Exkurs über Transformationen

Manfred Hörz

1. Bezugssystem, Koordinatensystem

Bei Transformationen gibt es oft Verwirrungen, da die verschiedenen Arten nicht klar getrennt werden.

Zunächst die mathematische Seite, bei der die Zeit keine Rolle spielt. Man bezeichnet das von der Physik her gesehen gerne als virtuell.

Eine Transformation kann innerhalb eines festen Koordinatensystems (KS) geschehen. Bspw. eine Rotation oder eine Translation oder eine Spiegelung. Dabei wird das Objekt innerhalb des gleichen Bezugssystem (KS) in seiner Lage verändert.

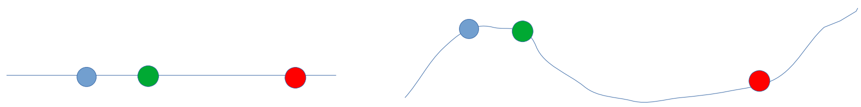
In der Physik spielt natürlich die Zeit eine wichtige Rolle. Ein Objekt kann seine Lage real (also nicht virtuell) verändern, indem es sich real bewegt. Zu einem Zeitpunkt t_1 ist es am Ort $x_1 = x(t_1)$ und zu einem anderen Zeitpunkt t_2 ist das gleiche Objekt an einem Ort $x_2 = x(t_2)$. Diese Transformation spielt sich im gleichen System ab.

Eine geometrische Ortsveränderung (durch Translation, Rotation etc.) kann im gleichen KS dargestellt werden (aktive Transformation) oder durch eine entgegengesetzte für das KS (passive Transformation).

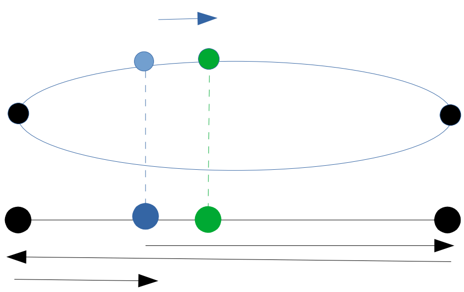
Dann gibt es noch den Fall, dass die Ortsbeschreibung eines Objekts durch gänzlich andere Koordinaten erfolgt. bspw. anstatt durch kartesische (durch Längen) durch Winkel und Längen (Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten).

Philosophisch gesehen:

Im Eindimensionalen:



bedarf es außer dem Subjektpunkt S auch noch eines nahegelegenen Referenzpunkte R, um ein Objekt O lokalisieren zu können. Dabei kann in der eindimensionalen Welt nicht unterschieden werden, ob die Linie gerade oder kurvig ist, da es diesen Unterschied nicht gibt und er auch nicht erkennbar wäre, wenn die Linie nicht geschlossen ist. Eine geschlossene Linie kann natürlich nur in einer ungewussten höherdimensionalen Welt vorkommen. Die Erkenntnissubjekte, die nur eindimensional wahrnehmen könnten, würden bei einem Durchlauf ihrer Welt feststellen, dass es zwei Umkehrpunkte U_1 und U_2 gibt (die jeweiligen Enden ihrer Welt, was sie durch die Wiederkehr der durchlaufenen Punkte in umgekehrter Richtung erfahren könnten).



Dazu müssten sie allerdings das Objekt bzw. den Referenzpunkt von der einen und der anderen Richtung her als „*denselben*" wiedererkennen können. Falls nicht, so würden sie ihn erst bei der zweiten „Umrundung" von der gleichen Richtung her erkennen können. Sie hätten eine zyklische Zeit. Die Objekte (wie auch das oder die Subjekte) könnten nicht materiell sein, da man durch sie hindurchgehen können muss. Sie können sich durch Farben oder/und Formen (Längen) unterscheiden. Ihre Erkenntnis müsste in einer nicht materiellen Interaktion bestehen, etwa durch Schwingungskohärenz. Falls sie Gesetze erkennen, so kann das nur durch die Umgebung der Objekte geschehen, die in ihrer (notwendigen) Dynamik wiederkehrende Teilkonstanzen (Muster) besitzen müssen. Die Umgebung wird durch das identifizierte Objekt definiert. Damit zunächst genug.

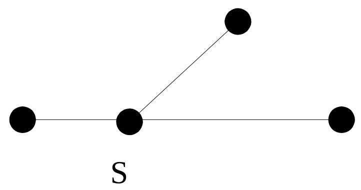
Der Referenzpunkt R gibt vom Subjektpunkt S aus gesehen eine Lauf-Richtung vor, von S nach R. Wie kann das Subjekt nun das Objekt lokalisieren? Zunächst grob durch die Laufrichtung. O liegt in derselben Richtung wie R, vor oder nach R.
Wie stellt S fest, ob es sich nach R bewegt oder von R weg? Ich nehme als Erkenntnisgrund die Schwingungskohärenz an. Diese sei symmetrisch bzgl. Spiegelung. Das heißt nähert sich S dem R, so weiß es in unmittelbarer Umgebung nicht von welcher Richtung es sich nähert. S muss ans Ende seiner Welt gegangen und dort umgekehrt sein.
Dadurch kann es seine Richtungsinformation haben. Oder es hat Marker, d.h. Objekte, die es nicht symmetrisch wahrnimmt, aber als identische erkennt. Wie wäre das möglich? Dazu benötigt man zwei Kriterien. Eines, um es als identisches zu erkennen und ein anderes, um die Richtung zu ermitteln. Mir scheint das aber nicht grundlegend sein zu können. Denn die Wiedererkennung ist nur durch die Umkehrpunkte möglich. Nimmt das Subjekt das Objekt von der anderen Seite als identisches wahr aufgrund seiner Symmetrie, so weiß, dass es das Objekt von der andern Seite aufgrund seiner eigenen Umkehr wahrnimmt, und es als symmetrisch kennt. Ein nicht symmetrisches Objekt muss Teilsymmetrien besitzen, damit es als identisches wahrgenommen werden kann. Ist nun R ein symmetrisches oder teilsymmetrisches Objekt, so kann S aufgrund seiner intrinsischen Richtungsinformation (und einem Gedächtnis) wissen, ob es sich zu ihm hin bewegt oder weg. Hat S ein Umkehrpunkt hinter sich gelassen, dann bewegt es sich notwendig auf R zu. Hat es R erkannt (begegnet), so bewegt es sich anschließend von ihm weg, vorausgesetzt, dass S sich weiter bewegt. Ist R symmetrisch, so können die Richtungen von „rechts" oder von „links" sich R anzunähern nur durch Zählen vonstatten gehen, falls die Umkehrpunkte selbst nicht unterscheidbar sind. Bei jeder ungeraden Zahl war S bspw. bei U_1 und bei jeder geraden bei U_2. Und so weiß S ob er sich von U_1 R annähert, also sagen wir von „rechts" oder von „links", wenn S bei U_2 war. Ist R teilsymmetrisch, bedarf es dieser Zählung nicht. S weiß jetzt also, ob es sich links von R nähert oder entfernt, ob R rechts oder links von S liegt.

Wie kann S Längen messen, was es zur Lokalisierung von O bedarf? Zunächst kann S feststellen, ob O weiter von S entfernt ist als R oder näher liegt. Damit es keine vergängliche Information ist, muss S eine Markierung hinterlassen von seinem Standort, bevor er sich bewegt. Es bedarf also des Zeichens, das sich nicht von der Stelle bewegt, eine Art stehende eng begrenzte lokale Welle. Dann bedarf es einer zweiten, die S mit sich tragen kann und stabil bleibt. Eventuell S selbst. An seinem vorderen Ende setzt S wieder eine Markierung. Läuft weiter (mit „konstanter Geschwindigkeit") und setzt am vorderen Ende eine zweite Markierung, wenn sein hinteres Ende die erste Markierung trifft. Und so fort, bis S O trifft. Die gezählten Markierungen ergeben dann mithilfe der Richtungsinformation die Lokalisierung von O. Wie man ungefähr sieht, geht hier *ungeheuer viel* mit ein, bloß um ein Objekt lokalisieren zu können. Falls Newtons Regel auch hier gilt, dass S die Konstanz seiner Geschwindigkeit nicht spürt, seine Veränderung sehr wohl, dann kann zumindest die Konstanz seiner Geschwindigkeit kontrolliert werden. Ohne Bewegung gibt es keine Lokalisierung. Also ohne Bewegung keinen Ort. Zeitmessung war bisher nicht nötig.
Ich möchte festhalten, dass die Lokalisierung (von den anderen philosophischen und physikalischen Voraussetzungen) „mathematisch" zweier Dinge bedarf: 1. die Richtungsinformation und 2.

Längenmessung, also eines Vektors: von der Markierung für S aus zu O. Das Koordinatensystem besitzt also einen Ursprung, die Markierung von S, und einen Einheitsvektor als Maßstab.

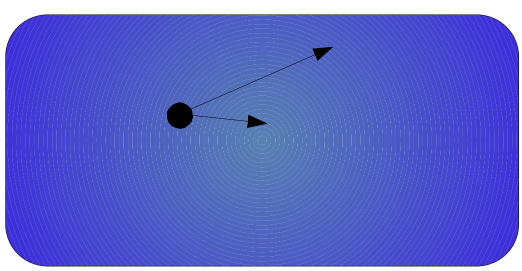
Sei die Welt nun mehr als eindimensional:

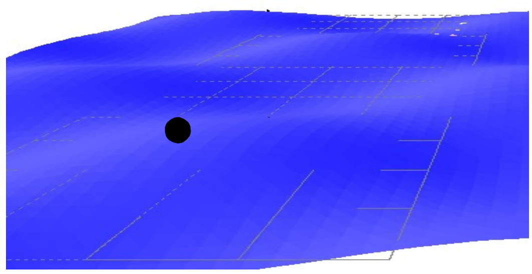
Besteht sie aus zwei verbundenen Strecken, sodass sie noch nicht zweidimensional aber fraktal ist,



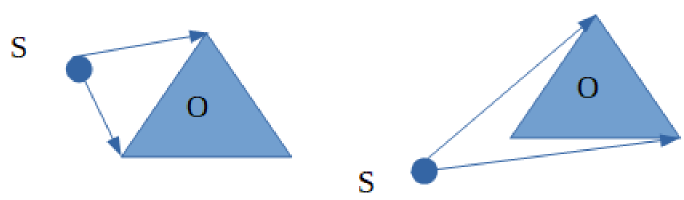
so erweitert sich das Koordinatensystem auf zwei Einheitsvektoren, die jedoch nicht linear kombinierbar sind. Eine Darstellung durch Winkel ist nicht möglich, da es hierfür keinen Vergleichspunkt gibt.

Sei die Welt nun voll zweidimensional, also eine begrenzte Ebene bzw. Fläche.



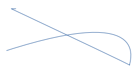


Das Subjekt muss wie vorher eine Markierung haben. Die Bewegung ist jetzt freier (zwei Freiheitsgrade) und die Bedingung der Immaterialität fällt weg, da das Objekt von mehreren Seiten „gesehen“ werden kann. Die nähere Umgebung des Objekts bestimmt jetzt seine Identität: Dazu muss zuvor überhaupt schon mal das Bewusstsein Schemata gebildet haben, d.h. Begriffe. Diese bestimmen die Gleichheit von Objekten unabhängig von der Umgebung: Das ist ein Baum, jenes ist ein Baum. Die Individualität jedoch wird durch Strukturen von Objekten bestimmt, das sind höhere Begriffe. Bspw. können drei bereits bekannte Objekte als einfache Begriffe ein Dreieck bilden oder auf einer Strecke liegen. Sie können Farbkombinationen bilden, etc.. Wird ein Objekt innerhalb einer solchen gleichen Struktur (höherer Begriff) erkannt, so entsteht es als Individuum. Dann ist es etwa dieser *bestimmte* Baum oder dieser bestimmte Platz, auch wenn er unter einer anderen Perspektive wahrgenommen wird. Die Struktur ist eine *Eigenschaft* des bestimmten Objekts. Wird diese entfernt, dann wird das Objekt wieder zu einem *allgemeinen*, wie es zuvor nur war. Die Struktur ist die Umgebung des Objekts, die seine Individualität bestimmt. Die Struktur ist in einem weiten Sinne zu verstehen. Sie kann auch durch Handlungen erzeugt werden. Das Objekt sei bspw. ein (ebenes) bewegliches Dreieck mit festen Längen, etwa ein gleichseitiges. Das ist jetzt vom Dreidimensionalen her gedacht, dass es ein Dreieck ist. Das Subjekt sieht das Dreieck mal als eine Strecke. Wenn das Subjekt sich weiter bewegt, bzw. das Dreieck gedreht wird, bleibt es eine gewisse Zeit noch eine Strecke, bis es sich als Winkel zeigt, usw..

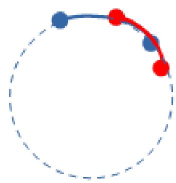


Durch die *stetige Bewegung* und *konstante Aufmerksamkeit* bleibt es trotz Veränderung das gleiche identische Objekt, dessen Veränderung die verschiedene Perspektive, die verschiedene Relation von S und O zeigt. Für ein Subjekt, das beides zusammen (d.h. die stetige Bewegung und die konstante Aufmerksamkeit) nicht erlebt, sind es zwei verschiedene Objekte.

Ist nun die Identität des Objekts sicher gestellt, dann kann durch einen Maßstab, d.h. eine Strecke, etwa durch einen ausgezeichneten Teil des Subjekts und Markierungspunkte die Entfernung von dem markierten S und dem Objekt O gemessen werden. Vorausgesetzt ist hier allerdings, dass diese Teile in ihrer Länge konstant sind und die Markierungspunkte den Ort nicht verlassen. Das ist ein großes Problem der Messung, das ich bisher nicht gelöst habe. Aber diese Stabilität vorausgesetzt und dass die Längen nicht nur stabil bleiben, sondern auch bei einer anderen Richtung erhalten bleiben, ist die erste Bedingung gegeben für das Koordinatensystem. Außer dem markierten Subjekt bedarf es jetzt noch eines zweiten festen Objekts. Also insgesamt mit dem markierten Subjekt drei stabile „Punkte“. Dieses drei Punkte müssen aber ein Dreieck bilden, d.h. dürfen nicht auf einer Strecke liegen.

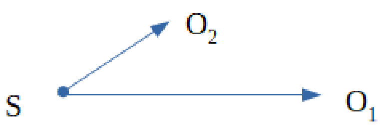
Dazu müsste natürlich noch definiert werden, was eine *Strecke* ausmacht. Eine Strecke ist notwendigerweise endlich, da es Unendliches ohnehin nicht gibt. Zunächst ist eine Strecke eine Linie, d.h. ein eindimensionales Gebilde in der zweidimensionalen Fläche dieser Welt. Wodurch unterscheiden sich zweidimensionale Teile und eindimensionale Teile dieser Welt? Geht man auf einer eindimensionalen Linie, so gibt es außer vorwärts und rückwärts keine weiteren Freiheiten. Bin ich einmal eine *Richtung* (etwa vorwärts) gegangen und bleibe dabei, dann habe ich keine weitere Freiheit. In einem zweidimensionalen Gebiet der Welt habe ich weitere Wahlmöglichkeiten. Ich kann von einer Stelle aus viele verschiedene eindimensionale Wege gehen. Linien könne nun derart sein, dass sie kein zweidimensionales Gebiet einschließen oder sie können eines oder mehrere einschließen. Die erste Art nenne ich einfach. Solche einfache Linien haben nun sicher einen Anfangspunkt und einen Endpunkt (auch wenn die nicht einfachen das auch haben können, bspw. eine offene Schleife : ).

