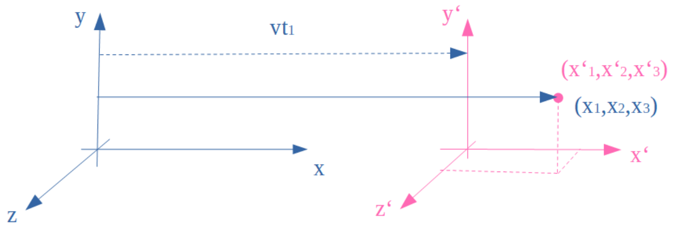
Einsteins Spezielle Relativitätstheorie

Manfred Hörz

1. Das Problem

Die Newtonsche Mechanik postulierte, dass die Gesetze der Mechanik in jedem Inertialsystem die formgleich seien. Wechselte man von einem Bezugssystem zu einem anderen, das sich von dem ersten mit einer gleichmäßigen (konstanten) geraden Bewegung entfernte, so galten die Galilei-Transformationen, die die Koordinaten eines Systems in das andere umrechneten.



Bewegt sich also das rosa System mit der Geschwindigkeit v nach rechts (Richtung der wachsenden blauen x-Werte), so hat es sich in der Zeit t_1 um $v t_1$ nach rechts entfernt, so dass vom blauen System aus gilt:

$$\begin{matrix} x_1 = x'_1 + v t_1 \\ y_1 = y'_1 \\ z_1 = z'_1 \\ t_1 = t'_1 \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} x'_1 = x_1 - v t_1 \\ y'_1 = y_1 \\ z'_1 = z_1 \\ t'_1 = t_1 \end{matrix} .$$

Die Zeit wird also in beiden Systemen als identisch angenommen (absolute Zeit).

Oder allgemeiner mit $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$: $\begin{matrix} x'_1 = x_1 - v_x t_1 \\ y'_1 = y_1 - v_y t_1 \\ z'_1 = z_1 - v_z t_1 \\ t'_1 = t_1 \end{matrix}$ (1).

Die Transformationsmatrix ist $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_x \\ 0 & 1 & 0 & -v_y \\ 0 & 0 & 1 & -v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - v_x t_1 \\ y_1 - v_y t_1 \\ z_1 - v_z t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \\ t'_1 \end{pmatrix}$

Galilei-Transformation für Geschwindigkeiten:

Bewegt sich im rosa System ein Körper mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}' = \frac{d}{dt} \boldsymbol{x}'$, so folgt aus (1)

$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} t$: $\boldsymbol{u}' = \frac{d}{dt} \boldsymbol{x}' = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} t) = \frac{d}{dt} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, also $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ (2).

Oder, wenn man es ausführlicher will:

$$\boldsymbol{x}'(t)=x'_0+\boldsymbol{u}'(t)\cdot t \text{ und } \boldsymbol{x}'(t+dt)=x'_0+\boldsymbol{u}'(t)\cdot(t+dt) \text{ mit } u'(t)=\frac{x'(t+dt)-x'(t)}{dt} \text{ und}$$

$$\boldsymbol{u}(t)=\frac{\boldsymbol{x}(t+dt)-\boldsymbol{x}(t)}{dt}\overset{(1)}{=}\frac{\boldsymbol{x}'(t+dt)+\boldsymbol{v}\cdot(t+dt)-\boldsymbol{x}'(t)-\boldsymbol{v}\cdot t}{dt}=\frac{x'(t+dt)-x'(t)}{dt}+\frac{\boldsymbol{v}\cdot dt}{dt}=\boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}(t)$$

Und für die Beschleunigungen gilt: $\boldsymbol{a}'=\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}'=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\overset{v=\text{konstant}}{=}\boldsymbol{a}-0=\boldsymbol{a}$ (3).

Wie verhält sich die obige spezielle Galileitransformation (ohne Drehung, Spiegelung und Translationen) zu den Newtonschen Gesetzen?

Das erste Newtonsche Gesetz oder das Galileische Trägheitsgesetz „Ein Körper, auf den keine (resultierende) Kraft einwirkt, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit und umgekehrt“:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}=konstant\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{u}}$$

wird heute meistens als Definition des Inertialsystems verwendet. Gibt es überhaupt ein Inertialsystem? Genau genommen nicht.
Nach Newton schon laut seines 1. Postulats:
„Es gibt ein ausgezeichnetes räumliches Bezugssystem, der absolute Raum. Jede Bewegung ist letztlich Bewegung in Bezug auf den absoluten Raum.“

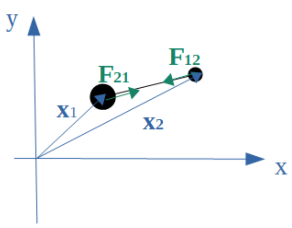
Bewegt sich ein anderes Bezugssystem zu einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, so ist es auch ein Inertialsystem:

Sei ein Körper K gegeben, der sich im Inertialsystem mit der konstanten Geschwindigkeit **u** bewegt, so zeigt (2) $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\text{konstant}-\text{konstant}=\text{konstant}$, dass er sich auch mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}'$ in dem anderen Bezugssystem bewegt, das also auch inertial ist.

Bewegt sich das Bezugssystem relativ zum blauen mit beschleunigter Bewegung, dann ist das bewegte Bezugssystem nicht mehr inertial: mit konstantem $\boldsymbol{u}$ und nicht konstantem $\boldsymbol{v}$ ist $\boldsymbol{u}'$ nicht mehr konstant. Das Inertialgesetz gilt dort also nicht mehr.

Gibt es außer dem Inertialgesetz weitere Naturgesetze, die in allen Inertialsystemen forminvariant (kovariant) gelten? Das heißt, dass unter den Galilei-Transformationen die Grundgleichungen erhalten bleiben. Wie sieht es mit dem zweiten Newtonschen Gesetz aus, der „Bewegungsgleichung“ $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m\ddot{\boldsymbol{x}}$?

Bspw. Zwei Körper am Ort $\boldsymbol{x}_1$ bzw. $\boldsymbol{x}_2$ der Masse m_1 bzw. m_2 ziehen sich gegenseitig durch ihre Massen (Gravitation) mit den Kräften $\boldsymbol{F}_{12}$ bzw. $\boldsymbol{F}_{21}$ an:



Nach dem 2. Gesetz gilt: $\boldsymbol{F}_{21}=m_1\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}_1=m_1\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{F}_{12}=m_2\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}_2=m_2\boldsymbol{a}_2$ im blauen System.

Wendet man die Galilei-Transformation an, so gilt für die Beschleunigungen im rosa System:

Demnach gilt $\boldsymbol{F}_{21}=m_1\frac{d^2}{dt_1^2}\boldsymbol{x}'_1=m_1\boldsymbol{a}'_1$ und analog $\boldsymbol{F}_{12}=m_2\frac{d^2}{dt_1^2}\boldsymbol{x}_2=m_2\boldsymbol{a}'_2$.

Die Gleichungen bleiben also kovariant.

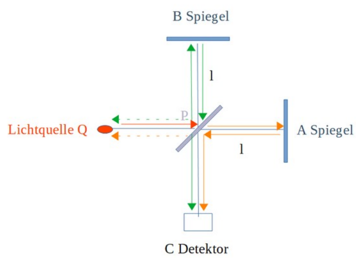
Oder **bspw.** Impulserhaltung: $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\text{konstant}$. Galilei-Transformation:

$$\boldsymbol{p}'_1+\boldsymbol{p}'_2=m_1\boldsymbol{u}'_1+m_2\boldsymbol{u}'_2=m_1(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{v})+m_2(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{v})=m_1\boldsymbol{u}_1+m_2\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{v}(m_1+m_2)=\underbrace{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}_{\text{konstant}}-\underbrace{\boldsymbol{v}(m_1+m_2)}_{\text{konstant}}\ .$$

Es gilt zwar die Impulserhaltung, aber die Werte für die Impulse haben sich verändert. Da aber die Form des Gesetzes erhalten ist, die Gleichungen also kovariant sind, lässt die Galilei-Transformation die Gesetzesform unverändert.
Die ganze Mechanik Newtons ist galileiinvariant.

