cup\underbrace{(V_1\cap V_2)}_{\in T_N}\times\{1\}\in T_{M+N}$$

$$(3)\;\; W_i\in T_{M+N}\Rightarrow W_i=U_i\times\{0\}\cup V_i\times\{1\}\Rightarrow\bigcup(U_i\times\{0\}\cup V_i\times\{1\})=$$
$$=\bigcup(U_i\times\{0\})\cup\bigcup(V_i\times\{1\})=\underbrace{\left(\bigcup U_i\right)}_{\in T_M}\times\{0\}\cup\underbrace{\left(\bigcup V_i\right)}_{\in T_N}\times\{1\}\in T_{M+N}$$

Beispiel 1: $M=N=\mathbb{R}$ mit Standardtopologie. $M'=\mathbb{R}\times\{0\}$ und $N'=\mathbb{R}\times\{1\}$



Beispiel 2: Alle individuellen Kreise K_t mit $\boldsymbol{n}_t\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_t)=0$ und $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_t)^2=1$ bzw.
$\boldsymbol{x}^2=2(x_1\cos(t)+x_2\sin(t))$ mit $\boldsymbol{m}_t=\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ 0\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{n}_t=\begin{pmatrix}-\tan(t)\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, falls
$t\neq\pi/2\wedge t\neq 3\pi/2$ und sonst $\boldsymbol{n}_{\pi/2}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{n}_{3\pi/2}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ für $t\in[0,2\pi[$ liefern
über die Summe $\sum_t K_t$ den Torus für $R=3, r=1$:



Eine Abbildung $f:M\to N, x\mapsto f(x)$ zwischen zwei topologischen Räumen (M,T_M) und (N,T_N) heißt **stetig**, wenn das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Menge $U\in T_N$ offen in T_M, d.h. $\bigwedge_{U\in T_N} f^{-1}(U)\in T_M$.

(1) Die Identität $id_X:X\to X, x\mapsto x$ ist stetig
(2) Sind f und g in $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ stetig, dann ist auch die Komposition $g\circ f:X\to Z$ stetig.
(3) Ist $f:X\to Y$ stetig und $N\subset X$ ein Teilraum von X, dann ist auch die Einschränkung $f|N:N\to Y$ stetig.
(4) $f:X+Y\to Z$ ist genau dann stetig, wenn $f|X$ und $f|Y$ beide stetig sind.
(5) $(f,g):Z\to X\times Y$ ist genau dann stetig, wenn $f:Z\to X$ und $g:Z\to Y$ beide stetig sind.

Eine Abbildung $f: M \to N, x \mapsto f(x)$ heißt **offen**, wenn $\bigwedge_{O \in T_M} f(O) \in T_N$

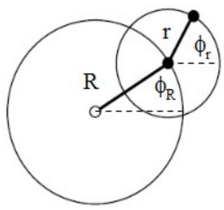
Eine Abbildung $f: M \to N, x \mapsto f(x)$ nennt man einen **Homöomorphismus**, wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} beide stetig sind, d.h. f bijektiv, stetig und offen ist, d.h. wenn die offenen Mengen in M genau den offenen Mengen in N durch f entsprechen.
Man sagt dann, dass M homöomorph zu N ist ($M \simeq N$).
Kommt eine Eigenschaft eines topologischen Raums auch jedem dazu homöomorphen zu, nennt man sie eine **topologische Eigenschaft**.

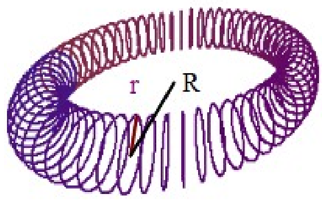
Beispiel 1: $M = \{a, b, c\}$ $\quad T_M = \{\emptyset, M, \{a\}, \{a, b\}\}$
$N = \{a, b, c\}$ $\quad T_N = \{\emptyset, N, \{b\}, \{a, b\}\}$
$f: M \to N, a \mapsto b, b \mapsto a, c \mapsto c$ ist bijektiv und stetig. Denn $f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$ $f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}, f^{-1}(N) = M, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Ebenfalls ist f offen. Damit ist f ein Homöomorphismus, d.h. $M \simeq N$.

Beispiel 2: $S^1 \times S^1 \simeq T^2$, der Produktraum aus der Einheitssphäre mit sich selbst ist homöomorph zum zweidimensionalen Torus.
Der erste Kreis sei der Kreis, der die Größe der Torus mit Radius R repräsentiert, der zweite, der die Dicke mit Radius r darstellt. Die Abbildung

$$f: S^1 \times S^1 \to T^2, \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} Rcos(\phi_R) \\ Rsin(\phi_R) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r\cos(\phi_r) \\ r\sin(\phi_r) \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} Rcos(\phi_R) + r\cos(\phi_r) \\ Rsin(\phi_R) + r\sin(\phi_r) \end{pmatrix}$$ ist

bijektiv. $S^1 \times S^1$ ist mit der Produkttopologie versehen. Der Torus T^2 mit der Relativtopologie T_{T^2} der Standardtopologie des $\mathbb{R}^3$.





Eine offene Menge des Torus wäre bspw. der Schnitt einer offenen Kugel mit dem Torus, also etwa eine offene torusmäßig gekrümmte offene Kreisscheibe. Ihr Urbild ist wieder offen in $T_{S^1 \times S^1}$ als (unendliche) Vereinigung von „infinitesimalen" offen „Rechtecken"  bestehend aus dem kartesischen Produkt offener Kreisbögen.