Wie zeichnet sich nun eine Strecke aus diesen einfachen Linien aus? Durch verschiedene Fortsetzungen. Holt man ein kleines Stück einer Linie und setzt eine Kopie davon an diese Stück an, sodass beide ein gleichartiges (kongruentes) Teilstück gemeinsam haben und wiederholt diese Fortsetzung, dann wird die Strecke immer einfach bleiben, die Linie, die keine Strecke ist, wird ein zweidimensionales Teil einschließen. (Oder: Dreht man die Linie um ihren Mittelpunkt um 180°, so wird die Strecke mit sich identisch bleiben, die Linie, die keine Strecke ist wird sich nach der Drehung unterscheiden. Allerdings muss man dann zirkelfrei eine Drehung definieren.)

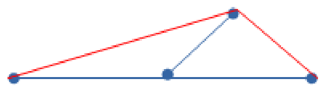


Das sei (hoffentlich) hinreichend für die Definition einer Strecke.

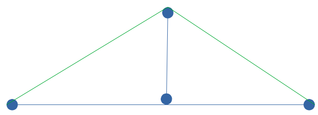
Der Streckenweg von S nach O_1 und der von S nach O_2 bilden dann *ein* Koordinatensystem.



Ein beliebiges weiteres Objekt O_3 lässt sich dann lokalisieren. Dazu muss noch die *Parallelität* von zwei Strecken definiert werden.
Wird auf einer Strecke ein Punkt so gewählt, dass dieser von beiden Enden die gleiche Länge hat und liegt von diesem Mittelpunkt aus eine weitere Strecke fester Länge, die nur den Mittelpunkt mit ihr gemeinsam hat derart, dass ihr Endpunkt, der nicht der Mittelpunkt ist, zu beiden Endpunkten der ersten Strecke gleiche Entfernung hat, so heißt diese zweite Strecke orthogonal zur ersten.

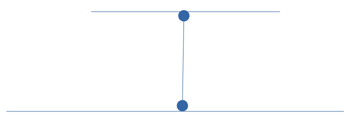


nicht orthogonal



orthogonal

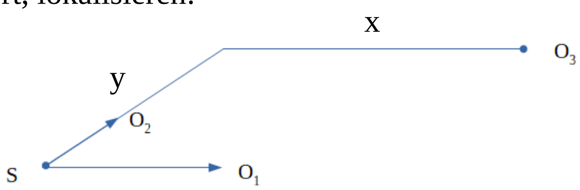
Wird nun eine weitere Strecke so gelegt, dass sie auf der zweiten Strecke auch orthogonal ist, so sind die erste Strecke und die dritte parallel zu einander.



Jede Verlängerung der beiden Strecken ändert nichts an der Parallelität.

Da es keine totale Identität gibt, die immer nur eine hinreichend genaue *Setzung* ist, so gibt es auch nicht wirklich genau lange Strecken, wie die Mathematik gerne idealisiert. Der Graubereich ist aber genügend klein: es gibt keine absolut festen Dinge. Die Messung wird daher auch keine inkommensurablen Probleme[1] erzeugen.

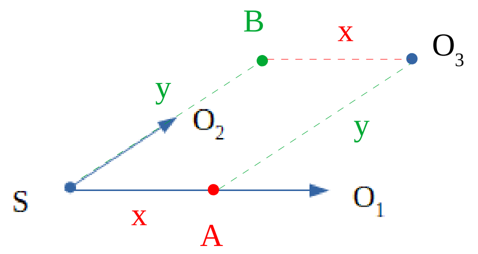
Ist nun ein Pfeil (eine Strecke mit Richtung) gegeben, etwa der Pfeil S nach O_1 des Koordinatensystems von oben, so kann die Länge einer Strecke die verschieden der Länge von S O_1 ist, aber auf ihr liegt (die also mindestens zwei Punkte mit ihr gemeinsam hat) durch ein gemeinsames Maß gemessen werden. Man wählt einen gemeinsamen Teil beider Strecken so klein, dass er ein ganzzahliges Vielfaches von beiden Strecken ist. Dieser Teil ist für beide die Maßeinheit. Die Länge ist dann die jeweilige Maßzahl gemessen mit dieser Maßeinheit.
Eine dritte Strecke erfordert unter Umständen eine weitere Unterteilung, die dann der Maßeinheit und der dritten Strecke bis ein gemeinsames Maß auch hierfür gefunden ist, das dann gemeinsames Maß für die drei Strecken ist. Man kann es nicht im Vorhinein festlegen. Es gibt nur endlich viele Strecken!
Damit ist das eine Koordinatensystem gegeben, allerdings nicht als ein für alle Male festes. Es muss jeweils neu geeicht werden. Aber jede Anzahl von Objekten lassen sich durch eine neue Eichung, die die alte u.U. verfeinert, lokalisieren:



1 Ich vertrete hier also keinen Platonismus, der die Identität als Metaidee auffasst, die, wie er richtig sieht, nicht bei den Dingen anzutreffen ist. Und zwar deshalb nicht, weil sie eine Setzung ist. Auch die Begriffe im Jenseits sind nur Setzungen.

Jedes Objekt wird das KS i.A. neu definieren, was seine Skalierung betrifft. Es gibt in diesem Sinne auch keinen absoluten Raum. Er wird durch seine Objekte bestimmt. Selbst mathematisch.

Das Objekt O_3 ist in SO_1O_2 lokalisierbar durch (S, O_1, O_2 , x, y) und zwar genauer so:



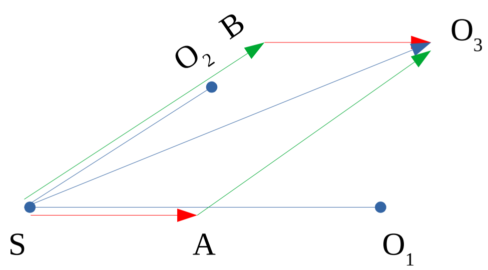
Sei E die Länge des Teils, durch den SO_1 und SA gemeinsam gemessen werden können. Die Länge von SO_1 sei nE und die Länge von SA sei mE: $|SO_1|=nE$ $|SA|=mE=\frac{mEn}{n}=\frac{m}{n}|SO_1|$, also ist $x=\frac{m}{n}$. Falls der Punkt A auf der linken Seite liegt, muss die Orientierung noch inkludiert werden. Das Einfachste ist dies anstatt durch SA als $\vec{SA}$ zu symbolisieren mit folgender Bedeutung: Läuft man von S nach O_1 und trifft dabei A oder läuft man von S nach A und trifft dabei O_1, dann sind $\vec{SA}$ und $\vec{SO_1}$ gleichorientiert und $\vec{SA}=x\vec{SO_1}$ $(x\geq 0)$. Im andern Fall, wenn A auf einer Streckenverlängerung von SO_1 nach links liegt, so wird ein Minus gesetzt:

$x=-\frac{m}{n}$ und $\vec{SA}=x\vec{SO_1}$ $(x<0)$. Das Analoge für y, also $\vec{SB}=y\vec{SO_2}$. Sind zwei Strecken AB und CD parallel und gleichlang und gleichorientiert, so sei $\vec{AB}=\vec{CD}$, sind sie parallel und gleichlang aber verschieden orientiert, so gelte $\vec{AB}=-\vec{CD}$. Diese orientierten Strecken nennt man *Vektoren.* Für eine günstige Darstellung definiert man noch die Summe zweier Vektoren

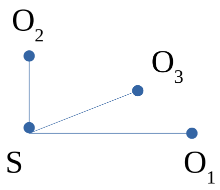
$\vec{AB}+\vec{BC}:=\vec{AC}$. Die weiteren Eigenschaften liegen auf der Hand.

Mit diesen Mitteln lässt sich dann das Objekt O_3 darstellen (lokalisieren) durch seinen *Ortsvektor*

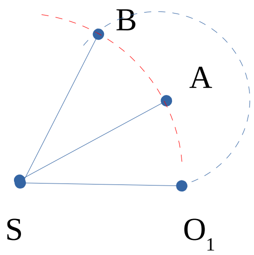
$\vec{SO_3}$ durch $\vec{SO_3}=x\vec{SO_1}+y\vec{SO_2}=\vec{SA}+\vec{SB}=\vec{SA}+\vec{AO_3}$:



Eine Variante des KS besteht darin, dass S O_1 als Bezugsstrecke fungiert. Man definiert dann Winkel. Die oben eingeführte Orthogonalität S O_2 bestimmt den rechten Winkel als Einheit.

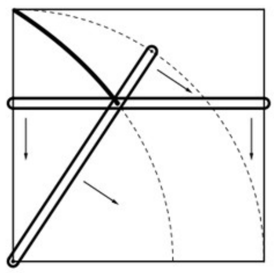


Zunächst ist zu klären, wie Winkel addiert werden. Sei ein gleichschenkliges Dreieck
S O_1 A in den Seiten S O_1 und S A gegeben.

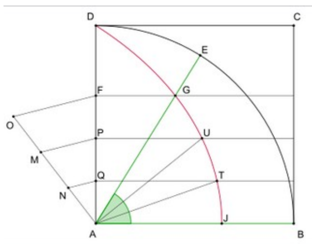


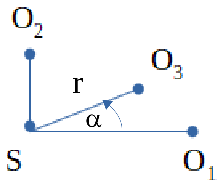
Man legt eine Kreislinie mit Mittelpunkt A und dem Radius A O_1 und eine zweite Kreislinie mit Mittelpunkt S mit Radius S A (bzw. S O_1). Diese schneiden sich in B.
Der Winkel O_1 S A ist so zu dem Winkel O_1 S B verdoppelt. Wiederholt man die Prozedur entsprechend , so ist er verdreifacht, etc..

Man wählt nun den Winkel so klein, dass er als Vielfaches den Winkel O_1 S O_3 und ein anderes Vielfaches den rechten Winkel ergibt. Dadurch hat man ein Maß für den Winkel. Mit der Quadratrix des Sophisten Hippias ist ein Winkel in beliebige n gleichgroße Teile kinematisch möglich.



Da die Teilung einer Strecke in n gleich große Teile mit Hilfe des Strahlensatz ausgeführt werden kann, sind die angegeben Messungen definiert.





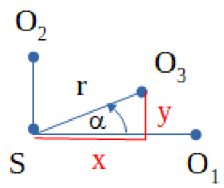
Das Objekt O_3 lässt sich also lokalisieren durch das Winkelmaß bezogen auf den rechten Winkel, das Maß α also, das S O_3 mit der Referenzstrecke S O_1 einschließt und der Länge r von S O_3 bezogen auf die Länge von S O_1., also durch (S, O_1 , O_2 , r , α).

Das ist wahrscheinlich das System, mit dem man im Alltag Dinge lokalisiert. Zwei Achsen als Referenzsystem zu wählen ist schon etwas abstrakter.

2. Transformation von einem Bezugssystem zu einem andern

1. Die Transformation von (S, O_1 , O_2 , r , α) in (S, O_1 , O_2 , x, y), wobei hier beidesmal SO_2 orthogonal zu SO_1 ist, geschieht über die ***Vermittlung von O_3***[2] durch die Gleichungen:

$x = r\cos\alpha$ $\quad y = r\sin\alpha$ wobei O_3 im ersten System die Koordinaten r , α hat und im zweiten x , y.

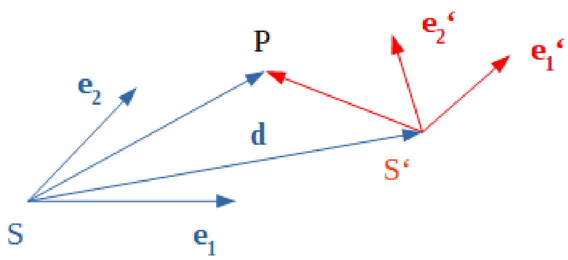


Umgekehrt geht die Transformation vom zweiten zum ersten durch: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad \alpha = atn\,\frac{y}{x}$

2. Die Transformation von (S, O_1 , O_2 , x , y) nach (S‘, O_1‘ , O_2‘ , x‘ , y‘) und umgekehrt.

Das erste System kann man mit den *Basisvektoren* $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{SO_1}$ *und* $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{SO_2}$ abkürzen zu

$\Sigma = \{\ S, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ und das zweite mit $\Sigma' = \{\ S', \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$ mit $\boldsymbol{e}_1' = \overrightarrow{S'O_1'}$ und $\boldsymbol{e}_2' = \overrightarrow{S'O_2'}$.



2 Das ist ein wesentlicher Punkt bei Transformationen zwischen zwei Systemen. Ohne diesen gäbe es keine Möglichkeit, so weit ich sehe, die beiden Systeme in Beziehung zu setzen. Das ist ein ganz allgemeines Problem der Vermittlung und hat somit eine philosophische Dimension: das Problem des Passens. Es gibt nur ein Phänomen, das ohne Vermittlung auskommt, das duale Zeichen.
Der Punkt O_3 bzw. P ist fest in der Veränderung, wodurch sich die Veränderung (Transformation) überhaupt erst beschreiben lässt.

Sei im System Σ der Punkt P lokalisiert durch $\overrightarrow{SP}=x\,\boldsymbol{e_1}+y\,\boldsymbol{e_2}=:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_\Sigma$ und

im System Σ' durch $\overrightarrow{S'P}=x'\,\boldsymbol{e_1}'+y'\,\boldsymbol{e_2}'=:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}_{\Sigma'}$.

Der Ursprung S‘ des zweiten Systems habe im ersten Σ die Darstellung:

$$\overrightarrow{SS'}=:\boldsymbol{d}=d_1\,\boldsymbol{e_1}+d_2\,\boldsymbol{e_2}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}_\Sigma$$

und der Basisvektor $\boldsymbol{e_1}'=\alpha_1\boldsymbol{e_1}+\alpha_2\boldsymbol{e_2}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}_\Sigma$ und $\boldsymbol{e_2}'=\beta_1\boldsymbol{e_1}+\beta_2\boldsymbol{e_2}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}_\Sigma$.