Die neue Theorie des Elektromagnetismus von Maxwell schreibt dem Licht, einer elektromagnetischen Welle, die Geschwindigkeit $c\approx 3\cdot 10^8 m/s$ zu. Da bisher alle Wellen ein Medium benötigten, das sie „wellen“ und Energie transportieren, nahm man vernünftigerweise an, das Licht besäße ein materielles Medium besonderer Art, den Äther.
Gemäß der Galilei-Transformation müsste sich das Licht, dessen Lichtquelle sich mit der Erde durch den allgegenwärtigen Äther mit der Geschwindigkeit v bewegt eine resultierende Geschwindigkeit von $c+v$ bzw. $c-v$ aufweisen.

Das historische Experiment von Michelson und Morley wollte dies nachweisen.

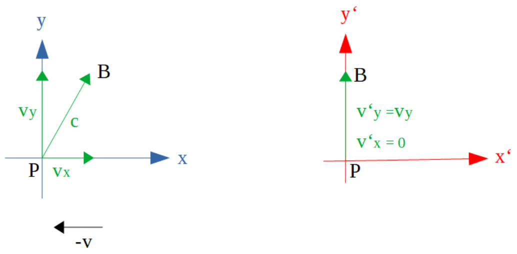


Die Erde bewege sich längs der Achse QA, die als x-Achse bezeichnet werde, mit der Geschwindigkeit v (nach rechts) durch den Äther.

Die Geschwindigkeit des Lichtstrahls PA im Labor, der sich bzgl. Bezugssystems des Äthers mit der Geschwindigkeit c bewegt, ist demnach nach Galilei $c-v$. Der Strahl AP dagegen hätte die Geschwindigkeit $c+v$.
Die Zeit, die der Strahl von P nach A benötigt, wäre $t_{PA}=\frac{\overline{PA}}{c-v}=\frac{l}{c-v}$ und $t_{AP}=\frac{\overline{AP}}{c+v}=\frac{l}{c+v}$.

Die Zeit für den Weg PAP ist $t_{PAP}=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{l(c+v)+l(c-v)}{c^2-v^2}=\frac{2lc}{c^2-v^2}=\frac{2l}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\overset{\beta:=\frac{v}{c}}{=}\frac{2l}{c(1-\beta^2)}$.

Sei IBS₁ das Bezugssystem des Äthers und IBS₂ das des Labors. Nun soll die Zeit ermittelt werden für den Strahl des Weges PBP. Die Achse PB sei die y-Achse.



$v_y^2+v_x^2=c^2 \Rightarrow v_y^2=c^2-v_X^2 \overset{v_x=v}{\Rightarrow} v_y=\sqrt{c^2-v^2}=v'_y$. Also $t_{PB}=t_{BP}=\frac{l}{\sqrt{c^2-v^2}} \Rightarrow t_{PBP}=\frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{2l}{c\sqrt{1-\beta^2}}$

Die Zeitdifferenz der beiden Wege ist also $t_{PAP}-t_{PBP}=\frac{2l}{c(1-\beta^2)}-\frac{2l}{c\sqrt{1-\beta^2}}$.

Der erste Term $\frac{1}{1-\beta^2}$ kann mit Hilfe der MacLaurin-Reihe wegen des kleinen β bis zur zweiten Potenz entwickelt werden, Rest vernachlässigbar klein: $\frac{1}{1-\beta^2}\approx 1+\beta^2$.

Der zweite Term $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ergibt analog: $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\approx 1+\frac{1}{2}\beta^2$, so dass

$$t_{PAP}-t_{PBP}=\frac{2l}{c}\left(\frac{1}{1-\beta^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\approx\frac{2l}{c}\left(1+\beta^2-1-\frac{1}{2}\beta^2\right)=\frac{\beta^2 l}{c} .$$

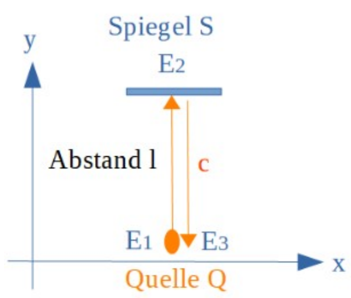
Dieser Zeitunterschied hätte sich durch zum Teil destruktive Interferenz am Detektor zeigen müssen. Diese wurde aber nie festgestellt. So war anzunehmen, dass es diesen materiellen Träger nicht gibt. Dann konnte aber für die Elektrodynamik bewegter Körper die Galilei-Transformation nicht ganz stimmen.

Einstein postulierte, dass Licht sich in allen Inertialsystemen „im Vakuum" mit der gleichen Geschwindigkeit c fortpflanze. Und er verallgemeinerte das Galileische Relativitätsprinzip auch auf den Elektromagnetismus: *Alle* Gesetze der Physik seien in allen Inertialsystemen kovariant.

Auf dieser philosophischen Grundlage deduzierte er seine spezielle RT. Auf Vorläufer wie Lorentz und Poincaré möchte ich hier nicht weiter eingehen, obwohl sie interessante und wichtige Beiträge geleistet haben (Lorentz: die Kontraktion der Atome längs der Bewegungsrichtung gegenüber dem Äther, die „Lorentzkontraktion" und Poincarés Herleitung der Lorentztransformation aus dem verallgemeinerten Relativitätsprinzip bzgl. der Maxwell-Gleichungen. Aber das ist nicht das Thema dieses Artikels.

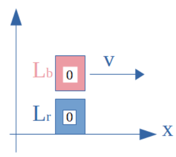
Zeitdilation

Da Licht in allen Inertialsystemen sich mit gleicher Geschwindigkeit sich ausbreitet, bietet es sich an Uhren auch mit Licht zu konstruieren.

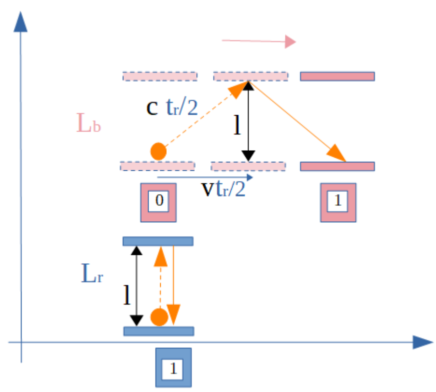


Aus einer Quelle Q wird ein Lichtstrahl (E_1) senkrecht zur x-Achse an einem Spiegel S reflektiert (E_2), der sich von Q im Abstand l befindet. Trifft der reflektierte Strahl am unteren Spiegel (hier nicht eingezeichnet) auf (E_3), wo ein Zählmechanismus installiert sei, ist eine Zeiteinheit vergangen, was man sich als einen „Klick“ vorstellen kann. Am Anfang zeigt der Zähler 0 an, mit jedem Klick wird die Zahl um eines erhöht. Ein Klick definiert also die Zeiteinheit $t=\frac{c}{2l}$.

In einem Inertialsystem seien zwei Lichtuhren installiert, eine feste L_r und eine L_b , die sich mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewegt. Die Zeitangabe der festen Uhr sei mit t_r bezeichnet, die der bewegten mit t_b.



Nachdem die blaue Uhr L_r die Zeit $t_r = 1$ (ein Tick) anzeigt, ist die rosa Uhr L_b um die Strecke v t_r nach rechts gewandert.



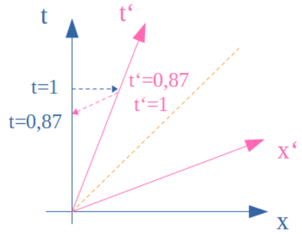
$$\text{Pythagoras}: \underbrace{\left(\frac{c\,t_r}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\,t_r}{2}\right)^2 + l^2}_{\text{Sicht des blauen Systems}} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{c\,t_r}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\,t_r}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{c\,t_b}{2}\right)^2}_{\text{aus Sicht der bewegten Uhr}}}_{\text{Sicht des blauen Systems}} \Rightarrow t_r^2 = \frac{c^2 t_b^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow t_r = \frac{t_b}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

oder $t_b = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\, t_r$ oder mit dem Lorentzfaktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$: $t_b = \frac{1}{\gamma} t_r$ (4).

