Taylornäherung für relativistische kinetische Energie

Manfred Hörz

Die relativistische Gesamtenergie eines Objekts mit der Ruhemasse m ist:

$$E = mc^2 \gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad .$$

Wird davon die Ruheenergie mc^2 abgezogen, so ergibt sich die kinetische Energie T zu

$$T = mc^2\gamma - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) = mc^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right)$$

Verwendet man das n-te Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle x_0

$$P_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$$\text{für} \quad f(x) = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right) \quad \text{mit} \quad x := \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

so ergibt sich als Näherung für $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ (für bzgl. der Lichtgeschwindigkeit c kleine Geschwindigkeiten v $(v \ll c)$ kann man an der Stelle 0 entwickeln) und $n = 3$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}mc^2(1-x)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''(x) = \frac{3}{4}mc^2(1-x)^{-\frac{5}{2}} \qquad f'''(x) = \frac{15}{8}mc^2(1-x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = \frac{1}{2}mc^2 \quad f''(0) = \frac{3}{4}mc^2 \quad f'''(0) = \frac{15}{8}mc^2 \quad \text{und damit}$$

$$P_{3,f}(x) = \frac{1}{2}mc^2 x + \frac{\frac{3}{4}mc^2}{2}x^2 + \frac{\frac{15}{8}mc^2}{6}x^3 = \frac{1}{2}mc^2 x + \frac{3}{8}mc^2 x^2 + \frac{5}{16}mc^2 x^3 \quad \text{, also}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2}mc^2 x + \frac{3}{8}mc^2 x^2 + \frac{5}{16}mc^2 x^3 \quad \text{und substituiert man wieder} \quad x = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \text{, so ergibt sich}$$

$$T \approx \frac{1}{2}mc^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}mc^2\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \frac{5}{16}mc^2\left(\frac{v}{c}\right)^6 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \frac{5}{16}\frac{mv^6}{c^4}$$

Da $v \ll c$ und damit $\frac{v}{c} \ll 1$ können die höheren Potenzen vernachlässigt werden. Damit ergibt sich als Näherung für die kinetische Energie wieder die Newtonsche Form: $T \approx \frac{1}{2} m v^2$