Dann gilt $\overrightarrow{S'P}=x'(\alpha_1\boldsymbol{e_1}+\alpha_2\boldsymbol{e_2})+y'(\beta_1\boldsymbol{e_1}+\beta_2\boldsymbol{e_2})=(x'\alpha_1+y'\beta_1)\boldsymbol{e_1}+(x'\alpha_2+y'\beta_2)\boldsymbol{e_2}$,

damit gilt $\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SS'}+\overrightarrow{S'P}=\overrightarrow{SS'}-\overrightarrow{PS'}=(x'\alpha_1+y'\beta_1+d_1)\boldsymbol{e_1}+(x'\alpha_2+y'\beta_2+d_2)\boldsymbol{e_2}$ und da

andrerseits $\overrightarrow{SP}=x\,\boldsymbol{e_1}+y\,\boldsymbol{e_2}$ folgen die Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}x&=x'\alpha_1+y'\beta_1+d_1=f_1(x',y')\\ y&=x'\alpha_2+y'\beta_2+d_2=f_2(x',y')\end{aligned}$$ [3]

Das lässt sich auch mithilfe einer Matrix $M_{\Sigma'\to\Sigma}=M=\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\\alpha_2&\beta_2\end{pmatrix}$ schreiben:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=M_{\Sigma'\to\Sigma}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$$

Umgekehrt ergibt die Auflösung nach $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ mithilfe der inversen Matrix $M_{\Sigma\to\Sigma'}=M^{-1}$

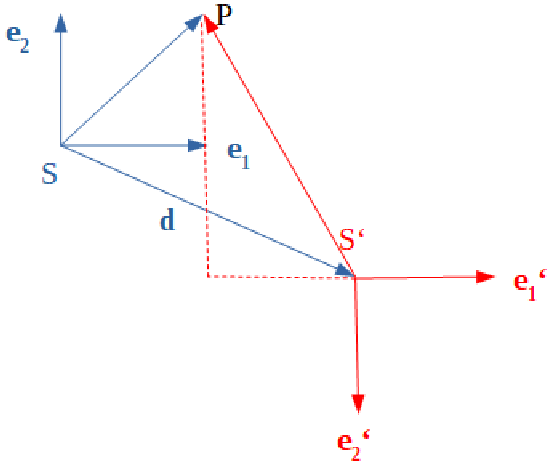
$M^{-1}=\dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix}\beta_2&-\beta_1\\-\alpha_2&\alpha_1\end{pmatrix}$ mit $\det(M)=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ (Bedingung: $\det M\neq 0$)

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\det M}\begin{pmatrix}\beta_2&-\beta_1\\-\alpha_2&\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-d_1\\y-d_2\end{pmatrix}\ .$$

---

3 In der Physik hat man die zeichensparende, aber unschöne, um nicht zu sagen falsche Konvention anstatt $x=f_1(x',y')$ zu schreiben $x=x(x',y')$, da hier ein Zeichen, x, in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird, einmal als Zahlenvariable und einmal als konkreter Funktionsnamen bzw. sogar als Funktionsvariable. Aber das ist typisch für den physikalischen Geist, der auch seine Vorteile haben kann, die allerdings hier außer Zeichenersparnis nicht vorkommen. Wenn man nicht alles zu exakt macht, hat man hin und wieder Gewinn: so spielte Dirac gerne mit Gleichungen und gab ihnen eine andere Wendung und Bedeutung. Erkenntnisse können dadurch entstehen. Dafür gibt es viele Beispiele. Ein einfachstes: $2+1=1+2$. Oder die Entdeckung der Venus: Abendstern = Morgenstern = Venus (Frege).

Beispiel:



$$\overrightarrow{SS'} = \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{e_1}' = \boldsymbol{e_1}$ und $\boldsymbol{e_2}' = -\boldsymbol{e_2}$, also $\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 0$ und $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = -1$

Und sei $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ($\det M = -1$) und $M^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{S'P} \quad .$$

Ist umgekehrt $\overrightarrow{S'P} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, dann ist wegen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_{\Sigma' \to \Sigma} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ mit

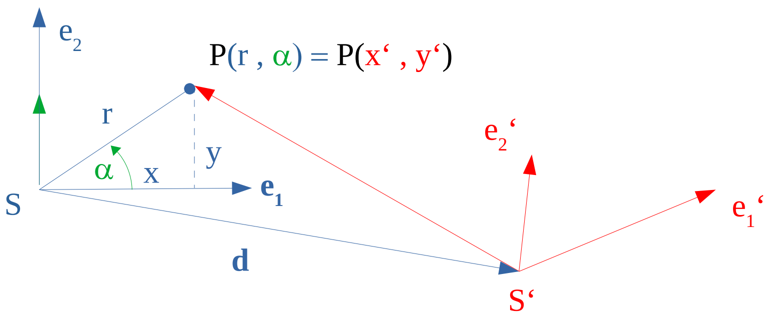
$$M_{\Sigma' \to \Sigma} = M_{\Sigma \to \Sigma'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{SP}$$

(Zur Fußnote 3: $x = x' \cdot 1 + y' \cdot 0 + 2 = f_1(x', y')$ hier ist f_1 Name für die konkrete Funktion

$f_1 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}; (x', y') \to x' + 2$.)

Die beiden Koordinatensystem-Transformationen waren zwei gänzlich verschiedene. Im ersten Fall wählte man verschiedene *Mittel* der Lokalisierung (zwei Achsen und zwei Längenmaße bzw. eine Referenzachse für einen Winkel und ein Längenmaß und ein Winkelmaß) im gleichen Raumsystem, der gleichen Umgebung und im zweiten Fall behielt man die gleiche Art der Mittel bei (beidesmal zwei Achsen, auch wenn eventuell in anderem Verhältnis zueinander) und wechselte das Raumgebiet, was eine stärkere Veränderung bedeutet. Man kann diese beiden Transformationen natürlich auch noch kombinieren. D.h. bspw. dass man von einer Darstellung durch eine Achse und einen Winkel zu einem anderen Raumgebiet mit zwei Achsen wechselt.

Beispiel:



Zuerst transformiert man das erste System in ein Achsensystem (von blau-grün zu blau-blau):

$$x=f_x(r,\alpha)=r\cos\alpha \qquad y=f_y(r,\alpha)=r\sin\alpha$$

Dann führt man das blaue Achsensystem ins rote Achsensystem über:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}x-d_1\\y-d_2\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M^{-1}=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\m_{21} & m_{22}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix} \quad \text{, wobei} \quad M=M_{\Sigma'\rightarrow\Sigma}$$

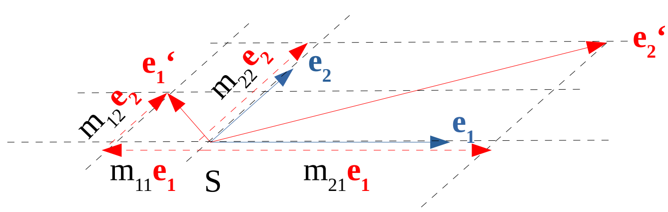
sodass gilt:
$$x'=m_{11}(x-d_1)+m_{12}(y-d_2)=:g_{x'}(x,y)$$
$$y'=m_{21}(x-d_1)+m_{22}(y-d_2)=:g_{y'}(x,y)$$

Durch Hintereinanderausführung der beiden Transformationen $(r,\alpha)\rightarrow(x,y)$ und $(x,y)\rightarrow(x',y')$ ergibt sich die Transformation vom System (r,α) zum System (x',y') :

$$x'=m_{11}(r\cos\alpha-d_1)+m_{12}(r\sin\alpha-d_2)=g_{x'}(f_x(r,\alpha),f_y(r,\alpha))=:h_{x'}(r,\alpha)$$
$$y'=m_{21}(r\cos\alpha-d_1)+m_{22}(r\sin\alpha-d_2)=g_{y'}(f_x(r,\alpha),f_y(r,\alpha))=:h_{y'}(r,\alpha)$$

Die Transformationen *im gleichen Raumgebiet* (der Punkt S bewegt sich nicht[4]) lassen sich unterscheiden in lineare Transformationen und nichtlineare Transformationen.

Zu den **linearen Transformationen** gehören Rotation um S, Spiegelung an Achse durch S, Skalierung und Scherung. Sie haben alle gemein, dass zwei Basisvektoren $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}$ in zwei i.A. andere Basisvektoren $\boldsymbol{e_1}',\boldsymbol{e_2}'$ überführt werden, S aber gleich bleibt.



4 Das gilt nur mathematisch. Das Subjekt bewegt sich wohl, wenn es sich dreht, aber die Stelle um die es sich dreht bleibt fest. Zum Subjekt gehören in der Realität auch seine Orientierungsmittel (Basivektoren oder fester Schenkel beim Winkel).

Die Transformation ist $\boldsymbol{e_1}' = m_{11}\boldsymbol{e_1} + m_{12}\boldsymbol{e_2} = f_1(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ $\quad \boldsymbol{e_2}' = m_{21}\boldsymbol{e_1} + m_{22}\boldsymbol{e_2} = f_2(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ oder

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1}' \\ \boldsymbol{e_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix}$ mit der Transformationsmatrix $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ und den

Pseudovektoren $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1}' \\ \boldsymbol{e_2}' \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix}$.

Das neue KS ist also eine Art Objekt für das erste KS, wobei das alte dann in Erinnerung gehalten wird, wenn das neue als Bezugssystem angenommen wird. Ein Perspektivenwechsel. Gewöhnlich wird die Transformation aus der Vogelperspektive betrachtet, sozusagen als „wissender" Dritter[5], indem beide KS von einem dritten nicht immer klar gewussten KS aus betrachtet wird, wobei die KS dann von dort aus als zwei Objekte gesehen werden. Das ist in anderer Form das Problem vom „dritten Menschen". Will man das vermeiden, und „horizontal" bleiben, d.h. sich[6] als Teil der Welt sehen, muss der Wechsel anders „gesehen" werden. Das hat Husserl versucht. Aber auch das bleibt zu schematisch. Es muss zuerst das erste System ernster genommen werden und die Abstraktionen überprüfen. Man vergisst die Geschichte der KS. Ein KS ist nur sinnvoll, wenn es etwas außer ihm gibt, etwas zu sehen gibt. Ein üblicher und verständlicher Fehler von Philosophie und Wissenschaft. Brentano nannte als Charakteristikum des Sehens die Intentionalität, was schon Platon immer wieder monierte. Sehen sei immer schon sehen von etwas. Es ist wohl richtig, wenn man in einer schon ausgebildeten Welt lebt (in der Mathematik ein Raum mit Punkten, die man glaubt durch reelle Zahlen oder komplexeren Zahlen abbilden zu können). Aber wenn man den Prozess vergisst, der dahin geführt hat, bleibt man naiv, was zum großen Teil die Empiristen sind. Lässt man die Objekte weg im Sinne einer leeren Intentionalität, einfach einer fundamentalen Gerichtetheit, kommt man der Wahrheit, glaube ich, etwas näher. Das hatte auch Leibniz empfunden gegenüber der geistentleerten Mechanik von Descartes und überhaupt der Neueren (abgesehen natürlich von ihren großen Verdiensten). In einem seiner ersten natur*philosophischen* Werke „Système nouveau de la nature et de la communication des substances (1695)" plädierte er, um „approfondir les principes mêmes de la Mécanique" für die Einführung des Begriffs der *Kraft*, die in den Dingen vorhanden sein müsse, eine Art Entelechie des Aristoteles. „Je trouvai donc que leur nature [der Bausteine der Materie] consiste dans la force et que de cela s'ensuit quelque chose d'analogique au sentiment et à *l'appétit*[7]; et qu'ainsi il fallait les concevoir à l'imitation de la notion que nous avons des âmes." M.E spricht Leibniz hier etwas Wesentliches an, auch wenn man nicht von Seele zu sprechen braucht. Aber diese Gerichtetheit ist nicht nur abstrakt, und auch noch nicht konkret.
Sie ist das Wesen des Geistes oder der Vernunft im Gegensatz zur klassischen neuen Sicht der Materie. So ähnlich sah es auch Brentano. Die Physik kennt zwar diese Gerichtetheit im Begriff der Entropie auch, aber sie ist eine ganz andere, eine auflösende. Nimmt man die Subjektivität des Wissenschaftlers und des Menschen zunächst allgemein ernst, muss man sie zuerst verstehen. Heute wird zwar meistens alles was mit Geist zusammenhängt als Illusion deklariert, was den „Geist" der Zeit durchaus gut reflektiert, ebenso auch bezweifelt man gerne, dass ein originäres Ich existiere, was auch nicht ganz falsch ist, aber das hängt mit der Widersprüchlichkeit des Ichs, des Subjekts zusammen. Dass ein Widerspruch auch konstruktiv sein kann, ahnen wir spätestens mit Heraklit und besonders seit Hegel. Worin besteht er? Geht man an den Anfang der Entwicklung so weit wie möglich zurück, sozusagen zu den Axiomen menschlicher ontogenetischer Existenz, so landet man unweigerlich bei der Geburt[8]. Genau hier entsteht der Kern des Ichs, in der Trennung. Der menschliche Geist strebt aber schon immer (Parmenides, Heraklit, Platon) zur Einheit, nicht erst seit Kant. Das manifestiert sich sehr deutlich bei der Geburt, die die Entzweiung einer

5 In der Literatur wird diese Perspektive dem sogenannten auktorialer (allwissender) Erzähler zugesprochen (bspw. Balzac), die abgelöst wurde im nouveau roman von einer „horizontalen" Sicht.
6 Dann jedes KS ist stets eine mathematisch schematisierte Kurzfassung der wirklichen Problems.
7 Kursiv von mir
8 Die aber keine Tragödie ist, im Gegenteil.

vorherigen ungewussten Einheit ist. Hier scheint diese Intentionalität fast inert zu sein, eine Art Todestrieb (Nirwanaprinzip) hat es Freud genannt. Doch das ist „nur“ die Erinnerung. Die geistige Tat ist das Gegenteil. Auch Platon hat es idealistisch zwar, aber doch recht klarschauend benannt. Das was unsere Dinge verständlich macht, sind Ideen, denn sie konstruieren mit die Dinge.
Es ist der Wille nach Rekonstruktion der verlorenen Einheit, aber mit anderen Mitteln, mit Mitteln des Anderen, der Anderen und der „Natur“. Das ist die Grundstruktur der Wissenschaft, deren Einheitsstreben immer wieder durch die Natur ein Nein gesetzt wird: so ist es nicht. Gott sei Dank, kann man sagen, denn ohne dies Korrektiv des Anderen, was nur partiell anders ist, der Mensch das Schicksal eines in seinen Konstruktionen Gefangenen hätte, was als Krankheit deklariert wird, falls nicht das ganze System falsch ist, sodass die Gesunden als krank bezeichnet werden.

Durch diese Intentionalität, die noch ganz gegenstandslos ist, da ihr Ziel ja nur in der blassen Erinnerung und Vergangenheit liegt, wird mithilfe des Widerspenstigen des Anderen die „Welt“ allmählich konstruieren.

Zurück zum Koordinatensystem. Der Ausgangspunkt ist das erkennenwollende Subjekt S, das eine Intentionalität auf vages Anderes hat. Seine Achsen kann es erst errichten, wenn es einige, um nicht zu sagen viele Objekte konstruiert hat (im hindernden Wechselspiel seiner nur partiell erfüllten Erwartungen), die ihm eine gewisse Konstanz bieten. Ohne diese ist ein KS nicht möglich.
Das Subjekt betrachtet diese eben als Objekte, als Dinge, als Kristallisationen seiner Einheitssuche. Das aber ist Blickverengung. Denn diese Einheit wird *nur* im Wechselspiel, in der Interaktion und „Kommunikation“ mit dem Anderen erreicht. Genau genommen gibt es keine Objekte. Das ist das Fatale an der Wissenschaft seit Galilei. Wird dieser Zusammenhang nicht gesehen, so entsteht eine Trennung in Idee und Ding, in Subjekt und Objekt. Das sieht doch wohl sehr als eine Art Wiederholuung und Art Rache aus: Ich trenne, weil ich getrennt wurde. Die Geburt als Negativum.