Wenn $\phi: [0,1[\to S^1, t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos(2\pi t) \\ R\sin(2\pi t) \end{pmatrix}$ $\quad \psi: [0,1[\to S^1, t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(2\pi t) \\ r\sin(2\pi t) \end{pmatrix}$, dann sind solche offenen „Rechtecke" $\phi(]a,b[) \times \psi(]c,d[)$ mit $]a,b[\subset [0,1[$ und $]c,d[\subset [0,1[$.

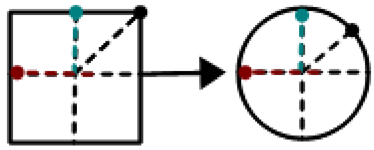
Beispiel 3: Ein Einheitsquadrat Q^1 ist homöomorph zu einem Einheitskreis S^1 .
Die Funktion $f: Q^1 \to S^1$ mit $(1, \tan\phi) \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)$ für $\phi \in [-\frac{pi}{4}, \frac{pi}{4}[$ und

$(\cot\phi, 1) \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)$ für $\phi \in [\frac{pi}{4}, 3\frac{pi}{4}[$ und

$(-1, -\tan\phi) \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)$ für $\phi \in [3\frac{pi}{4}, 5\frac{pi}{4}[$ und

$(-\cot\phi, -1) \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)$ für $\phi \in [5\frac{pi}{4}, 7\frac{pi}{4}[$ ist eine bijektive Abbildung.

Sei S die Standardtopologie des $\mathbb{R}^2$ und T_{Q^1} bzw. T_{S^1} die von S induzierten Teilraumtopologien (Relativtopologien). Die offenen Mengen in Q^1 entsprechen dann eindeutig den offenen Mengen in S^1. Also ist f ein Homöomorphismus.



Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er sich nicht in zwei nichtleere, disjunkte und offene Mengen zerlegen lässt.

Das lässt sich auch anders formulieren: Der Raum M ist zusammenhängend, wenn M und $\emptyset$ die einzigen zugleich offen und abgeschlossenen Mengen sind.

Beweis der Äquivalenz der beiden Definitionen**:**

Sei die zweite Definition erfüllt. Und seien A und B nicht leer und offen und disjunkt.
Wäre $M = A \dot{\cup} B \Rightarrow \emptyset = \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \overline{A} = B$ und $\overline{B} = A$ Da aber A offen und wegen $\overline{B} = A$ und B offen muss A auch abgeschlossen sein. Das gleiche gilt für B. Da aber M und $\emptyset$ die einzigen Mengen dieser Art sind, muss gelten: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ im Widerspruch zur zweiten Definition. Also gibt es eine solche Zerlegung nicht.

Sei nun die erste Definition erfüllt. Sei $A \neq \emptyset$ und $A \neq M$ eine dritte Menge, die offen und abgeschlossen ist. $A \neq \emptyset \Rightarrow \overline{A} \neq M$. $A \neq M \Rightarrow \overline{A} \neq \emptyset$ Es gilt aber $M = A \dot{\cup} \overline{A}$. Also gäbe es eine Zerlegung von M aus zwei nichtleeren, disjunkten und offenen Mengen $A, \overline{A}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Demnach gibt es keine dritte Menge, die sowohl offen und abgeschlossen ist.

nicht zusammenhängend zusammenhängend

Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt zusammenhängend in (M, T) genau dann, wenn der Teilraum $(N, T|_N)$ zusammenhängend ist.

Beispiel 1: Jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Sei I mit der Relativtopologie T bzgl. $\mathbb{R}$ (mit der Standardtopologie) versehen.

Annahme: I nicht zusammenhängend $\overset{\text{Def}}{\Rightarrow}$ es gibt eine Menge $A \subseteq I$ mit A offen und abgeschlossen und $A \neq \emptyset$ und $A \neq I$. Sei $x_0 \in A$ und $y_0 \in I \setminus A$. OBdA sei $x_0 < y_0$.
Sei $C := \{x \in I / x \in A \wedge x < y_0\} \subseteq A$. $C \neq \emptyset$, da $x_0 \in C$ y_0 ist obere Schranke von C, also existiert ein Supremum von C. $s := \sup C$ $\Rightarrow s \leq y_0$ s ist Berührpunkt von C $\Rightarrow s \in \overline{C} \subseteq \overline{A} = A$ da A abgeschlossen $\Rightarrow s \in A$. $]s, y_0[\subset I \setminus A$: sei $s < x < y_0$. Wäre $x \in A \Rightarrow x \in C$. Da s obere Schranke von C $\Rightarrow x \leq s \Rightarrow x \leq s < x \Rightarrow x < x$ Wid., also $x \notin A$. Da $s \in A \subset I$ und $y_0 \in I \overset{\text{I Intervall}}{\Rightarrow}]s, y_0[\subseteq I$. Also auch $x \in I$, also insgesamt $x \in I \setminus A$.

Damit ist $]s, y_0[\subset I \setminus A \Rightarrow [s, y_0] = \overline{]s, y_0[} \subseteq \overline{(I \setminus A)} \overset{I \setminus A \text{ abgeschlossen}}{=} I \setminus A \Rightarrow s \in I \setminus A$. Das ist ein Widerspruch zu $s \in A$. Also Annahme, dass I nicht zusammenhängend ist, ist falsch.

Gegenbeispiel: Der Unterraum $N = [1,2] \cup]4,5[\subset \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend. Denn $A = [1,2]$ und B= $]4,5[$ sind disjunkt, beide offen und nicht leer. B ist in $T|_N$, der Relativtopologie, offen, denn B ist in $\mathbb{R}$ offen und $B = B \cap \mathbb{R}$.
Aber auch A ist offen, zwar nicht in $\mathbb{R}$, aber in $T|_N$, da $[1,2] = N \cap]0,3[$ und $]0,3[$ offen in $\mathbb{R}$.