Ein Tick einer bewegten Uhr ist also das $\frac{1}{\gamma}$-fache des Ticks einer ruhenden Uhr.

Da $0 \leq \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \leq 1$ ist $t_b \leq t_r$. Die Zeit t_b des bewegten Beobachters, dessen Uhr sich ihm gegenüber natürlich nicht bewegt, nennt man auch die *Eigenzeit* des bewegten Beobachters.

Wie sieht dies im Weg-Zeit-Diagramm aus für c = 1?



Vom blauen System aus gesehen gibt die blau gestrichelte Linie die Gleichzeitigkeit an. Seine Zeit 1 Sekunde, misst es im rosa System als ungefähr 0,87 Sekunden, falls $v=\frac{c}{2}$. Misst das rosa System 1 Sekunde, so misst es im blauen System ebenfalls 0,87 Sekunden. Die rosa gestrichelte Linie gibt die Gleichzeitigkeit im rosa System an.

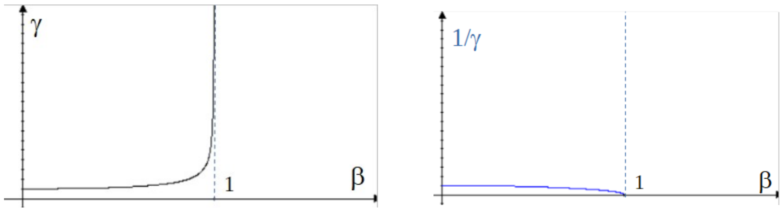
Bemerkungen:

1. Für l gilt natürlich auch: $l=c\frac{t_r}{2}$ für die ruhende Uhr. Aber diese Gleichung in den Pythagoras einzusetzen ergibt keinen Sinn aus zwei Gründen: 1. würde v dann den Wert Null haben müssen und 2. geht es beim Pythagoras um die bewegte Uhr und deren Zeitmessung, deren Zeiteinheit (ein Tick) eben t_b ist.

2. Interessant ist hier, dass der blaue Beobachter nicht nur seine Sicht auf die bewegte Uhr einnimmt, sondern darin inbegriffen sich die Sicht der bewegten Uhr eben mit t_b zu eigen macht. Das ist ein allgemein notwendiges Ingredienz einer kommunikativen Situation. Als Beispiel nehme man das Mutter-Kind-Verhältnis. Das Baby schreit. Die Mutter interpretiert das Schreien so, dass es ein Unbehagen des Kindes unterstellt. Es interpretiert das Unbehagen als Hunger und gibt ihm zu essen. Hört das Kind auf zu schreien, meint die Mutter, richtig interpretiert zu haben. Sie kennt den Schmerz des Hungers. Aber es könnte auch ein anderes Unbehagen gewesen sein. Vielleicht war es bloß die Abwesenheit der Mutter oder noch etwas anderes.
Woher weiß also das blaue System, dass im rosa System der bewegten Uhr das Licht für 2l der Zeit t_b bedarf, dass also $2l=c\,t_b$? Es *unterstellt* es, weil es bei ihm (dem blauen System) auch so ist und die bewegte Uhr aus jener Sicht sich nicht bewegt.

Beispiel: $v=\frac{1}{2}c \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=0{,}866$ und damit $t_b=0{,}866\,t_r$. Misst die ruhende Uhr eine Stunde, so gibt die bewegte Uhr nur rund 52 Minuten an.

Bei $v=0{,}99\,c$ ist $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=0{,}141$ und damit entspricht einer Stunde im Ruhesystem nur noch ungefähr 8 ½ Minuten im bewegten.



Der linke Graph zeigt das langsame Wachsen des Lorentzfaktors in Bezug auf $\beta=\frac{v}{c}$. Für $\beta\ll 1$ ist $\gamma\approx 1$ und quasi konstant. D.h. für sehr kleine Geschwindigkeiten gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist der Effekt der Zeitdilatation vernachlässigbar und man ist wieder bei Newton.

Bewegte Uhren gehen also relativ langsamer als ruhende.
Die Zeit der bewegten Uhren dehnt sich für den ruhenden Beobachter, nicht aber für den mitbewegten.

Für $v=c$ bzw. $\beta=1$ wäre $\frac{1}{\gamma}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=0$ und $t_b=0$, die Zeit des bewegten Systems (aus Sicht des ruhenden) würde also stehen bleiben. Könnte sich ein Inertialsystem mit Lichtgeschwindigkeit gegenüber einem andern bewegen, gäbe es dort keine Prozesse, also auch keine Zeit. Kann es nicht-materielle Inertialsysteme geben? Es müsste praktisch aus Licht bestehen. Lichtuhren müssten dann anders konstruiert werden, etwa quantentheoretisch als Lichtoszillatoren bestimmter Frequenz, die eigenständig oszillieren (ohne Spiegel). Abstände müssen auch gemessen werden können. Das ginge über $s=ct$, da ja Zeitmessung bereits angenommen werden kann. In einem nicht-materiellen Gebiet, das ohnehin dann über die Nullpunktsenergie $\frac{1}{2}\hbar\omega$ verfügt, also über virtuelle Photonen, ist so etwas vorstellbar.

Wäre $v>c$, so würde der Radikant negativ und damit die Wurzel und die Zeitmessung der bewegten Uhr imaginär. Das scheint unsinnig zu sein, da wir Zeiten als reelle Größen ansehen. Man sollte aber nicht voreilig etwas ausschließen, was unserem Alltagsverständnis widerspricht. Das tut ja auch gerade die Zeitdilatation. Und was man nicht erfahren hat, ist nicht notwendigerweise unerfahrbar.

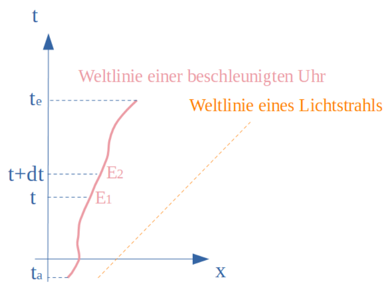
Die übliche Frage: Ist die Zeitdilatation und die unten zu entwickelnde Längenkontraktion („Lorentz-Verkürzung“) wirklich oder nur scheinbar?
Einstein[1] selbst hat gegenüber einer Behauptung V. Variĉaks diese Frage folgendermaßen beantwortet:
„Der Verfasser hat mit Unrecht einen Unterschied der *Lorentz*schen Auffassung von der meinigen *mit Bezug auf die physikalischen Tatsachen* statuiert. Die Frage, ob die *Lorentz*-Verkürzung *wirklich* besteht oder nicht, ist irreführend. Sie besteht nämlich nicht „wirklich“, insofern sie für einen mitbewegten Beobachter nicht existiert; sie besteht aber „wirklich“, d. h. in solcher Weise, daß sie prinzipiell durch physikalische Mittel nachgewiesen werden könnte, für einen nicht mitbewegten Beobachter.“

Nach Lorentz ist Verkürzung wirklich, da sie durch ein Zusammendrücken der atomaren Strukturen des Objekts durch den Druck des Äthers in Richtung der Bewegung des Objekts erfolgt. Aber für Einstein, für den es diesen Ätherdruck nicht gibt, ist die Kontraktion folglich nicht in diesem Sinn wirklich. Sie ist aber auch nicht nur subjektiv, also nicht nur eine Frage der Perspektive. Für den mitbewegten Beobachter ist sie nicht wirklich, da er sie nicht bemerken kann, da *alles (auch sein*

1 A. Einstein: *Zum Ehrenfestschen Paradoxon. Eine Bemerkung zu V. Variĉaks Aufsatz*. In: *Physikalische Zeitschrift*. 12, 1911, S. 509–510.