Man versteht das Andere nicht, wenn man es als Objekt sieht. Dagegen wendet sich das „Objekt“. Was uns als Korrektiv erscheint[9], nicht ganz zu Unrecht, aber in einem anderen Sinn.
Der Perspektivenwechsel von „S“ zu „O“, also die Transformation des KS ist formal richtig. Wo O war, soll S werden[10]. Nur sollte das O sich im Wissen zum S transformieren, so wie das Ding beim Abendmahl (die Hostie) zum lebendigen Ich wird, und nicht bloß seinen Platz einnehmen. Das wird ja in der menschlichen Kommunikation im Dialog versucht[11].

Die Mathematik des Wechsels des KS ist nur ein schlechter Abklatsch dieses Phänomens.
Das soll trotzdem in der formalen Sichtweise nun weiter betrachtet werden.

Vom neuen KS kann man wieder auf das alte zurückblicken und es aus dieser anderen Perspektive „anschauen“ und bemerken, wie Andere einen sehen. So dass Subjekte sich gegenseitig als Objekte gleicher Art deklarieren. So ähnlich wie Newton die Kräfte in seinem dritten Axiom definiert hat:

$$F_{12}=-F_{21} \quad .$$

9 Das ist ja der richtige Aspekt der Popperschen Wissenschaftstheorie.

10 Freuds Spruch: „Wo Es war, soll Ich werden“ erhält damit ein anderes Gesicht. Diese Ich ist leider verkehrt und man müsste den Spruch umkehren, wobei das Es als Teil einer Kommunikation erscheint. Lorenzer versuchte Krankheit als Zerstörung dieser Kommunikation zu verstehen.

11 Ich meine, dass auch die „Natur“ diese Intentionalität hat, wie Leibniz es sieht, nur nicht fensterlos und in der neueren Physik geht man ja allmählich in diese Richtung: dynamische Kräfte wurden schon von Newton als Wechselwirkung verstanden und heute werden Kräfte meistens als vermittelte Kommunikation verstanden (siehe Bosonen, etwa virtuelle Photonen als symmetrischer Hermes gleichberechtigter Partner, den Elektronen und Positronen etc.)

Doch zunächst bleibt der Standort von S erhalten und nur seine Orientierungsmittel (die Achsen) werden transformiert, d.h. einige Objekte durch andere ersetzt, was seinen Blick variiert und erweitern kann.

War sein erstes System $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ und nahm er damit die Objekte $\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}'$ wahr,

$$M\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\ \boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}'\\ \boldsymbol{e_2}'\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix} \quad .$$

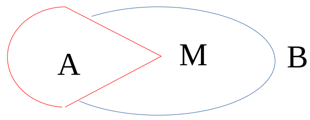
so blickt er nun von dem Objektsystem $\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}'$ aus auf sein erstes Objektsystem $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$.

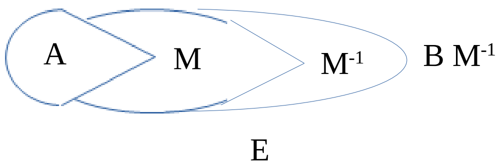
Doch zunächst, welche Bedeutung hat M? M ist die Vermittlung, der Hermes, der Erkenntnisapparat. Für Kant war er das, was der Verstand zur Erkenntnis beisteuert. Die Sinnesdaten sind dabei $\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}'$.

Schaut man nun mit Hilfe des empirischen Systems $\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}'$ auf die nunmehrigen Objekte $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$, was ist dabei der Verstand, welche Matrix (welcher interne Hermes) erlaubt die neue Sicht?

Dazu muss man nur die alte Matrix M neutralisieren. Man wechselt den Propheten, indem man den Antipropheten agieren lässt, der allerdings mit ihm eine intensive Verbindung unterhält. Das ist eigentlich sehr interessant. Zugrunde liegt die Einheit der Gegensätze, eine duale Struktur, die die tertiäre der Vermittlung ermöglicht. Diese Einheit ist $E=M^{-1}M=M\,M^{-1}$.

Sei $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\ \boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}'\\ \boldsymbol{e_2}'\end{pmatrix}$

Zunächst ergibt die Verbindung von M mit A eben B: 



Betrachtet man in der letzten Figur die Neutralisierung von M und M^{-1} zu E, so bleibt A isoliert übrig, sieht man aber das alte B als Einheit von A und M so ist dies mit dem M^{-1} eben BM^{-1}.[12]

In der Mathematik ist alles wie immer einfacher und „klarer“.

Was ist die Matrix, die M neutralisiert? Man nennt sie eben M^{-1}, die sich ergibt aus der einfachen

Gleichung $M\cdot M^{-1}=E \Leftrightarrow \begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}m_{22} & -m_{12}\\ -m_{21} & m_{11}\end{pmatrix}:(m_{11}m_{22}-m_{21}m_{12})}_{M^{-1}}$

12 In der Physik ist Neutralisierung nicht Verschwinden, sondern höchstens aus dem gleichen Bereich, ev. der Materie: $\gamma=e^{-}\cdot e^{+}$, wobei γ keine Materie mehr ist, sondern ein „geistiges“ Photon.

Die Matrizenmultiplikation ergibt:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21} & -m_{11}m_{12}+m_{12}m_{11} \\ m_{21}m_{22}-m_{22}m_{21} & -m_{21}m_{12}+m_{22}m_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21} & 0 \\ 0 & -m_{21}m_{12}+m_{22}m_{11} \end{pmatrix}$$

dividiert durch $(m_{11}m_{22}-m_{21}m_{12}) =: det\, M$ ergibt genau $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Also $M\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1}' \\ \boldsymbol{e_2}' \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1}M\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1}' \\ \boldsymbol{e_2}' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1}' \\ \boldsymbol{e_2}' \end{pmatrix}$.

Wie transformieren die Koordinaten bei einer linearen Transformation?

Ist P ein fester Punkt, der im System $\Sigma:\ \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ die Koordinaten x_1, x_2 hat und in dem transformierten System $\Sigma':\ \boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}'$ die Koordinaten x_1', x_2' , so gilt:

$\overrightarrow{SP}_\Sigma = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2}$ und $\overrightarrow{SP}_\Sigma' = x_1'\boldsymbol{e_1}' + x_2'\boldsymbol{e_2}'$. also

$$\overrightarrow{SP}_\Sigma' = x_1'\boldsymbol{e_1}' + x_2'\boldsymbol{e_2}' = x_1'(m_{11}\boldsymbol{e_1} + m_{12}\boldsymbol{e_2}) + x_2'(m_{21}\boldsymbol{e_1} + m_{22}\boldsymbol{e_2}) = (x_1'm_{11} + x_2'm_{21})\boldsymbol{e_1} + (x_1'm_{12} + x_2'm_{22})\boldsymbol{e_2}$$

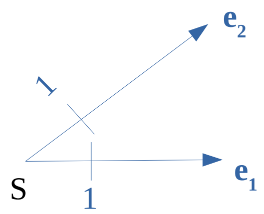
Da mit S und P auch $\overrightarrow{SP}$ fest gilt: $\overrightarrow{SP}_\Sigma' = \overrightarrow{SP}_\Sigma$ und damit

$\begin{matrix} x_1 = x_1'm_{11} + x_2'm_{21} \\ x_2 = x_1'm_{12} + x_2'm_{22} \end{matrix}$ oder $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M^T\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ und damit

$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = (M^T)^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Im Vergleich zu $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1}' \\ \boldsymbol{e_2}' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix}$ transformieren die Koordinaten

kontravariant: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = (M^T)^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

1. Streckung (Skalierung):



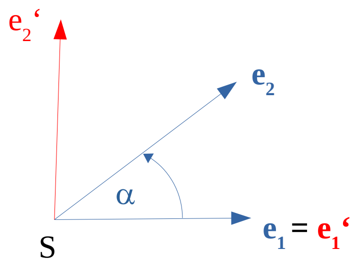
Wird $\boldsymbol{e_1}$ mit dem Faktor k_1 gestreckt und $\boldsymbol{e_2}$ mit dem Faktor k_2, so gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_1}' &= k_1\boldsymbol{e_1} + 0\,\boldsymbol{e_2} = m_{11}\boldsymbol{e_1} + m_{12}\boldsymbol{e_2} \\ \boldsymbol{e_2}' &= 0\,\boldsymbol{e_1} + k_2\boldsymbol{e_2} = m_{21}\boldsymbol{e_1} + m_{22}\boldsymbol{e_2} \end{aligned}$$

das heißt: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1}' \\ \boldsymbol{e_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix}$

Wird speziell das System normiert, dann ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\boldsymbol{e_1}\|} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|\boldsymbol{e_2}\|} \end{pmatrix}$.

2. Orthogonalisierung eines Systems (Gram-Schmidt)



$$\boldsymbol{e_1}' = 1 \cdot \boldsymbol{e_1} + 0 \cdot \boldsymbol{e_2} = m_{11}\boldsymbol{e_1} + m_{12}\boldsymbol{e_2}$$
$$\boldsymbol{e_2}' = -\frac{\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_2}}{\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_1}}\boldsymbol{e_1} + 1 \cdot \boldsymbol{e_2} = m_{21}\boldsymbol{e_1} + m_{22}\boldsymbol{e_2}$$

das heißt $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1}' \\ \boldsymbol{e_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_2}}{\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\|\boldsymbol{e_2}\|}{\|\boldsymbol{e_1}\|}\cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix}$

($\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_1} \neq 0$ bzw. $\|\boldsymbol{e_1}\| \neq 0$ da $\boldsymbol{e_1} \neq \boldsymbol{0}$ als Basisvektor) α ist der Winkel zwischen den Achsen,

oder falls das System bereits normiert ist, ist die

Transformation $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1}' \\ \boldsymbol{e_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix}$. Ihre Rücktransformation zum Winkel α wäre

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1}' \\ \boldsymbol{e_2}' \end{pmatrix}$ **(Scherung mit Streckung)**

3. Orthonormalisierung

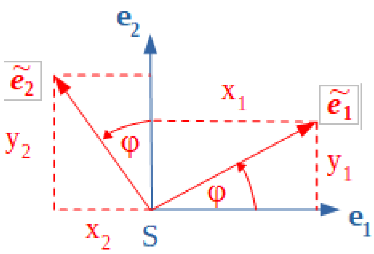
Hintereinanderausführung von Orthogonalisierung und Normierung.

4. Rotation um S mit Winkel φ

Hintereinanderausführung folgender Kette von linearen Transformationen:

Normierung, Orthogonalisierung, Rotation mit Winkel φ, zurück zu Winkel α, zurück zur ursprünglichen Länge, d.h. Streckung mit $k_1 = \|\boldsymbol{e_1}\|$ und $k_2 = \|\boldsymbol{e_2}\|$.

Rotation eines orthonormalen Systems mit Winkel φ um S :

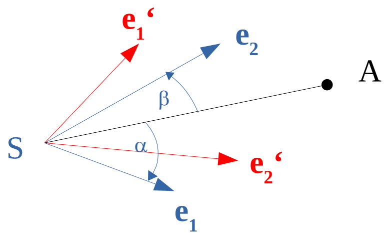


$x_1=\cos\varphi \qquad y_1=\sin\varphi \qquad x_2=-\sin\varphi \qquad y_2=\cos\varphi$

$\tilde{\boldsymbol{e}}_1=\cos\varphi\,\boldsymbol{e_1}+\sin\varphi\,\boldsymbol{e_2}=m_{11}\,\boldsymbol{e_1}+m_{12}\,\boldsymbol{e_2} \qquad \tilde{\boldsymbol{e}}_2=-\sin\varphi\,\boldsymbol{e_1}+\cos\varphi\,\boldsymbol{e_2}=m_{21}\,\boldsymbol{e_1}+m_{22}\,\boldsymbol{e_2}$

mit $M=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{e}}_1\\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\ \boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}$.

5. Spiegelung an Achse durch S



Man kann zuerst die Basisvektoren $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}$ normieren. Dann sei $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{SA}^0$ ebenfalls normiert mit

$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e_1}+a_2\boldsymbol{e_2}$. $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_1}'$ spannen eine Raute auf, deren Diagonale $\boldsymbol{e_1}'+\boldsymbol{e_1}$ die Länge

$2\cos\alpha$ hat und auf der Geraden durch SA liegt. Also $\boldsymbol{e_1}'+\boldsymbol{e}=2\cos(\alpha)\boldsymbol{a}$ (über Raute).

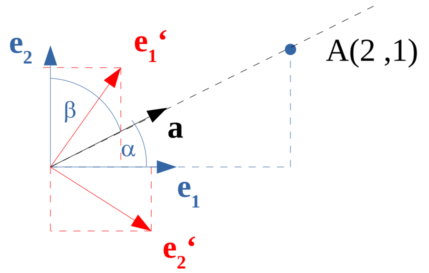
Damit ist $\boldsymbol{e_1}'=(\lambda a_1-1)\boldsymbol{e_1}+\lambda a_2\boldsymbol{e_2}$ mit $\lambda=2\cos\alpha$. Analog ergibt sich

$\boldsymbol{e_2}'=\mu a_1\boldsymbol{e_1}+(\mu a_2-1)\boldsymbol{e_2}$ mit $\mu=2\cos\beta$. Demnach ist die Transformation:

$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}'\\ \boldsymbol{e_2}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1-1 & \lambda a_2\\ \mu a_1 & \mu a_2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\ \boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}$ und $\alpha+\beta=\cos^{-1}(\boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{e_2})$

Will man wieder die ursprüngliche Längen der gespiegelten Basisvektoren führt man wieder eine entsprechende Streckung aus.

Beispiel: Sei das Koordinatensystem mit Orthonormalbasis gegeben.

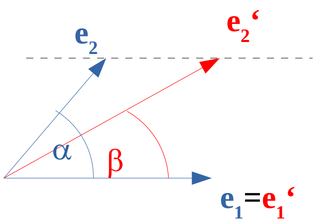


$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\cos\alpha\Rightarrow\lambda=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\boldsymbol{e_2}\cdot\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\cos\beta\Rightarrow\mu=\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \lambda a_1-1=\frac{3}{5} \qquad \lambda a_2=\frac{4}{5} \qquad \mu a_2-1=-\frac{3}{5} \qquad \mu a_1=\frac{4}{5}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}'\\\boldsymbol{e_2}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1-1 & \lambda a_2\\ \mu a_1 & \mu a_2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\\boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\\boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{e_1}'=\frac{3}{5}\boldsymbol{e_1}+\frac{4}{5}\boldsymbol{e_2} \qquad \boldsymbol{e_2}'=\frac{4}{5}\boldsymbol{e_1}-\frac{3}{5}\boldsymbol{e_2}$$

6. Scherung



Hier werde ausschließlich die Scherung parallel zu $\mathbf{e}_1$ betrachtet. Parallel zu $\mathbf{e}_2$ analog.
Man kann folgende Hintereinanderausführungen bilden:

1. Orthogonalisierung (von $\alpha\rightarrow 90°;\boldsymbol{e_2}\rightarrow\boldsymbol{e_2}'$), dann 2. Rückbildung (von $90°\rightarrow\beta;\boldsymbol{e_2}'\rightarrow\boldsymbol{e_2}''$) dann 3. Streckung von $\boldsymbol{e_2}''\rightarrow\boldsymbol{e_2}'''$. Die letzte Transformation verwendet die Matrix

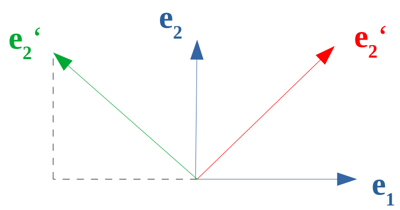
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{\|\boldsymbol{e_2}\|}{\|\boldsymbol{e_2}''\|}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\end{pmatrix} .$$

Geht man von einem Orthonormalsystem aus: $\alpha=90°;\|\boldsymbol{e_1}\|=\|\boldsymbol{e_2}\|=1$, so ist die Scherung auf den Winkel β einfach:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}'\\\boldsymbol{e_2}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \cot\beta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1}\\\boldsymbol{e_2}\end{pmatrix}$$

Beispiel: $\beta=45^{\circ}$ bzw. $\beta=135°$

$\cot\beta = 1 \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1' \\ \boldsymbol{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$, also mit $\boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$

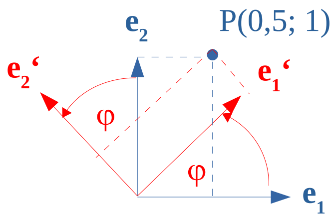


bzw. $\cot\beta = -1 \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1' \\ \boldsymbol{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$, also mit $\boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$

Verschiebt man das Koordinatensystem zusätzlich, so bleiben die Basisvektoren erhalten, nur der Subjektpunkt S wird verschoben.