Maßstab) in seinem bewegten System verkürzt wird und Längenmessung eine Relation ist. D.h. seine Eigenlängen sind für ihn unverändert. Aber *für* einen „ruhenden“ Beobachter, für den selbst seine eigenen Längen (und Zeiten) auch konstant sind, sind diejenigen des bewegten Beobachters verändert (die Zeiten dilatiert und seine Strecken kontrahiert) aus der Sicht des „ruhenden“ Beobachters wohlgemerkt. D.h. es gibt keine absoluten Zeiten und Längen, die für alle Systeme invariant wären. Einstein sagt, dass die veränderten Größen des „bewegten Beobachters“ aber vom „ruhenden Beobachter“ durch physikalische Mittel, also experimentell nachgewiesen werden können. Dass sie also in diesem Sinn wirklich sind. Bewegte Uhren gehen also tatsächlich langsamer und bewegte Stäbe sind tatsächlich verkürzt, nur *bemerkt* der mitbewegte Beobachter das aus dem oben angeführten Grund nicht und kann es auch empirisch nicht bemerken. Das ist aber eine objektive Behauptung, die nicht nur perspektivisch ist. Es ist die Philosophie des empirischen Vorrangs (Mach!). Ernst Mach sagte ja einmal oder mehrmals, dass die Behauptung, dass es Atome gäbe, nicht haltbar sei, er hätte noch keines gesehen („Ham‘s scho ans g'sehn?[2]“). Sie seien lediglich theoretische Konstrukte. Damit ist man mitten in einer schwierigen philosophischen Diskussion oder gar einem philosophischen Disput und Glaubensbekenntnis. (Ich komme auf die Diskussion zurück.)

Was wäre, wenn die Uhr sich nicht geradlinig gleichmäßig bewegte, sondern auch beschleunigt, aber stetig? Wie in der Mathematik und der Physik üblich, bedient man sich der fragwürdigen aber effizienten Infinitesimalrechnung; um in der Physik von Momentangeschwindigkeit sprechen zu können, was eigentlich Unsinn ist.



Die Uhr bewege sich mit der veränderlichen aber differenzierbaren Geschwindigkeit $v(t)$. Dann ist infinitesimal $dt_{Uhr} = \sqrt{1-\left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}\,dt_r$. Integriert man über das Zeitintervall $[t_a, t_e]$ erhält man

$$T_{Uhr} = \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{1-\left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}\,dt_r \quad .$$

Für jede bewegte Uhr (also auch beschleunigt bewegte) gilt: $T_{Uhr} \leq T_r = t_e - t_a$:

Da $\sqrt{1-\left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} \leq 1$ folgt $T_{Uhr} = \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{1-\left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}\,dt_r \leq \int_{t_a}^{t_e} 1\,dt_r = t_e - t_a = T_r$.

Außerdem gilt[3]: $T_{Uhr} = T_r \Leftrightarrow$ Uhr ruht im blauen System :

2 Es scheint ja so, als habe man heute bereits solche Atome gesehen, wenn man „sehen“ „richtig“ interpretiert. Boltzmann vertat gegenüber Mach die These der Existenz von Atomen, womit er Recht behalten haben dürfte.

3 Nach Franz Embacher aus https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/SRT/

1. Sei für alle $t\in[t_a,t_e]: v(t)=0 \Rightarrow T_{Uhr}=\int_{t_a}^{t_e}\sqrt{1-\left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}\,dt_r=\int_{t_a}^{t_e} 1\,dt_r=t_e-t_a=T_r$.

2. Sei umgekehrt $T_{Uhr}=T_r$: $T_{Uhr}=\int_{t_a}^{t_e}\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\,dt_r=t_1-t_0 \overset{(*)}{\Rightarrow}\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}=1\Rightarrow v(t)=0$:

(*):Es gilt $0\le\sqrt{1-\left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}\le 1$. Gäbe es eine Stelle $\tau\in[t_a,t_e]$ mit $0\le\sqrt{1-\left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}<1$, dann wäre die Funktion $f(t)=\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}$ in einem Intervall $[\tau-\epsilon,\tau+\epsilon]$ ebenfalls kleiner 1 aufgrund ihrer Stetigkeit. Daraus folgt $\int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} f(t)\,dt_r\le 2\epsilon$. Da das Integral der Eins-Funktion das Resultat t_1-t_0 hat, müsste f das Manko im Intervall $[\tau-\epsilon,\tau+\epsilon]$ bzgl. der Eins-Funktion durch Werte größer als Eins kompensieren, was aber aufgrund der Bedingung $0\le f(t)\le 1$ nicht möglich ist.

Damit hat man die notwendige Beziehung für das Zwillingsparadox, dass nämlich beliebig differenzierbar bewegte Uhren langsamer gehen. Man kann also auch umkehren, was für das Zwillingsparadox notwendig ist. Ich bezweifle allerdings, dass diese Argumentation richtig ist. Sie wurde allerdings auch schon von Einstein 1905 genannt. Ich vermute, dass das (auflösbare) Paradox sich aus der Beschleunigung ergibt und kein Resultat der SRT ist, also in die ART gehört.

Längenkontraktion

Da es in der SRT keine starren Körper gibt, ist die Idee der Maßstäbe, wie sie noch von Einstein verwendet wurden, wohl kaum nützlich. Die Längenverhältnisse müssten also dann aus der Lichtbewegung abgeleitet werden, wie auch schon die Zeitdilatation[4].

Es gilt im Ruhesystem $c=\frac{s_r}{t_r}$, d.h. das Licht legt in der Zeit t_r die Entfernung s_r zurück.

In dem System, in dem sich die Uhr bewegt, gilt die gleiche Lichtgeschwindigkeit, also $c=\frac{s_b}{t_b}$, d.h. das Licht legt in der Zeit t_b die Strecke s_b zurück. Also gilt

$$c=\frac{s_r}{t_r}=\frac{s_b}{t_b}\Rightarrow s_b=s_r\frac{t_b}{t_r}=s_r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{t_r}{t_r}\Rightarrow \quad \text{, also} \quad s_b=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,s_r \quad (5).$$

Da $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\le 1$ sind die Längen im bewegten System relativ kürzer (kontrahiert) als im ruhenden.

Beispiel: Ist $v=0{,}99\,c$ und damit $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=0{,}141$, so wird ein Meter im Ruhesystem im bewegten nur noch als $14{,}1\ cm$ gemessen. Das kann *tatsächlich* vom ruhenden aus gemessen werden, was aber nicht heißt, dass es *objektiv* ist. Diese Objektivität gibt es hier nicht mehr.

Mit Hilfe der beiden Transformationen wird auch klar, dass der Betrag der Relativgeschwindigkeit v für beide gleich ist, was bisher nur als plausibel unterstellt wurde.

4 Der Abstand l der Spiegel ist nicht an starre Maßstäbe gebunden.

Ich komme nun wieder auf die oben angestellte Diskussion zurück. Ich habe da angenommen, dass die beiden Transformationen (Längenkontraktion und Zeitdilatation) objektive Verkürzungen sind und nicht nur relativ zum ruhenden Beobachter. Wenn das zuträfe, d.h. wenn das also nicht nur perspektivisch ist, dann müsste eine bewegte Uhr, die langsamer ging, beim Eintreffen beider Beobachter nach der durchgemachten Jordankurve am gleichen Ort die eine langsamer als die andere gehen und umgekehrt, was das Messen zu Widersprüchen und nicht nur zu Paradoxa führt. Entweder ist also die Messung perspektivisch, relativ oder wenn sie es nicht ist, dann hat die Beschleunigung des Rückkehrers den entscheidenden Einfluss, da der zuhause gebliebene sich nicht beschleunigt hat.
Eine andere Möglichkeit, das zu untersuchen, bestünde in dem gegenseitigen Verschicken von Nachrichten. Der Reisende schickt nach seiner Stunde $\Delta t_b = 1$ mit Lichtgeschwindigkeit diese Information an den „ruhenden Beobachter“. Seine Stunde ist für den ruhenden Beobachter $\Delta t_r = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Delta t_b$. In dieser Zeit hat der Reisende eine Strecke von $\Delta s_r = v\,\Delta t_r$ zurückgelegt, was eine Strecke von $\Delta s_b = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Delta s_r$ bedeutet. Der Lichtstrahl der Nachricht hat vom bewegten System aus also diese Strecke zurückzulegen um beim ruhenden Beobachter anzukommen, wird also die Zeit $\Delta \tau_b = \frac{\Delta s_b}{c}$ benötigen, was für den ruhenden Beobachter die Zeitspanne $\Delta \tau_r = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Delta \tau_b$ bedeutet. Wie wird er die Nachricht $\Delta t_b = 1$ interpretieren?

Sie kommt bei ihm um $\Delta t_r + \Delta \tau_r = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Delta t_b + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Delta \tau_b = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\Delta t_b + \Delta \tau_b)$ an.

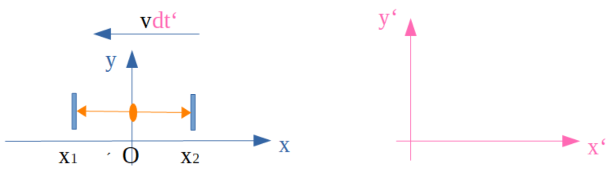
Davon zieht er die Zeit, die das Licht zu ihm gebraucht hat ab und erhält die Zeit $\Delta t_r = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot 1$, was man auch gleich hätte haben können. Er misst also die mitgeteilte Stunde des bewegten Beobachters als längere Zeitspanne, bei 99% der Lichtgeschwindigkeit als ungefähr 7 Stunden. Der zuhause gebliebene Beobachter ist also dem Reisenden gegenüber um einiges mehr gealtert.

Das Gleiche gilt aber auch umgekehrt, da hier keine Beschleunigung in Betracht kam. Also ist auch der zuhause gebliebene Beobachter jünger als der „Reisende“, was offensichtlich unmöglich ist. Demnach gehört das Zwillingsproblem streng genommen in die ART und nicht in die SRT.
Wenn also der ruhende Beobachter das bewegte System misst, so ist das nur seine Perspektive und keine objektive Verzerrung. Sie wird erst durch Beschleunigung objektiv. Das ist analog zur perspektivischen Verkleinerung von Objekten, die sehr weit entfernt sind. Wäre die gemessene Verkleinerung objektiv, so müssten sie genauso für den anderen „kleineren“ Betrachter bzgl. des ersten Betrachters gelten, der sich ja als größer misst, was wieder Unsinn ist. Die „Verkleinerung“ ist hier durch die optische Geometrie erzeugt. Man darf also Empirie nicht mit der Objektivität verwechseln, die aber das Licht selbst als objektiver Maßstab einnimmt.

Relativität der Gleichzeitigkeit

Auch hier spielt natürlich wieder die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit die zentrale Rolle. In einem Inertialsystem seien zwei Detektoren mit synchronisierten Uhren in gleichem Abstand zu einer Lichtquelle angebracht.

Dass die Lichtblitze zu gleicher Zeit an den Detektoren eintreffen, dürfte niemand bezweifeln, wenn das Licht sich in jeder Richtung hin im Vakuum (homogener Raum) mit gleicher Geschwindigkeit ausbreitet. Bewegt sich nun aber ein zweites Inertialsystem gegenüber dem ersten mit der Geschwindigkeit v, so sieht er die Situation, die sich im blauen System, das sich für ihn bewegt, abspielt anders:



Denn der Abstand des linken Detektors hat sich in der Zeit dt‘ gegenüber der Lichtquelle, die den Lichtblitz zur Zeit t=t‘=0 ausgesandt hat auf $|x_1 + v\,dt'|$ vergrößert, während der Abstand des rechten Detektors sich auf $|x_2 - v\,dt'|$ verkleinert hat. Da das Licht auch für ihn sich mit der gleichen Geschwindigkeit c bewegt, registriert der rechte Detektor den Blitz für den rosa Beobachter früher als der linke.
Die Registrierungsereignisse sind also für den blauen Beobachter gleichzeitig, nicht aber für den rosa Beobachter.

Lorentztransformation

Obwohl sie zuerst von Hendrik Lorentz hergeleitet worden ist unter den oben genannten Modellvorstellungen, so hat Einstein sie nur mithilfe seiner beiden Prinzipien (Relativitätsprinzip und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) und einigen Zusatzpostulaten der Symmetrie abgeleitet. Seine Deduktion ist also nicht ätherisch.

Da sich in einem Inertialsystem kräftefreie Körper geradlinig gleichförmig (konstant) bewegen, sind ihre Zeit-Weg-Funktionen „linear“[5], d.h. geometrisch Geraden: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \cdot t + \boldsymbol{x_0}$, d.h. t kommt nur in einfacher Potenz vor.

Eine Geschwindigkeits-Transformation T in ein anderes Inertialsystem muss diese „Linearität“ erhalten, damit auch in ihm der Graph eine Gerade ist: $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{u}' \cdot t' + \boldsymbol{x}'_0$.

Eine beliebige Transformation $T = \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ hat die Gestalt:
$$\begin{aligned} t' &= f_0(t, x_1, x_2, x_3) \\ x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, x_3) \\ x'_3 &= f_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

5 Genauer: linear-inhomogen; es darf eine additive Konstante vorkommen wie bei Geradengleichungen üblich.

Würde in einem der Funktionsterme f_i eine der Variablen $w \in \{t, x_1, x_2, x_3\}$ nicht linear als $a\,w$ mit konstantem a vorkommen, also als w^2 oder $\sin w, \ldots$ so könnte die obige Transformation $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{u}' \cdot t' + \boldsymbol{x}'_0$ nicht erzeugt werden.

Um die Argumentation zu vereinfachen, soll die Relativgeschwindigkeit parallel zur x-Achse (x_1-Achse) erfolgen, sodass übrig bleibt:

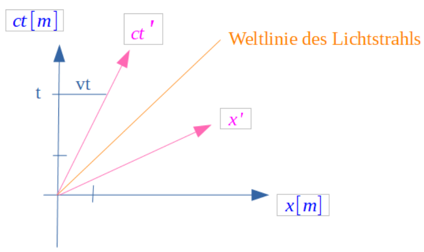
$$\begin{aligned} t' &= f_0(t, x) = at + bx + c \\ x' &= f_1(t, x) = d\,t + ex + g \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

, da die Einheitsvektoren der y-Achse und der z-Achse linear unabhängig sind zu dem Einheitsvektor der x-Achse, sie werden also unter der Voraussetzung nicht beeinflusst. Nimmt man weiter an, dass zur Zeit $t' = t = 0$ die Koordinatenursprünge zusammenfallen: $x' = x = 0$, so ist $c = g = 0$ und man hat $\begin{aligned} t' &= a \cdot t + b \cdot x \\ x' &= d \cdot t + e \cdot x \end{aligned}$, also noch vier Konstanten, also die Transformationsmatrix $T = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$, sodass $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$.

Die Konstanten hängen eventuell also nur noch von der Relativgeschwindigkeit v ab. Diese Transformation ist auch für die spezielle Galilei-Transformation die Schablone. Dort ist $a = 1, b = 0, d = -v, e = 1$. Wie aber klar war (Michelson-Morley) trifft die Galilei-Transformation nicht zu.

Um die Konstanten zu bestimmen, betrachtet man einfach zusammenhängende Ereignismengen.

Zunächst soll das einfache Weg-Zeit-Diagramm (Minkowski-Diagramm) hergeleitet werden.