Die Transformation eines KS hat nur Sinn, wenn sich etwas in der „Welt“ ändert. D.h. zumindest ein Punkt P. Seite 15 wurde gezeigt, dass sich die Koordinaten des Punktes beim Wechsel der Basis kontravariant bzgl. des Basiswechsels verhalten.
Den gleichen Wechsel der Koordinaten kann man auch erhalten, wenn man den Punkt P (Objekt) transformiert zum Punkt P‘, nur entgegengesetzt. Man nennt das auch eine *aktive Transformation* im Gegensatz zur passiven (bzgl. des Punktes) Transformation des KS.

Beispiel: Es sei ein Orthonormalsystem gegeben und ein fester Punkt P. Das System werde um den Winkel φ im positiven (mathematischen) Sinn gedreht. Wie lauten die Koordinaten des Punktes im neuen System (passive Transformation)?

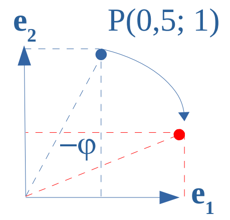


$\varphi = 45°$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1' \\ \boldsymbol{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{, also} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Jetzt werde das System festgehalten und der Punkt P gedreht im mathematisch negativen Sinn, also mit dem Winkel $-\varphi$ (aktive Transformation). Wie lauten die Koordinaten des Punktes P‘?



$$-\varphi=-45°$$

Siehe S.19 $\begin{matrix} x'=x\cos(-\varphi)-y\sin(-\varphi) \\ y'=x\sin(-\varphi)+y\cos(-\varphi) \end{matrix}$ oder $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

also $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$, also genau das gleiche Ergebnis!

Damit wird noch einmal klar, dass das Referenzsystems von der gleichen Art und Beziehung zu einem weiteren Punkt ist, wie die „Objekte“, die er lokalisiert. Es sind Objektverhältnisse. Nur dass das Referenzsystem in der Regel eine *konstante Umgebung* des Subjekts ist, wohingegen das lokalisierte Objekt nicht dazu gehört. Eine Bewegung des Objekts kann also auch durch eine Bewegung des Referenzsystems, des Subjekts einschließlich seiner Umgebung erfolgen. Die Resultate, d.h. die Verhältnisse sind gleich. Das haben eben V*erhältnisse* an sich. Der Raum zwischen dem Referenzsystem und dem Objekt ist relativ (Leibniz) und eine Veränderung kann so oder so dargestellt werden, nur der Raum des Referenzsystems selbst ist sozusagen absolut (Newton). Ohne das gäbe es keine Transformationsgleichungen. Eine Bewegung ist ohne diesen absoluten Referenzraum nicht denkbar. Wie sollte denn überhaupt Bewegung feststellbar sein. Nimmt man eine Welt an, die nur aus zwei Objekten besteht ohne weitere Konstanzen, so gibt es keine Messbarkeit und mithin auch keine Bewegung. Nicht nur, dass man nicht sagen kann, wer oder was sich bewegt (der Zug oder der Beobachter) , sondern sie wäre schlechthin nicht feststellbar. Das kann man auch im Alltag feststellen bei der bekannten Verwirrung mit den zwei Zügen. Wer steht und wer fährt. Zunächst wird man meinen, der andere Zug fährt (wenn der eigene sehr sanft angefahren ist, man also keine Kraft verspürt hat. Wenn man nur wenig von dem anderen Zug sieht, denn die Umgebung des eigenen Zuges ist ja fest. Ist der andere Zug aber „weggefahren“ und sieht man draußen die größere Umgebung, so kippt das Bild und man merkt, dass der eigene Zug fährt, denn er ist das kleiner Referenzsystem gegenüber dem größeren der Landschaft. Darum dreht sich auch die Erde nicht um die Sonne für uns, da die Erde das größere, also feste Referenzsystem für uns ist. Darüber hinaus kann man das auch neurologisch erklären, da es viel mehr Berechnung bedarf, viele Objekte neu zu lokalisieren als nur wenige.

Ist also das Objekt sehr reichhaltig, so wird man gut daran tun, das eigene Referenzsystem zu verändern und nicht das komplexere Objekt.[13]

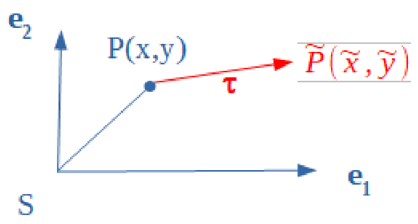
13 Das ist auch ein Grund für den Traditionalismus. Und zum Teil für psychische Krankheiten, weil es oft leichter erschient das einem fremde System zu verändern als das eigene festgefahrene Subjektbild, wobei zu diesem Subjektbild eben auch die von ihm konstruierte und internalisierte Weltanschauung gehört. Wenn der Berg nicht zum Propheten kommt, so ist es oft besser, dass der Prophet zum Berge geht. Was aber kein Hinderungsgrund sein

Man kann also alle besprochenen System-Transformationen durch Objekt-Transformationen ersetzten und umgekehrt.

Werden Translationen mit hinzu genommen, die keine linearen Abbildungen mehr sind, so erhält man sogenannte **affine Transformationen**. Dazu muss man aber die umgekehrte Richtung wieder wählen, d.h. das eigene System fest lassen und das Objektsystem transformieren.

Je nach Transformation bieten sich spezielle Koordinatensysteme an.

1. Translation:



Ist $\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{S\tilde{P}}=\overrightarrow{SP}+\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix}x+t_1\\y+t_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}$

Hier gibt es keine Transformationsmatrix, es sei denn man wählt die nichts vollbringende Einheitsmatrix, um formal eine zu haben.

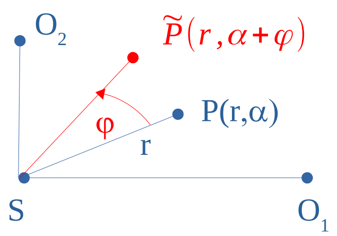
$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} \quad .$$

Damit hat man auch schon die **Form der affinen Transformation**:

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}$$

2. Rotation:

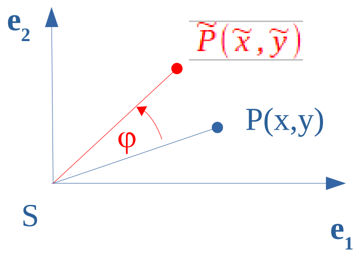
2.1 um S mit Winkel φ



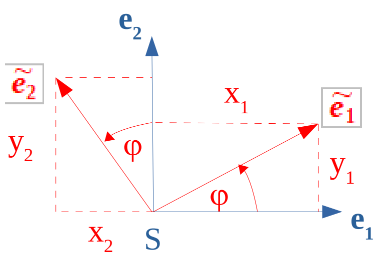
oder man verwendet ein Achsensystem, etwa ein kartesisches:

---

darf, falsche Gesellschaftsstrukturen nicht schrittweise zu verändern.

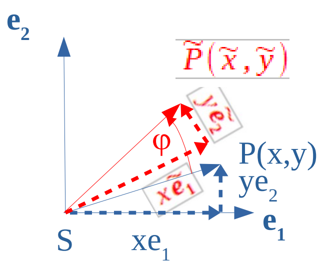


Da sich die Punkte durch die Einheits-Basisvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ darstellen lassen, kann man Abbilder dieser Basisvektoren rotieren und dann sehen, wie sich der rotierte Punkt darstellen lässt.



$$x_1 = |\widetilde{\boldsymbol{e}}_1| \cos\varphi = \cos\varphi \qquad y_1 = \sin\varphi \qquad x_2 = -\sin\varphi \qquad y_2 = \cos\varphi$$

$$\widetilde{e}_1 = \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \widetilde{e}_2 = -\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (*)$$



Das blaue rechtwinklige gepunktete Dreieck wird mit gedreht zum roten rechtwinklig gepunkteten roten Dreieck. Die Längen verändern sich nicht, daher hat bspw. der gedrehte Vektor $x\widetilde{\boldsymbol{e}}_1$ die gleiche Vorzahl wie $x\boldsymbol{e}_1$.

Es gilt also mit (*) $x\widetilde{\boldsymbol{e}}_1 = x\cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + x\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_2$ und $y\widetilde{\boldsymbol{e}}_2 = -y\sin\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + y\cos\varphi\, \boldsymbol{e}_2$, daraus folgt

$$\overrightarrow{S\widetilde{P}} = x\widetilde{e}_1 + y\widetilde{e}_2 = (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2 \quad \text{und da auch} \quad \overrightarrow{S\widetilde{P}} = \widetilde{x}\,\boldsymbol{e}_1 + \widetilde{y}\,\boldsymbol{e}_2 \quad \text{, ist}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ \widetilde{y} &= x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \quad (**)$$

oder wenn man wieder die Transformationsmatrix M wählt mit $M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

gilt $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

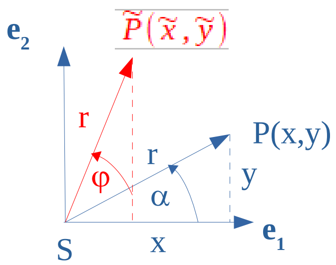
Auflösung nach $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ ergibt mit der inversen Matrix $M^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$$

Es gibt mindestens noch zwei andere Methoden: die erste über die Additionstheoreme von sin und cos und die zweite indem man das KS in entgegengesetzte Richtung dreht und den Punkt fest lässt.

Ich möchte diese beiden anderen Methoden noch angeben:

* über Additionstheoreme:



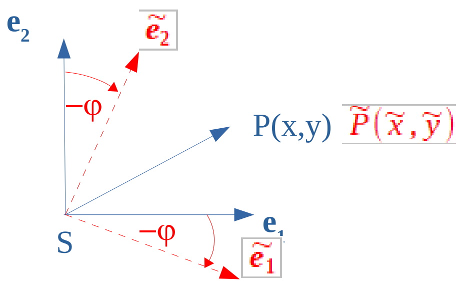
Es gilt $x=r\cos\alpha$ und $y=r\sin\alpha$

Verwendet man (**), so gilt $\begin{aligned}\tilde{x}&=x\cos\varphi-y\sin\varphi\\ \tilde{y}&=x\sin\varphi+y\cos\varphi\end{aligned}$ und andrerseits $\begin{aligned}\tilde{x}&=r\cos(\alpha+\varphi)\\ \tilde{y}&=r\sin(\alpha+\varphi)\end{aligned}$

Die beiden letzten Gleichungen ergeben über die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=r\cos\alpha\cos\varphi-r\sin\alpha\sin\varphi\\ \tilde{y}&=r\cos\alpha\sin\varphi+r\sin\alpha\cos\varphi\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}\tilde{x}&=x\cos\varphi-y\sin\varphi\\ \tilde{y}&=x\sin\varphi+y\cos\varphi\end{aligned}$$

* über KS-Transformation in entgegengesetztem Sinn, P bleibt fest:



Die Position, die P(x, y) passiv im gedrehten System hat, ist die die $\tilde{P}(\tilde{x},\tilde{y})$ als aktiv gedrehter Punkt im festen System hat.

Für die gedrehten Basisvektoren gilt:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1=\cos(-\varphi)\boldsymbol{e}_1+\sin(-\varphi)\boldsymbol{e}_2=\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_2=-\sin(-\varphi)\boldsymbol{e}_1+\cos(-\varphi)\boldsymbol{e}_2=\sin(\varphi)\boldsymbol{e}_1+\cos(\varphi)\boldsymbol{e}_2$$

$$\overrightarrow{S\tilde{P}}=\tilde{x}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_1+\tilde{y}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_2=\tilde{x}(\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2)+\tilde{y}(\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2)=(\tilde{x}\cos\varphi+\tilde{y}\sin\varphi)\boldsymbol{e}_1+(-\tilde{x}\sin\varphi+\tilde{y}\cos\varphi)\boldsymbol{e}_2$$

da der Punkt P fest ist, hat er im festen KS die Darstellung: $\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{S\tilde{P}}=x\,\boldsymbol{e}_1+y\,\boldsymbol{e}_2$.
Koordinatenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} x&=\tilde{x}\cos\varphi+\tilde{y}\sin\varphi \\ y&=-\tilde{x}\sin\varphi+\tilde{y}\cos\varphi \end{aligned} \quad \text{oder mit Matrix} \quad M^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$$

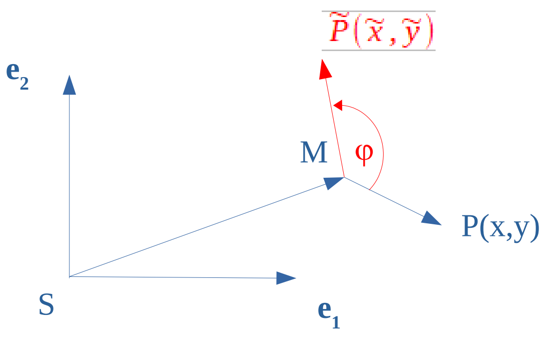
nach $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$ aufgelöst mit Matrix $M=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ ergibt das wieder:

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Affin wird diese Transformation durch zusätzliche Verschiebung:

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$$

2.2 Rotation um einen anderen Punkt M



Das lässt sich zurückführen auf Rotation um den Ursprung, wenn das ganze Objekt MP um $\overrightarrow{MS}$ verschoben wird, dann die Rotation ausgeführt wird und danach wieder zurück geschoben wird:

Translation: $M(m_1,m_2),P(x,y)\xrightarrow{\overrightarrow{MS}}S(0,0),P'(x',y')$ mit $x'=x-m_1 \quad y'=y-m_2$

Rotation : $P'(x',y')\xrightarrow{Rotation}\tilde{P}'(\tilde{x}',\tilde{y}')$ mit $\tilde{x}'=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi \quad \tilde{y}'=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$

Rücktranslation: $\tilde{P}'(\tilde{x}', \tilde{y}') \xrightarrow{\overrightarrow{SM}} \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y})$ mit

$\tilde{x} = (x - m_1)\cos\varphi - (y - m_2)\sin\varphi + m_1 \qquad \tilde{y} = (x - m_1)\sin\varphi + (y - m_2)\cos\varphi + m_2$

oder mit Rotationsmatrix $M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m_1 \\ y - m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Ist das eine lineare oder eine affine Transformation oder nichts von beidem?

Löst man die Gleichung (*) auf zu $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = M\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ und

fasst man der Übersicht halber noch die beiden Endterme zusammen zu $-M\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$,

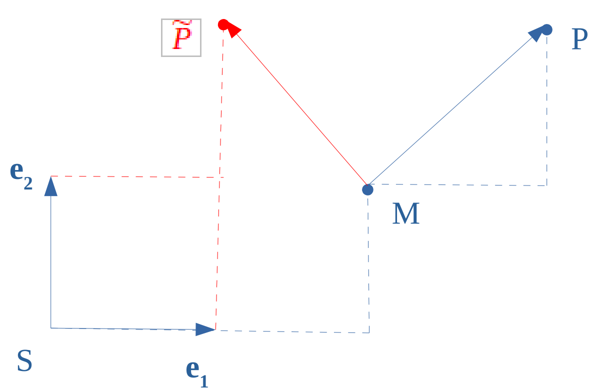
so erkennt man, dass es sich bei (*) um eine affine Transformation handelt:

$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$.

Die Rücktransformation mit $M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} - m_1 \\ \tilde{y} - m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad \text{ebenfalls affin.}$$

Beispiel: $M(2,1) \quad P(3,2) \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

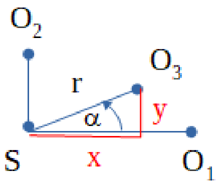


$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3-2\\ 2-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \quad \text{also}$$

$P(3,2) \rightarrow \tilde{P}(1,2)$

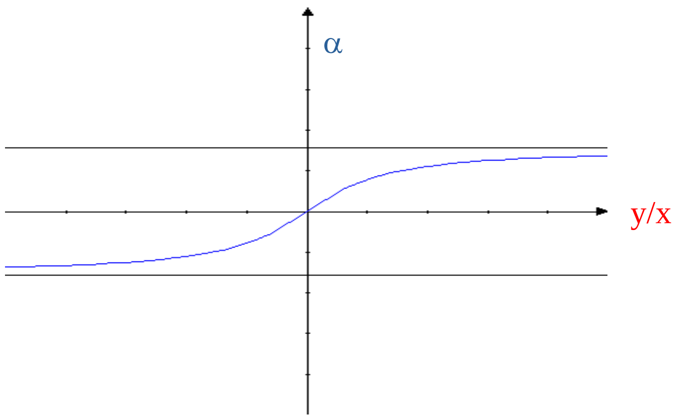
Es gibt aber eine wesentlich andere Transformation, die nicht auf einer Bewegung des Systems oder der reziproken des Objekts beruht, sondern auf der **Mitteltransformation**.

So ist der Wechsel von einem kartesischen System bspw. zu einem System in Polarkoordinaten eine solche Transformation.



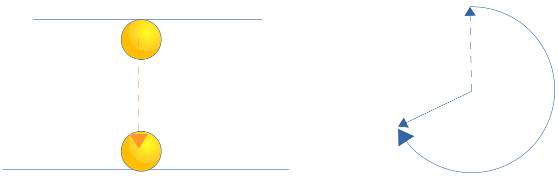
Die Transformationsgleichungen sind vom kartesischen zum Polarsystem:

$x=r\cos\alpha=f_x(r,\alpha)$
$y=r\sin\alpha=f_y(r,\alpha)$ und zurück $r=\sqrt{x^2+y^2}=g_r(x,y)$
$\alpha=atn\left(\frac{y}{x}\right)=g_\alpha(x,y), x\neq 0$ $\quad x=0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$

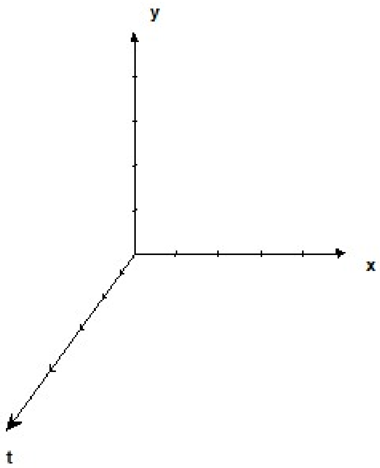


Wie sehen nun die **Transformationen in der klassischen Physik** aus und welche Bedeutungen haben sie?
Das zentrale Interesse in der Mechanik sind Bewegungsprozesse. Und die Physik beschreibt sie durch die beiden Größen **Ort** und **Zeit**. Hier muss wieder gefragt werden, ob das der richtige Ansatz ist. Da es Zeit eigentlich gar nicht gibt, ist das wahrscheinlich problematisch. Denn Zeit wird gemessen über Verhältnisse von Bewegungen. Der Uhrzeiger oder der Mond bewegt sich zyklisch relativ gleichmäßig. Wie das feststellbar ist, ist ein Problem, das ich hier nicht besprechen will.
Eine gewisse Bewegung B kann nun mit der des Uhrzeigers oder eines anderen Prozesses verglichen werden. Um das zu tun, muss der Anfang und das Ende der Bewegung festgestellt werden. Das wird durch den Ort bestimmt. Beispielsweise hängt ein Apfel am Baum, x_0 und fällt auf den Boden, x_1 . Vergleicht man nun diese Bewegung mit der Bewegung des Uhrzeigers, so

muss der Augenblick des Abfallen des Apfels mit der Stelle des Zeigers markiert werden oder einfacher man wählt eine Stoppuhr und versucht so präzis wie möglich die Stoppuhr in dem Moment zu drücken, wenn der Apfel abfällt. Das ist das Problem der Gleichzeitigkeit. Dann wenn er am Boden angekommen ist, muss die Stoppuhr gestoppt werden. Wo befindet sich der Zeiger nun.
Der Einfachheit halber sei angenommen, dass der Zeiger noch keine volle Umdrehung hinter sich hat. Auch hier wird die „Zeit“ wieder durch eine Stelle auf dem Kreis markiert.

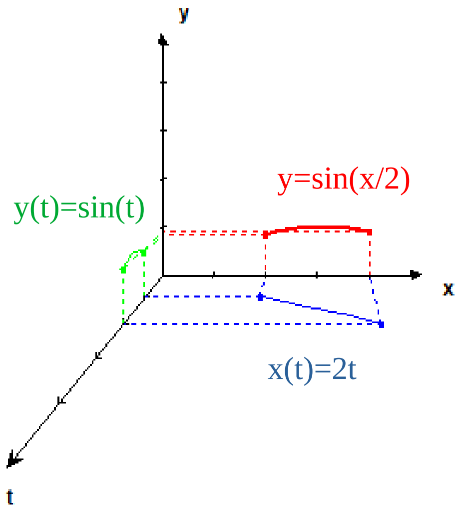


Es ist ganz analog zur Streckenmessung. Daher ist es auch sinnvoll, wenn man die“Zeitmessung“ als Streckenmessung angibt und eine Achse für die „Zeit“ angibt. Dazu muss man eine ausgezeichnete zyklische Bewegung festlegen, sozusagen der Maßstab. Eine Umdrehung ist eine Einheit, die man wie bei der Längenmessung beliebig verfeinern kann. Wählt man eine Längeneinheit als Radius des Kreises , so wäre die Einheit π sinnvoll zur Zeitmessung einer Kreisbewegung mit „konstanter“ Winkelgeschwindigkeit. Aber die Zeitmessung muss nicht geometrisch erfolgen. Vorstellbar sind alle periodischen Prozesse, bspw. Helligkeitszyklen, deren Gleichmäßigkeit wiederum durch Vergleich gleicher Prozesse festgestellt werden kann, natürlich nur bis zu einem gewissen Grad.



Eine Bewegung misst man also durch Orte (x,y, t). Die t-Achse gibt also die ganzen Zyklen eines ausgezeichneten Prozesses als Skala an. Ist der Prozess keine Bewegung, so muss er auf eine zyklische Bewegung abgebildet werden.

So kann eine Bewegung eines Teilchens bspw. in x-Richtung der Gleichung $x(t)=2t$ genügen und in y-Richtung $y(t)=\sin(t)$ mit dem Anfangspunkt $(t,x)=(1,2)$ und $(t,y)=(1,\sin(1))$



und dem Endpunkt $(t,x)=(2,4)$ und $(t,y)=(2,\sin(2))$.

Geht es nur um die durchlaufene Kurve und interessiert nicht, wie schnell die Bewegung war, so erhält man die rote Kurve mit der Gleichung $y=\sin(\frac{x}{2})$ mit dem Anfangspunkt $(x,y)=(2,\sin(1))\approx(2;0{,}84)$ und dem Endpunkt $(x,y)=(4,\sin(2))\approx(4;0{,}91)$.

Die **Geschwindigkeit** wird also verglichen mit der Referenzbewegung und zwar wie viele Zyklen die Referenzbewegung durchlaufen hat während die betrachtete Bewegung vom Anfangsort bis zum Endort gelangt ist. Ist eine Einheit auf der t-Achse ein Zyklus, so brauchte die x-Bewegung wie auch die y-Bewegung 2 Zyklen. Hätte sie zwei Zyklen benötigt, so wäre sie langsamer gewesen, nur halb so schnell. Im angegebenen Beispiel wäre sie für die x-Bewegung $v_x=\frac{\Delta x}{1}=\frac{2}{1}=2$ und für die y-Bewegung $v_y=\frac{\Delta y}{1}=\frac{0{,}07}{1}=0{,}07$. In der gleichen Zeit ist v_y wesentlich langsamer.

Will man die Geschwindigkeiten nicht nur als globale Geschwindigkeit, also im Intervall $[1,2]$ kennen, sondern „momentan[14]“, so müssen die Zeiteinheiten sehr viel kleiner gewählt werden. In x-Richtung ändert das nichts, da die (x,t) Kurve eine Strecke ist. Für die (y,t) Kurve jedoch.

$$\frac{dy(t)}{dt}=\frac{y(t_0+dt)-y(t_0)}{dt}=\frac{\sin(t_0+dt)-\sin(t_0)}{dt}=\frac{(\sin(t_0)\cos(dt)+\cos(t_0)\sin(dt))-\sin(t_0)}{dt}=$$

$$\approx\frac{\sin(t_0)\cdot 1+\cos(t_0)\sin(dt)-\sin(t_0)}{dt}\approx\frac{\cos(t_0)\,dt}{dt}=\cos(t_0)$$. Zu jedem „Moment“ t_0 ist also

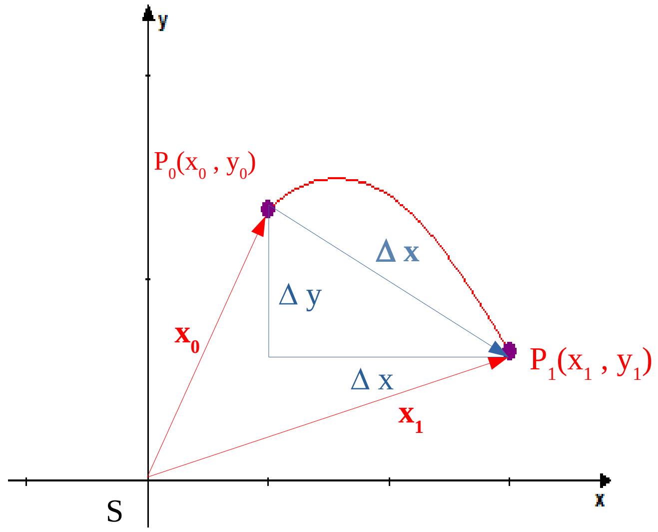
$v_y(t_0)\approx\cos(t_0)$. Newton bezeichnete diese „Ableitung“, d.h. die „momentane“, „punktuelle“

Geschwindigkeit als punktuelle Veränderung der Ratio von Ort durch Zeit mit einem Punkt, also

$v_y(t_0)=\dot{y}(t_0)$.

14 Momentane Geschwindigkeit gibt es im Grunde nicht, während eines „Zeitpunktes“ bewegt sich überhaupt nichts. Gemeint ist damit in einem sehr kleinen Zeitabschnitt den man anstatt mit Δt mit dt bezeichnet nach Leibniz.

Die Bahn (Kurve) der Bewegung eines Teilchens, d.h. die Veränderung der Orte des Teilchens, lassen sich als Veränderung des Ortsvektors darstellen.



Ist $\boldsymbol{x_0}=\overrightarrow{SP}_0$ der Ortsvektor zum Punkt P_0 und $\boldsymbol{x_1}=\overrightarrow{SP}_1$ der zum Punkt P_1, so ist die Translation von P_0 nach P_1 durch den Vektor $\boldsymbol{\Delta x}=\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_0}$ darstellbar. Die Änderung der x-Koordinate ist $\Delta x=x_1-x_0$ und die der y-Koordinate $\Delta y=y_1-y_0$:

$$\boldsymbol{\Delta x}=\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_0}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{pmatrix} .$$

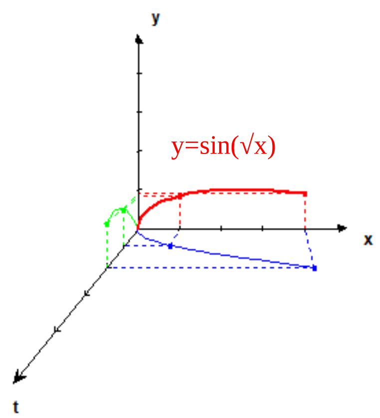
Liegen die Punkte sehr eng (infinitesimal) zusammen, dann ist $\boldsymbol{dx}=\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$.

Will man die momentane Geschwindigkeit messen, also $\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\boldsymbol{dx}}{dt}=\frac{1}{dt}\boldsymbol{dx}=\frac{1}{dt}\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}$,

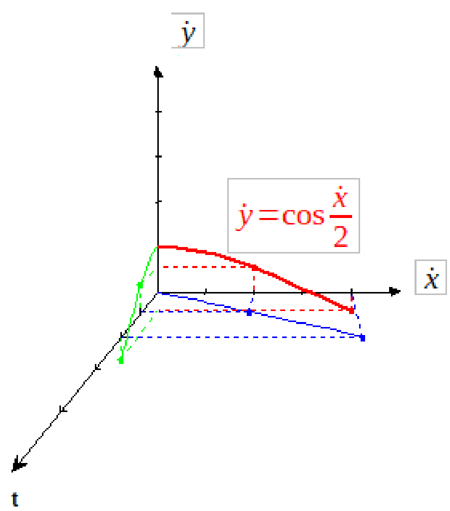
so reicht es aus die Geschwindigkeit der Komponenten zu bestimmen.

Beispiel: $\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2\\\sin t\end{pmatrix}\Rightarrow$ $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{y}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t\\\cos t\end{pmatrix}=\boldsymbol{v}(t)$

Ortskurve:



Geschwindigkeitskurve:

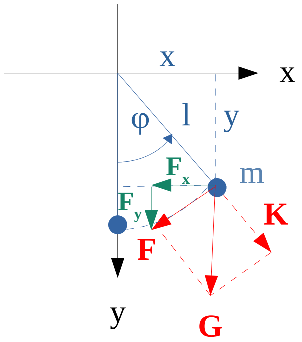


Die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit ist die Beschleunigung $\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{x}}$.#

Interessiert man sich nicht unmittelbar für die Geschwindigkeit der Bewegung, sondern nur für die Bewegungskurve, so ist reicht das x,y-KS. Man nennt die Menge der Punkte der möglichen Bahnen des Teilchens den **Konfigurationsraum**, also eine Teilmenge des KS.