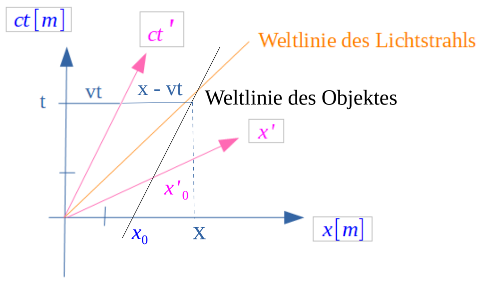


Anstatt auf der t-Achse die Einheit 1 Sekunde zu verwenden, wählt man besser die Zeiteinheit $t = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} sec$ und notiert die t-Achse mit $ct[1\,m]$, sodass die Weltlinie des Lichts, das im Ursprung startet, die 1. Winkelhalbierende ist. In Sekundeneinheiten wäre sie praktisch nicht von der x-Achse zu unterscheiden. Man könnte auch die Einheit auf der x-Achse mit einer Lichtsekunde angeben, also der Strecke, die Licht in einer Sekunde zurücklegt: $x - \text{Einheit} = 3 \cdot 10^8 m$ und die Einheit der t-Achse mit 1 Sekunde, was wahrscheinlich noch besser ist, da die Entfernung ja mit Lichtzeit gemessen wird. So wäre die Weltlinie des Lichts ebenfalls die erste Winkelhalbierende.

Die $ct' - \text{Achse}$ ist die Weltlinie des sich mit der Geschwindigkeit v bewegenden Beobachters, der im Ursprung seines Systems sich befindet und sich nicht bewegt, also immer seine Raumkoordinate $x' = 0$ hat. Auch wer habe das gleiche Maßsystem, wie angegeben. Da die Lichtgeschwindigkeit in seinem System die gleiche wie für das „Ruhesystem“ ist, muss auch seine Weltlinie des Lichts die Winkelhalbierende seiner Raum- und Zeitachsen sein. Das bedeutet, dass seine $x' - \text{Achse}$ die Spiegelung an der Weltlinie des Lichts sein muss.

Man unterstellt, dass die Ereignisse objektiv existieren, die von den Beobachtern nur verschieden dargestellt werden. Das ist natürlich eine ganz starke Annahme der sich objektiv verstehenden Physikphilosophie. Eine Alternative, der ich zuneige, wäre die verschiedenen Perspektiven nicht vorauszusetzen, sondern erst aus einem ganzheitlichen Modell heraus als Differenzierungen herzuleiten, wie ich es in meiner matrialen Bedürfnistheorie versucht habe. Aber jenes ist der Standpunkt einer empiristischen Naturphilosophie, die Bezüge aus individuellen Positionen erst herzustellen versucht, so wie auch das Allgemeine erst als eine Abstraktion ihnen erscheint.
Doch jetzt zurück zur klassischen Herleitung der Lorentz-Transformation.

Eine erste einfache Ereignismenge sei die Weltlinie eines Objektes, das sich im rosa System nicht bewegt. Zur Zeit $t=0$ befinde es sich am Ort x_0. Die Weltlinie des Objektes ist also eine Parallele zur $ct'-$Achse, das im rosa System zur Zeit $t'=0$ sich am Ort x'_0 befindet.



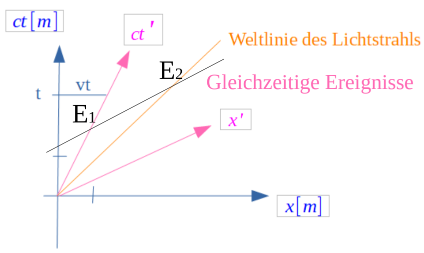
Für diese Weltlinie gilt: Im rosa System $x'=x'_0$, im blauen $x=vt+x_0$.

Es gilt weiter nach $\begin{array}{l} t'=a\cdot t+b\cdot x \\ x'=d\cdot t+e\cdot x \end{array}$ da die Konstanten für alle x, t gelten, gilt für spezielles x mit

$x=vt+x_0$: $x'=d\cdot t+e\cdot(vt+x_0)$. Und für spezielles t $t=0 \Rightarrow x'=e\,x_0$ also
$e\,x_0=d\cdot t+e\cdot vt+e\,x_0 \Rightarrow d\cdot t+e\cdot vt=0$ und damit $d=-e\cdot v \Rightarrow x'=-ev\,t+e\,x=e(x-vt)$ also

$x'=e(x-vt)$. Damit ist eine Konstante (d) eliminiert.

Um eine Konstante in der ersten Transformationsgleichung $t'=a\cdot t+b\cdot x$ zu eliminieren, betrachtet man anstatt der Gleichörtlichkeit wie oben nun analog die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse.
Alle Ereignisse, die im rosa System gleichzeitig sind, liegen auf einer Parallelen zur $x'-$Achse.



Die Ereignisse $E_1(x_1', t_1')$ und $E_2(x_2', t'_2=t_1')$ auf dieser Geraden sind im rosa System gleichzeitig. Die Gleichung der Geraden im rosa System: $t'=t'_1$.

Die Gleichung der x‘-Achse im blauen System l,o9oist zunächst durch Spiegelung zu erhalten:
$t=v\,x$. Die Geschwindigkeit v hat als Maßeinheit m/sec und x hat m. Rechts steht also als

Einheit $\frac{m^2}{sec}$, links aber nur sec. Also muss die korrigierende Einheit rechts $\frac{1}{\frac{m^2}{sec^2}}$ sein. Die Lichtgeschwindigkeit, die den Wert 1 durch die Wahl geeigneter Einheiten erhielt, muss also quadratisch im Nenner auftauchen, sodass die Gleichung der x'-Achse in normalen Einheiten lautet: $t=\frac{v}{c^2}x$.

Die Parallele durch das Ereignis $E_1(x_1,t_1)$ dazu hat die Gleichung $t=\frac{v}{c^2}(x-x_1)+t_1$.

Setzt man diese Gleichung in die erste des Systems $\begin{array}{l} t'=a\cdot t+b\cdot x \\ x'=d\cdot t+e\cdot x \end{array}$ ein, so bekommt man:

$t'=a\left(\frac{v}{c^2}(x-x_1)+t_1\right)+b\cdot x$ Da die Gleichung für alle x gilt, setzt man ein spezielles $x=0$ ein und erhält $t'=a\left(\frac{v}{c^2}(0-x_1)+t_1\right)$ oder $t'=a(t_1-\frac{v}{c^2}x_1)$ oder $t'=a(t-\frac{v}{c^2}x)$.

Man hat damit die Transformationsgleichungen: $\begin{array}{l} t'=a(t-\frac{v}{c^2}x) \\ x'=e(x-vt) \end{array}$. Bleiben noch a und e zu bestimmen. Nun kommen die Formeln der Zeitdilatation und der Längenkontraktion zur Geltung.

Man muss nun allerdings die Bezüge richtig sehen. t' bzw. x' ist das, was der rosa Beobachter *bei sich* misst und t bzw. x das, was der blaue Beobachter beim rosa System misst.

Zeitdilatation ist dann: $\Delta t'=\gamma\Delta t$. Aus der obigen ersten Translationsgleichung folgt für eine im blauen System ruhende Uhr $\Delta t'=a\Delta t-\frac{av}{c^2}\Delta x \overset{x_2=x_1}{=} a\Delta t \Rightarrow a=\gamma$.

Aus der zweiten Transformationsgleichung folgt: $\Delta x'=e\Delta x-e\,v\Delta t \overset{t_2=t_1}{=} e\Delta x$ und mit der Längenkontraktion $\Delta x'=\gamma\Delta x$ folgt $e=\gamma$.

Somit haben die Lorentz-Transformationen die Gestalt: $\begin{array}{l} t'=\gamma(t-\frac{v}{c^2}x) \\ x'=\gamma(x-vt) \\ y'=y \\ z'=z \end{array}$ (6).