Zyklische Bewegungen sind dann geschlossene Bahnen.

Beispiel: Fadenpendel im kartesischen KS:



Das Pendel habe die Länge l und die gesamte Masse m sei in der Kugel versammelt.
Der Auslenkungswinkel von der Ruhelage auf der y-Achse sei φ . Die Kugel habe dabei die Koordinaten (x,y) für die gilt: $x=l\sin\varphi$ und $y=l\cos\varphi$.

Die Gravitationskraft (Gewicht) **G** zerlegt sich in die Kraft **F**, die das Pendel zur Ruhelage zurücktreibt und in die Kraft **K,** die für die Pendelbewegung keine Wirkung hat. Sie spannt den Faden: Für den Betrag F der bewegungsbewirkenden Kraft **F** gilt: $F=G\sin\varphi$.
Die Kraft **F** zerlegt sich wieder in die Kraftkomponente $\boldsymbol{F_x}$ für deren Betrag gilt $F_x=-F\cos\varphi$ die die x-Bewegung bewirkt. Die andere Komponente $\boldsymbol{F_y}$ mit $F_y=F\sin\varphi$ bewirkt die y-Bewegung.

Das zweite Gesetz von Newton gibt die Formel (**„Bewegungsgleichung“**) an für dynamische Bewegungen, die durch eine Kraft hervorgerufen werden: $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ oder $\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{x}}$ mit

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}F_x\\ F_y\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}$$

Die Beträge ergeben: $-F_x=F\cos\varphi=G\sin\varphi\cos\varphi=mg\sin\varphi\cos\varphi$ und $F_y=mg\sin^2\varphi$

In die x-Bewegungsgleichung eingesetzt: $-m\ddot{x}=mg\sin\varphi\cos\varphi=mg\frac{x}{l}\frac{y}{l}$.

Ist der Auslenkungswinkel klein, dann ist $\cos\varphi\approx 1$ und $\frac{y}{l}\approx 1$, sodass man die genäherte

Differenzialgleichung $\ddot{x}=-\frac{g}{l}x$ ist.

Deren allgemeine Lösung ist: $x(t)=A\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)+B\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$.

Die x-Geschwindigkeit: $\dot{x}(t)=\sqrt{\frac{g}{l}}A\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)-\sqrt{\frac{g}{l}}B\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$ und ihre Beschleunigung

$$\ddot{x}(t)=-\frac{g}{l}A\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)-\frac{g}{l}B\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)=-\frac{g}{l}\left(A\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)+B\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)\right)=-\frac{g}{l}x(t) \quad .$$

Für konkrete Anfangsbedingungen, d.h. für konkretes $x_0=x(0)$ und $\dot{x}_o=\dot{x}(0)$ erhält man:

$$x(0)=A\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}0)+B\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}0)=B \quad \text{und} \quad \dot{x}(0)=\sqrt{\frac{g}{l}}A\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}0)-\sqrt{\frac{g}{l}}B\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}0)=\sqrt{\frac{g}{l}}A\Rightarrow$$

$A=\sqrt{\frac{l}{g}}\dot{x}(0)$, so dass man die Gleichung schreiben kann als

$x(t)=\sqrt{\frac{l}{g}}\dot{x}(0)\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)+x(0)\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$. Ist etwa die Auslenkung in x zur Zeit t = 0 den maximalen Wert 1 und die Geschwindigkeit 0, so lautet diese konkrete Bewegungsgleichung einfach:

$x(t)=\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$ (*).

Nun zur y-Bewegungsgleichung: Da das Pendel einen Kreisbogen beschreibt, gilt:

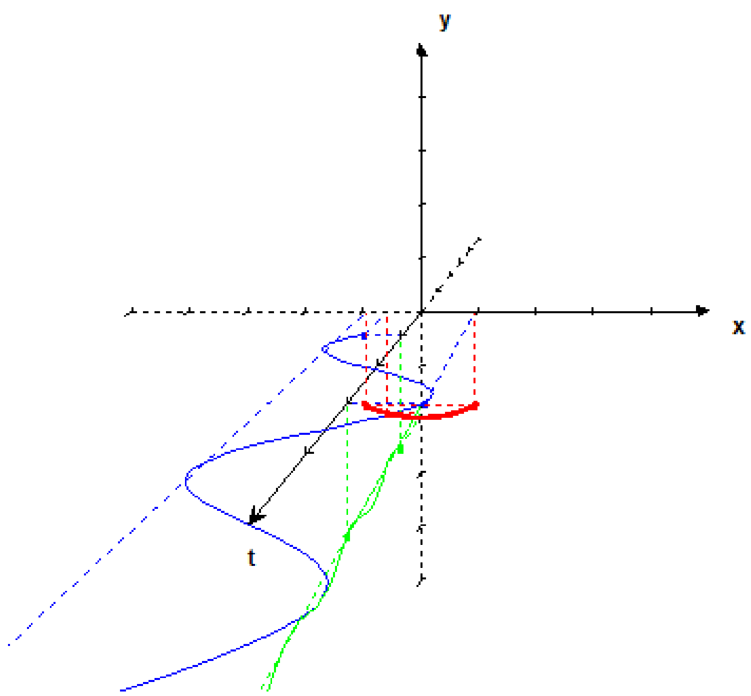
$x^2(t)+y^2(t)=l^2$ also $y(t)=\sqrt{l^2-x^2(t)}=\sqrt{l^2-\cos^2\sqrt{\frac{g}{l}}t}$ für den vereinfachten Fall (*).

$y(0)=\sqrt{l^2-x^2(0)}=\sqrt{l^2-1}$ und da das Pendel an der größten Auslenkung die Geschwindigkeit 0 hat, so gilt auch $\dot{y}(0)=0$.

Sei nun $g\approx 9{,}81;l=2$ und demnach
$\sqrt{\frac{g}{l}}\approx 2{,}2$

$x(t)=\cos(2{,}2t)$
$y(t)=-\sqrt{4-\cos^2(2{,}2t)}$:

$y(t)=-\sqrt{4-x^2(t)}$



Das Minuszeichen tritt hier bei y auf, weil in der obigen Skizze die y-Achse nach unten gerichtet war, im KS aber nach oben.

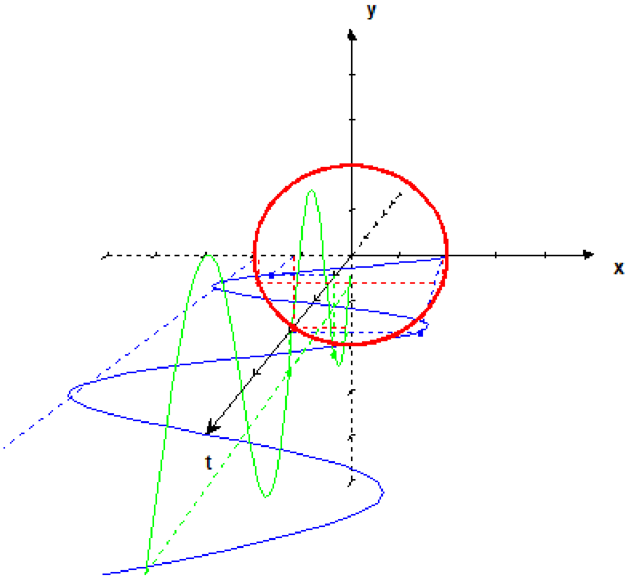
Die rote Kurve ist der Konfigurationsraum des Pendels mit den gegebenen Anfangsbedingungen.

Wählt man eine große Auslenkung zu Anfang $x_0=2$, so ist das Pendel wild geworden und überschlägt sich und durchläuft einen vollen Kreis:

$x(t)=2\cos(2{,}2t)$
$y(t)=-\sqrt{4-4\cos^2(2{,}2t)}=-2\sin(2{,}2t)$

$y(t)=-\sqrt{4-x^2(t)}$

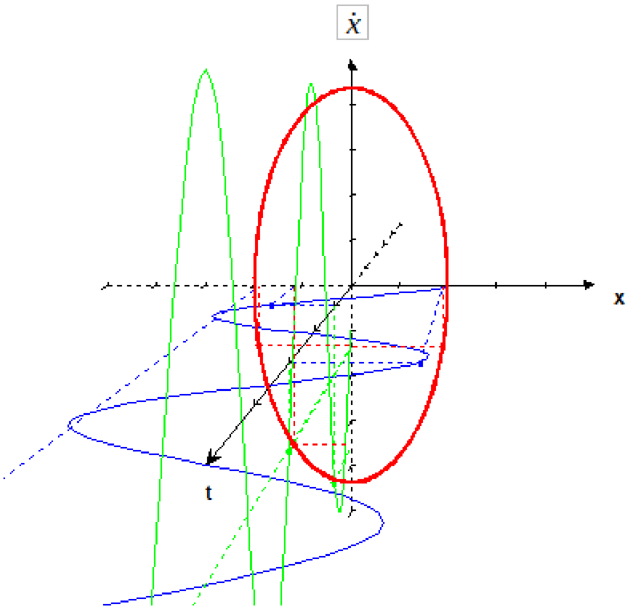
Konfigurationsraum ist der ganze Kreis.



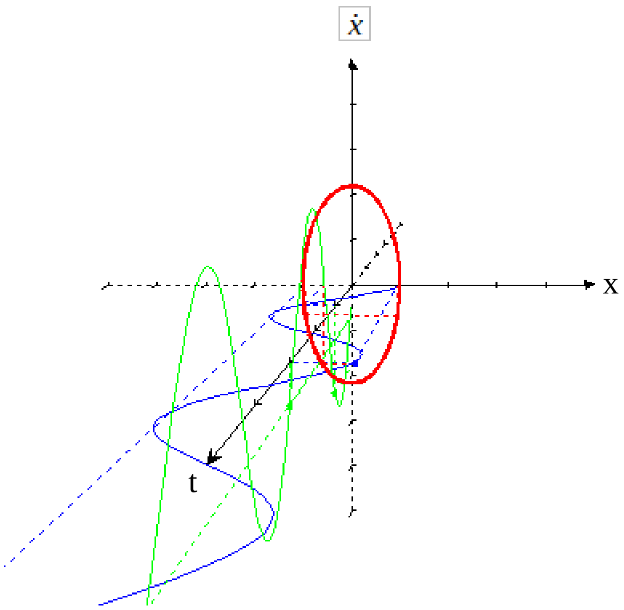
Man kann aber auch den sogenannten **Phasenraum** wählen, der Teilmenge der Menge

$\{(x,\dot{x})/x\in\mathbb{Q},\dot{x}\in\mathbb{Q}$ ist, wenn man nur die eine x-Bewegung betrachtet.

Für dieses letzte Beispiel hätte man $x(t)=2\cos(2{,}2t)$ $\dot{x}(t)=-4{,}4\sin(2{,}2t)$



Beziehungsweise für die maximale Auslenkung 1 (Seite 31)



Das **Phasenraumporträt** hier ist immer geschlossen.

Eine andere Möglichkeit die Gleichung für das Fadenpendel zu bestimmen, besteht im Wechsel des KS zum System in Polarkoordinaten: $(x,y)\rightarrow(r,\varphi)$ mit den Transformationsgleichungen:

$x=r\sin\varphi\,;\quad y=r\cos\varphi$ mit dem Vorteil, dass $r=l$ konstant ist.

Es gilt: $\dot{x}=r\dot{\varphi}\cos\varphi$ und $\ddot{x}=r\ddot{\varphi}\cos\varphi-r\dot{\varphi}^2\sin\varphi$, sodass sich die vereinfachte DG $\ddot{x}=-\frac{g}{l}x$ verändert zu $r\ddot{\varphi}\cos\varphi-r\dot{\varphi}^2\sin\varphi=-g\sin\varphi\Leftrightarrow\ddot{\varphi}=(\dot{\varphi}^2-\frac{g}{r})\tan\varphi$, die nicht leichter zu lösen ist.

Wählt man jedoch die **Methode von Lagrange**, der mit $L=T-V$ die Euler-Lagrange-Gleichung

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial L}{\partial\varphi}$ als Differenzialgleichung verwendet, so erhält man mit

$T=\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ und da $\dot{x}^2=r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$ und $\dot{y}^2=r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$ ist $T=\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2$

Die Kraft, die auf die Masse wirkt ist $F_y=mg$ und wegen

$V(y)=-\int_0^y F_{y'}\,dy'=-\int_0^y mg\,dy'=-mgy$. Also gilt für die Lagrangefunktion L

$L=\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2+mg\,r\cos\varphi\qquad\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\ddot{\varphi}\qquad\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-mgr\sin\varphi$

und damit ist die DG: $\ddot{\varphi}=-\frac{g}{r}\sin\varphi$. Betrachtet man wieder nur kleine Auslenkungen, so ist

$\sin\varphi\approx\varphi$ und damit die genäherte DG $\ddot{\varphi}=-\frac{g}{r}\varphi$. Lösung ist mit $\omega:=\sqrt{\frac{g}{r}}$

$\varphi(t)=\omega\,\dot{\varphi}(0)\sin\omega t+\varphi(0)\cos\omega t$.

Mit $x(t)=r\sin(\varphi)\approx r\varphi$ erhält man daraus:

$x(t)=r\,\omega\,\dot{\varphi}(0)\sin\omega t+r\,\varphi(0)\cos\omega t$.

und über Hamilton: $H=T+V=\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2-mg\,r\cos\varphi=\frac{p_\varphi}{2}\dot{\varphi}-mgr\cos\varphi=H(\varphi,\dot{\varphi},p_\varphi)$ mit

$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}$, dem zu φ konjugierten Impuls.

$\frac{\partial H}{\partial\varphi}=mgr\sin\varphi=-\dot{p}_\varphi=-mr^2\ddot{\varphi}\Rightarrow\ddot{\varphi}=-\frac{g}{r}\sin\varphi$ wie oben.