Die Transformationsmatrix ist: $\begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma t-\frac{\gamma v}{c^2}x \\ -\gamma v t+\gamma x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Oder wenn man die Zeit t in räumlicher Dimension als ct schreibt, also die erste Gleichung mit c multipliziert und für $\frac{v}{c}=:\beta$ einführt: $\begin{matrix} ct'=\gamma(ct-\beta x) \\ x'=\gamma(x-\beta ct) \\ y'=y \\ z'=z \end{matrix}$. Nennt man den ersten Vektor

$\boldsymbol{x}':=\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ und den „ruhenden“ $\boldsymbol{x}:=\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und die Transformationsmatrix (Lorentzmatrix)

$\Lambda=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann hat die Lorentztransformation die Gestalt $\boldsymbol{x}'=\Lambda\boldsymbol{x}$ (6‘)

Die inverse Transformationsmatrix ist $\begin{pmatrix} \gamma & \frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma t'+\frac{\gamma v}{c^2}x' \\ \gamma v t'+\gamma x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und

$$\begin{matrix} t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right) \\ x=\gamma(vt'+x') \\ y=y' \\ z=z' \end{matrix} \quad (7)$$

oder wieder mit den obigen Veränderungen $\begin{matrix} ct=\gamma(ct'+\beta x') \\ x=\gamma(\beta ct'+x') \\ y=y' \\ z=z' \end{matrix}$ und mit der inversen Matrix

$\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x}=\Lambda^{-1}\boldsymbol{x}'$ (7‘).

Relativistische Geschwindigkeitsaddition

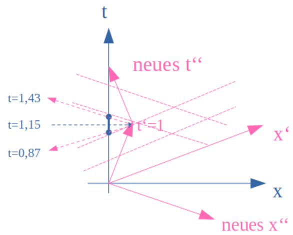
Bewegt sich im rosa System ein Objekt mit der Geschwindigkeit u' so gilt dort $x'=u't'$ und mit (7) ergibt sich vom blauen System aus gesehen:

$x=\gamma(vt'+u't')=\gamma t'(u'+v)$ und $t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}u't'\right)=\gamma t'\left(1+\frac{v}{c^2}u'\right)$ also $u=\frac{x}{t}=\frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'}$

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'} \quad (8).$$

Die aus u' und v resultierende Geschwindigkeit u ist kleiner als die entsprechende der Galilei-Transformation, da $\frac{v}{c^2}u'>0$. Für Geschwindigkeiten v und u' sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit: $v\,u'\ll c^2$ gilt im Grenzwert wieder die Galileische Addition.

Das sogenannte Zwillingsparadoxon



Ist im rosa System des mit halber Lichtgeschwindigkeit reisenden Zwilling 10 Jahre vergangen, so im daheim gebliebenen Double 11,5 Jahre. Kehrt dann der Reisende um, und ist somit in einem neuen Inertialsystem, das auch seine Erfahrung von Gleichzeitigkeit (rosa gestrichelte parallele Linien) abrupt verändert. Kommunizieren die beiden Zwillinge bzgl. ihrer Uhren ständig miteinander, so stellen sie erwartungsgemäß fest, dass die Uhren des anderen jeweils langsamer gehen als ihre eigenen. Ihre Sichten sind total symmetrisch bis zum Umkehrpunkt und auch wieder danach. Insgesamt aber sind sie es nicht, denn der Reisende erfährt im Gegensatz zum Daheimgebliebenen ein starke Beschleunigung bei der Umkehr. Am Umkehrpunkt tritt das Entscheidende ein. Misst der Reisende seine Zeit t‘=1 und fragt nach der seines Zwillings, kann er keine eindeutige Antwort mehr geben. Denn $t=\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}x'\right)$ und $t=\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}x''\right)$, wobei nicht beide x-Achsen zugleich Null sein können. Misst der Reisende bei seiner Zeit $t'=1$ die Zeit seines Zwillings zunächst als $t=0{,}87$ so unmittelbar danach als $t=1{,}43$ aufgrund seines Wechsels. Sein Zwilling ist also plötzlich um $\Delta t=0{,}57$ gealtert[6]. Dieser Effekt ist aber nicht mehr der SRT zuzuordnen, die streng genommen nur zwischen zwei gleichbleibenden Inertialsystemen Gültigkeit besitzt. Ich halte die Verwendung der Integralrechnung hier für sehr problematisch, wenn man auf krummlinige Bewegungen (also auf beliebige Differenzierbare Kurven) verallgemeinern will, wie ich es auf Seite 8 dargestellt habe. Die übrigen Zeitabschnitte der Reise (vor und nach dem Wechsel) sind symmetrisch, also für die Zeitvergleiche irrelevant. Streng genommen ist aber auch der Wechsel irrelevant, da er als Zweideutigkeit argumentatorisch nicht zugänglich ist. Zeitpunkte, Momente gibt es nicht. Kurz gesagt, ich halte das Zwillingsparadoxon nicht nur für ein Paradox sondern für ein Paranus[7], für Unsinn. Wenn man es sinnvoll diskutieren will, dann muss es in der ART geschehen.

Invarianzen

Die grundlegende Invarianz ist sicherlich die der Lichtgeschwindigkeit. Aber gibt es weitere? Weil durch sie erst eine solide Theorie aufgebaut werden kann.
Gleichzeitigkeit, Längen und Zeitintervalle sind keine Invarianten.

6 Vorausgesetzt, man kann von der Desynchronisierung der Uhren auch auf die der biologischen Prozesse schließen.
7 Gegen die Vernunft.

Um es einfach zu veranschaulichen, so gibt es zunächst in der euklidischen Geometrie bzgl. zwei Koordinatensystemen die Invarianz der Distanzen. Ist das zweite System gegenüber dem ersten um einen Winkel kleiner 360° um den Ursprung gedreht, so verändern sich sicher die Koordinaten.
Im Zweidimensionalen ist die Drehmatrix bzgl. eines Winkels α einfach: der erste

Einheitsvektor geht über in: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$ und der zweite $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}$, sodass gilt:

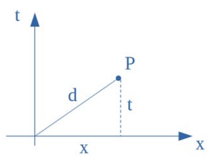
$R_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$. Die Ortsvektoren $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ haben den Abstand

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, der genau dem Abstand zwischen den gedrehten Ortsvektoren entspricht.

wie man leicht nachrechnet, was aber auch bereits anschaulich klar ist. Oder noch einfacher für

$x_2=y_2=0: \quad x_1^2+y_2^2=\text{konstant unter Rotation}$.

Wendet man dies auf das Raum-Zeit-Diagramm an und auf die Lorentztransformation, so ist die Frage, ob auch der *Raum-Zeit-Abstand* $d=\sqrt{x^2+t^2}$ unverändert bleibt.



Es gilt: $x'=\gamma(x-vt)$ und mit c = 1: $t'=\gamma(t-v\,x)$

$x'^2=\gamma^2(x^2-2xvt+v^2t^2)$ und $t'^2=\gamma^2(t^2-2\,xvt+v^2x^2)$

$\Rightarrow t'^2+x'^2=\gamma^2(t^2+x^2)-\gamma^2(4\,xvt)+\gamma^2(v^2t^2+v^2x^2)\neq t^2+x^2$, was man mit $v=\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}$ und

$x=t=1$ leicht sieht: dann ist $\gamma=\frac{2}{\sqrt{3}}$ und $t^2+x^2=2$, aber $t'^2+x'^2=\frac{2}{3}$. Die skalarwertige Funktion („der Skalar“) t^2+x^2 ist also nicht lorentzinvariant.

Aber durch Subtraktion erhält man:

$t'^2-x'^2=\gamma^2(t^2-x^2-v^2(t^2-x^2))=\gamma^2(1-v^2)(t^2-x^2)\overset{c=1}{=}t^2-x^2$; wählt man nicht $c=1$ und

nimmt dafür die Differenz $c^2t'^2-x'^2$, so ist:

$$c^2t'^2-x'^2=\gamma^2(c^2t^2+\frac{v^2}{c^2}x^2-2vtx)-\gamma^2(x^2+v^2t^2-2vtx)=\gamma^2(c^2t^2-x^2-v^2(t^2-\frac{x^2}{c^2}))\overset{(\gamma^2=\frac{c^2}{c^2-v^2})}{=}$$

$$\frac{(c^2t^2-x^2-v^2(t^2-\frac{x^2}{c^2}))c^2}{c^2-v^2}=\frac{c^4t^2-c^2x^2-v^2(c^2t^2-x^2)}{c^2-v^2}=\frac{c^2t^2(c^2-v^2)-x^2(c^2-v^2)}{c^2-v^2}=c^2t^2-x^2 \quad .$$

Damit hat man eine Erhaltungsgröße $c^2 t^2 - x^2$, allerdings nur, wenn das zweite Inertialsystem entlang der x-Achse sich geradlinig konstant bewegt. Bewegt es sich bzgl. einer beliebigen Achse, so kann man diese allgemeine Lorentz-Transformation sich vorstellen als Rotation zur x-Achse, dann die übliche Transformation und anschließend wieder Rückrotation zur gewählten Achse.
Ein Ausdruck wird also invariant sein unter einer allgemeinen Lorentz-Transformation, wenn er unter Rotationen invariant ist und unter der x-Transformation.