$\varphi(t)=\omega\,\dot{\varphi}(0)\sin\omega t+\varphi(0)\cos\omega t$ $\quad\dot{\varphi}(t)=\omega^2\dot{\varphi}(0)\cos\omega t-\omega\,\varphi(0\sin\omega t)$ und also

$p_\varphi(t)=mr^2\omega(\omega\,\dot{\varphi}(0)\cos\omega t-\varphi(0)\sin\omega t)$

Wählt man wieder die Anfangsbedingungen wie Seite 31 $x(0)=1\Rightarrow\varphi(0)=30°\,oder\,\frac{\pi}{6}$ und mit

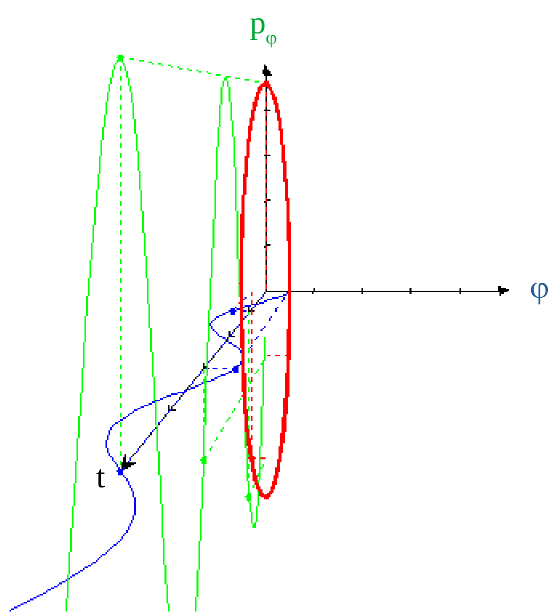
$\dot{x}(0)=0\Rightarrow\dot{\varphi}(0)=0$ und sei $r=2$ dann ist $\omega\approx2{,}2$

Dann ist $\varphi(t)=\omega\,\dot{\varphi}(0)\sin\omega t+\varphi(0)\cos\omega t=\frac{\pi}{6}\cos2{,}2t$ und

$p_\varphi(t)=mr^2\omega(\omega\,\dot{\varphi}(0)\cos\omega t-\varphi(0)\sin\omega t)=-mr^2\omega\,\varphi(0)\sin\omega t\approx-4{,}6\sin2{,}2t$

also $\varphi(t)=0{,}5\cos2{,}2t$ und $p_\varphi(t)=-4{,}6\sin2{,}2t$ $\quad p_\varphi=-4{,}6\sin(\cos^{-1}(2\varphi))$

Das Phasenporträt ist dazu:



Lagrange hat die Koordinaten weiter verallgemeinert zu beliebigen Ortskoordinaten q und deren Geschwindigkeiten $\dot{q}$.

Hat man die kartesische Koordinate x und ihre Geschwindigkeit $\dot{x}$ so ist: $q=x$ und $\dot{q}=\dot{x}$ oder

im Dreidimensionalen: $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$: dann ist $q_1=x,\ q_2=y,\ q_3=z,\ \dot{q}_1=\dot{x},\ \dot{q}_2=\dot{y},\ \dot{q}_3=\dot{z}$

oder mit r, φ: $q_1=r,\ q_2=\varphi$ und die entsprechenden Zeitableitungen.

Bei *Hamilton* wird noch weiter abstrahiert und symmetrisiert: anstatt die Lagrangeschen Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ wählt er die **konjugierten Impulse** p_i zu den Ortskoordinaten q_i , die über den gewöhnlichen Impuls hinausgehend definiert sind durch $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=: p_i$.

Hat man etwa die Lagrangefunktion $L=\frac{m}{2}\dot{x}^2=\frac{m}{2}\dot{q}^2$ eines freien Teilchens, d.h. dessen potenzielle Energie Null ist, so ist der konjugierte Impuls $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{x}=m\dot{q}$, also hier noch den übliche Impuls. Das muss aber nicht immer so sein, etwa bei geschwindigkeitsabhängigen Potenzialen.

Beispiel: Mitteltransformation $(x, y)\rightarrow(r, \varphi)$, so werden bei Lagrange die ersten Koordinaten etwa mit $q_1=x;\ q_2=y$ bezeichnet und die zweiten Ortskoordinaten etwa mit $\tilde{q}_1=r;\ \tilde{q}_2=\varphi$, sodass sich die Transformation ergibt zu $(q_1, q_2)\rightarrow(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$.

Betrachtet man nochmal die Transformationsgleichungen in herkömmlichen Sinn:

$x=r\cos\varphi=f_1(r,\varphi);\ y=r\sin\varphi=f_2(r,\varphi)$ oder kurz

$\begin{matrix} x=f_1(r,\varphi) \\ y=f_2(r,\varphi) \end{matrix}$ so sehen die Transformationsgleichungen in der neuen Darstellung folgendermaßen

aus: $\begin{matrix} q_1=f_1(\tilde{q}_1,\tilde{q}_2) \\ q_2=f_2(\tilde{q}_1,\tilde{q}_2) \end{matrix}$ oder in Physikermanier: $\begin{matrix} q_1=q_1(\tilde{q}_1,\tilde{q}_2) \\ q_2=q_2(\tilde{q}_1,\tilde{q}_2) \end{matrix}$

hat man n Koordinaten, dann $q_i=f_i(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)$ $i=1..n$ oder wenn die Koordinaten eine explizite Zeitabhängigkeit haben $q_i=f_i(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n,t)$ oder schreibt man wie oft die ganzen Ortskoordinaten zu einem Vektor zusammen: $\boldsymbol{q}=(q_1,\ldots,q_n)$ und $\tilde{\boldsymbol{q}}=(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)$, so lauten die Transformationsgleichungen $q_i=f_i(\tilde{\boldsymbol{q}},t)$ oder bezeichnet man noch $\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_n)$, so

$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{q}},t)$ oder $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\tilde{\boldsymbol{q}},t)$

Sind die Transformationen lokal *umkehrbar*, d.h. ist die Jacobi-Determinante

(Funktionaldeterminante) $\det D\boldsymbol{f}=\det\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)}\neq 0$ (oder $\det D\boldsymbol{q}=\det\frac{\partial(q_1,\ldots,q_n)}{\partial(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)}\neq 0$)

d.h. $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{q}_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{q}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{q}_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{q}_n} \end{vmatrix} \neq 0$ oder $\begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_1} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_n} \end{vmatrix} \neq 0$

.

dann nennt man die Koordinatentransformation eine **Punkttransformation.**

Im Beispiel: $\begin{matrix} x = r\cos\varphi = f_1(r,\varphi) \\ y = r\sin\varphi = f_2(r,\varphi) \end{matrix}$

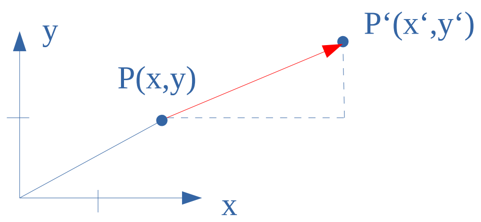
Die Funktionaldeterminante ist

$$D\boldsymbol{f} = det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \neq 0$$, also ist

die obige Transformation lokal umkehrbar und demnach ist diese Transformation eine Punkttransformation mit der Umkehrung $\begin{matrix} r = \sqrt{x^2+y^2} = g_1(x,y) \\ \varphi = atn\frac{y}{x} = g_2(x,y) \end{matrix}$.

Die Umkehrung von $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2) : (r,\varphi) \rightarrow (x,y)$ ist $\boldsymbol{f}^{-1} = (g_1, g_2) = (x,y) \rightarrow (r,\varphi)$.

Beispiel 2: Translation mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:



hat die Transformationsgleichungen $\begin{matrix} x' = x+2 = f_1(x,y) \\ y' = y+1 = f_2(x,y) \end{matrix}$

mit Funktionaldeterminante $\begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ und sind demnach umkehrbar

$$\begin{matrix} x=x'-2=g_1(x',y') \\ y=y'-1=g_2(x',y') \end{matrix}$$. (nur theoretischer Aufwand).

Translationen sind also auch Punkttransformationen.

Man sieht hier bereits, dass der physikalische Begriff der Punkttransformation die Heterogenität der Transformationen nivelliert oder abstrahiert (vielleicht nicht ganz ungefährlich![15])

Welche der betrachteten Transformationen sind Punkttransformationen?

Die aktive **Rotation** (es geht hier nur um aktive Transformationen) **um S** hat die

Transformationsmatrix $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, die identisch ist mit der Jacobimatrix, deren

Determinante 1 ist. Also Punkttransformation.

Die **Rotation um einen beliebigen Punkt M** hat dieselbe Funktionaldeterminante, ist also als affine Transformation auch Punkttransformation.

Spiegelungen an Geraden sind Punkttransformationen, deren Funktionaldeterminante 1 ist.

Spiegelungen an Punkten sind Punkttransformationen, deren Funktionaldeterminante 1 ist.

Scherungen bzgl. der Achsen sind ebenfalls Punkttransformationen, deren Funktionaldeterminante 1 ist.

Streckungen mit Faktor k haben als Funktionaldeterminante den Wert $k^2 \neq 0$, also auch Punkttransformationen.

Orthogonalprojektionen auf Koordinatenachsen oder ihrer Parallelen und (im 3D auf Koordinatenebenen oder ihrer Parallelen) haben Funktionaldeterminante 0, sind also **keine Punkttransformationen**. Also nicht alle linearen Transformationen sind Punkttransformationen.

Bsp: Orthogonalprojektion auf x,y-Ebene hat mit der Transformation: $x'=x \quad y'=y \quad z'=0$
die Funktionaldeterminante = Transformationsdeterminante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Orthogonalprojektion auf Geraden, die nicht parallel zu den Achsen sind, sind Punkttransformationen mit negativer Funktionaldeterminante.

Punkttransformationen haben eine wichtige Eigenschaft: Sie verändern die Euler-Lagrangegleichungen inhaltlich nicht (gleiche Werte) auch wenn die Form sich ändern kann[16].

15 Das scheint eine der Stärken der Lagrange-Mechanik zu sein. Aber die Logik hat auch ihre unverkennbaren Stärken. Und ich habe zu zeigen versucht, dass ihre Nivellierungen der Junktoren durchaus zu Problemen führen kann. Vgl. meinen Artikel zur Willensfreiheit, wo ich eine der Ursachen sah für die heutige sehr verbreitete Ansicht, dass die Willensfreiheit eine Illusion sei. Der Artikel über Transformationen ist aus dem Unbehagen entstanden, den diese Nivellierungen erzeugten.

16 Siehe Invarianz der Punkttransformation

Punkttransformationen sind daher für die Lagrange-Mechanik maßgeschneidert.

Obwohl die Euler-Lagrange-Gleichungen inhaltlich invariant sind unter Punkttransformationen, so gilt das i.A. nicht für die Lagrangefunktion.

Ist die Lagrangefunktion etwa $L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^2-gq$ und wird eine einfache (aktive) Punkttransformation $q'=q+1$ vorgenommen, so gilt:

$$L'(q',\dot{q}')=\frac{1}{2}\dot{q}'^2-g\,q'=\frac{1}{2}\dot{q}^2-g(q+1)\neq L(q,\dot{q}) \quad .$$

Aber dennoch gilt: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial L}{\partial q}\Leftrightarrow \ddot{q}=-g$ und $\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'}=\frac{\partial L'}{\partial q'}\Leftrightarrow \ddot{q}'=-g$ und da $\ddot{q}'=\frac{d^2q'}{dt^2}=\frac{d^2(q+1)}{dt^2}=\frac{d\dot{q}}{dt}=\ddot{q}$ sind die beiden Euler-Lagrangegleichungen gleich.

Ist die Lagrange*funktion* inhaltlich invariant unter einer Punkttransformation, so ist die Punkttransformation eine **Symmetrietransformation,** das System, das dieser Symmetrietransformation unterworfen wurde ist **symmetrisch.**

* Die Lagrangefunktion $L(\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^2$ für eine freies Teilchen wird unter der Spiegelung P: $q'=-q$ invariant bleiben, da $\dot{q}'=-\dot{q}$ und also $\dot{q}'^2=\dot{q}^2$. Die Spiegelung P ist also für das angegebene System (das freie Teilchen, d.h. ohne Potenzial) invariant.

* Ein etwa durch die Schwerkraft gebundenes Teilchen $L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^2-gq$ ist nicht invariant unter der Spiegelung P, da die Lagrangefunktion transformiert zu

$L'(q',\dot{q}')=\frac{1}{2}\dot{q}'^2-gq'=\frac{1}{2}\dot{q}^2+gq\neq L(q,\dot{q})$. Das Teilchen würde (zumindest allmählich) nach oben fliegen.

Ist die Bewegungsgleichung im ungespiegelten Fall $\ddot{q}=-g$ mit der Lösung
.
$q(t)=-\frac{1}{2}gt^2+\dot{q}(0)t+q(0)$, so im gespiegelten $q(t)=+\frac{1}{2}gt^2+\dot{q}(0)t+q(0)$. Die Spiegelung ist in diesem Fall keine Symmetrietransformation.

Von diesen Spiegelungen gibt es zwei, die eine, s, die gleichzeitig ihre inverse ist und die neutrale Spiegelung, die gar nicht spiegelt. Sie bilden mit der Komposition eine Gruppe mit zwei Elementen, eine zyklische Gruppe von s erzeugt. Diese Punkttransformation ist eine diskrete. Diese Gruppe $\{s,id\}$, die isomorph zu $\mathbb{Z}_2=\{[0],[1]\}\simeq\{s,id\}$ ist, nennt man Symmetriegruppe.

* Die Lagrangefunktion $L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-V(q_1^2+q_2^2)$ ist symmetrisch unter jeder beliebigen Rotation um den Ursprung. Ist θ eine beliebig kleine (infinitesimale) Rotation, dann ist L unter jeder dieser Rotationen invariant. Da θ $const$, ist $\dot{\theta}=0$

$$\begin{aligned} q_1{}' &= q_1\cos\theta - q_2\sin\theta \\ q_2{}' &= q_1\sin\theta + q_2\cos\theta \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \dot{q}_1{}' &= \dot{q}_1\cos\theta - q_1\dot{\theta}\sin\theta - \dot{q}_2\sin\theta - q_2\dot{\theta}\cos\theta = \dot{q}_1\cos\theta - \dot{q}_2\sin\theta \\ \dot{q}_2{}' &= \dot{q}_1\sin\theta + q_1\dot{\theta}\cos\theta + \dot{q}_2\cos\theta - q_2\dot{\theta}\sin\theta = \dot{q}_1\sin\theta + \dot{q}_2\cos\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{aligned} \dot{q}_1{}'^2 &= \dot{q}_1^2\cos^2\theta + \dot{q}_2^2\sin^2\theta - 2\dot{q}_1\dot{q}_2\sin\theta\cos\theta \\ \dot{q}_2{}'^2 &= \dot{q}_1^2\sin^2\theta + \dot{q}_2^2\cos^2\theta + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \dot{q}_1{}'^2+\dot{q}_2{}'^2=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2 \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} q_1{}'^2 &= q_1^2\cos^2\theta + q_2^2\sin^2\theta - 2q_1q_2\sin\theta\cos\theta \\ q_2{}'^2 &= q_1^2\sin^2\theta + q_2^2\cos^2\theta + 2q_1q_2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad q_1{}'^2+q_2{}'^2=q_1^2+q_2^2$$

, Also bleibt die Lagrangefunktion gleich:

$$L'=\frac{1}{2}(\dot{q}_1{}'^2+\dot{q}_1{}'^2)-V(q_1{}'^2+q_2{}'^2)=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-V(q_1^2+q_2^2)=L$$

Das sieht man auch direkt, da erstens das Potenzial nur vom Radius abhängt $V(r^2)$, das sich bei Rotation nicht verändert und die kinetische Energie ist auf dem Kreis überall gleich.

Da es beliebig viele (infinitesimale) Rotationen gibt, unter denen die Lagrangefunktion invariant ist, sind alle Symmetrietransformationen und das durch die Lagrangefunktion beschriebene System rotationssymmetrisch. Diese „unendlich vielen“ Punkttransformationen bilden eine Gruppe unter der Komposition. Sie wird **Lie-Gruppe** genannt, die SO(2), die zur Kreisgruppe S^1 isomorph ist. Sie ist die **s**pezielle **o**rthogonale Gruppe der 2x2-Matrizen. Speziell, weil ihre Determinante 1 ist. Orthogonal, weil die Spaltenvektoren der Drehmatrizen $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ orthogonal sind.

(wird fortgesetzt)