Der Term $c^2 t^2 - x^2$ ist aber nicht invariant, wenn Rotationen durchgeführt werden. Sei bspw.

$R_{y,\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Rotation um die y-Achse mit dem Winkel 90°. Dann ist

$\begin{matrix} t' = t \\ x' = z \\ y' = y \\ z' = -x \end{matrix}$ und also: $c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - z^2 \neq c^2 t^2 - x^2$. Werden aber auch die y- und z-Terme analog

eingeführt und erhält man dann den Ausdruck $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, so ist zumindest für die obige Rotation der so erweiterte Ausdruck invariant: $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - z^2 - y^2 - x^2$.
Für eine beliebige Raum-Rotation ist die t-Variable sicher invariant, da sie von dieser Rotation nicht betroffen ist. Der Term $x^2 + y^2 + z^2$ ist das Quadrat des Abstandes eines Punktes P(x/y/z) vom Ursprung. Da der Abstand eines Punktes vom Ursprung bei einer Raumrotation um den Ursprung sich nicht verändert, gilt das auch für $-(x^2 + y^2 + z^2)$. Also ist der erweiterte Ausdruck $c^2 \tau^2 := c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant unter Raumrotationen.
Ist er es aber auch für beliebige Lorentz-Transformationen? Für die Transformation in Richtung der x-Achse ist es der Term $c^2 t^2 - x^2$. Da von dieser Transformation aber weder die y-Werte noch die z-Werte betroffen werden, ist auch der Term $c^2 \tau^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant unter dieser Transformation. Da eine allgemeine Lorentz-Transformation aus Hintereinanderausführungen von x-Transformation und Raumrotationen besteht, ist $c^2 \tau^2$ invariant und da c² ohnehin invariant ist, ist auch τ invariant.
Die Raumabstände und Zeitabstände werden also im Allgemeinen nicht erhalten, aber die spezielle Kombination wie sie in Tau vorkommt, der **Raum-Zeit-Abstand**. Hier wird besonders klar, dass Raum und Zeit sich nicht mehr trennen lassen, sondern wie Minkowski in seinem berühmten Vortrag sagte:

„Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.“[8]

Die Raumzeit der Einsteinschen Theorie nennt man den Minkowski-Raum M.

Der Raum-Zeit-Abstand ist also für alle Beobachter gleich.

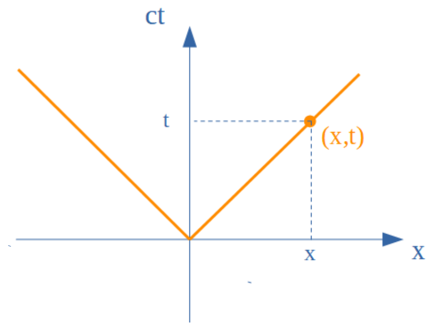
Definiert man ein (Pseudo-) Skalarprodukt in Anlehnung an den Raum-Zeit-Abstand als

$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$ mit den Vierervektoren $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$,

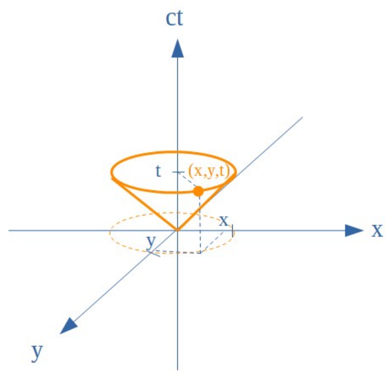
8 Hermann Minkowski, Raum und Zeit, Köln 1908.

wobei $x^0 = ct$ die Zeitkoordinate repräsentiert, so ist die Metrik also nicht mehr euklidisch[9]. Die Vorzeichen (+,-,-,-) nennt man die Signatur des Skalarprodukts. Man könnte ebenso die Signatur (-,+,+,+) wählen, also $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ und erhält mit $c^2 \tau^2 = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ die analoge Invariante. Weiter unten wird gezeigt, dass das so definierte Skalarprodukt eine Lorentz-Invariante ist.

Wird im Ursprung ein Lichtblitz ausgesandt, so ist das Licht zur Zeit t am Ort x mit $x = ct$

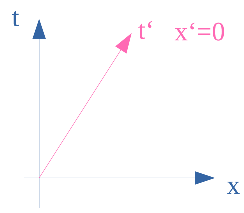


In der dreidimensionalen Raum-Zeit (die vierdimensionale lässt sich schlecht zeichnen) erhält man einen Lichtkegel, der zur Zeit t alle Punkte auf einem Kreis (Kugel) erreicht, der den Radius ct hat, also der Gleichung $c^2 t^2 = x^2 + y^2 (+z^2)$ genügt. Der allen gemeinsame Wert τ ist hierfür also Null.



Welche physikalische Bedeutung hat τ von der Invarianz bzgl. der Lorentz-Transformationen abgesehen?

Im zweidimensionalen Raum-Zeit-Diagramm ist $c^2 \tau^2 = c^2 t^2 - x^2$ bzw. mit c = 1: $\tau^2 = t^2 - x^2$.



In dem rosa System ist $\tau^2 = t'^2 - x'^2$ und für den rosa Beobachter gilt $x' = 0$ und damit

9 Es sei denn, dass man wie Friedrich Hund eine imaginäre Zeit ict einführt, anstatt die reelle ct.

$\tau^2 = t'^2$ oder $\tau = t'$, d.h. Tau gibt seine Zeit an, seine **Eigenzeit**. Das Gleiche gilt für den blauen Beobachter für den $x=0$ ist und damit $\tau = t$, seine Eigenzeit. Die Lorentz-Transformationen erhalten also die jeweiligen Eigenzeiten. Misst der blaue Beobachter in seinem System 1 Sekunde (einen Tick), so misst der rosa Beobachter das Gleiche, nämlich eine Sekunde (einen Tick) in seinem eigenen System. Nur die Messung des jeweils anderen (bewegten) Systems erfährt die Zeitdilatation.

Wenn die Invariante τ die Eigenzeit darstellt, so wird mit

$(\Delta s)^2 := -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ mit Ereignissen $E_1(t_1, x_1, y_1, z_1)$ und $E_2(t_2, x_2, y_2, z_2)$

$\Delta x = x_2 - x_1, \; etc.$ das **Raum-Zeit-Intervall** bezeichnet. Ist ein Ereignis der Ursprung zur Zeit 0,

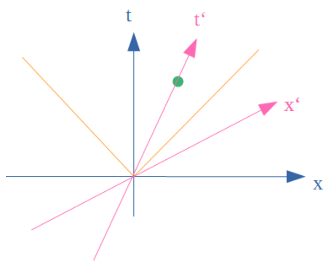
so bezeichnet $s^2 = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ den Raumzeit-Abstand des Ereignisses $E(t, x, y, z)$ vom Ursprung $O(0{,}0{,}0{,}0)$, der natürlich ebenfalls invariant unter Lorentz-Transformationen ist, da $s^2 = -c^2\tau^2$.

Die physikalische Bedeutung der Invarianten $(\Delta s)^2$ betrifft die kausale Beziehung zwischen den Ereignissen E_1 und E_2, die von dem Vorzeichen der Invarianten abhängt. Der Einfachheit halber wähle ich den Ursprung als das erste Ereignis und E als das zweite.

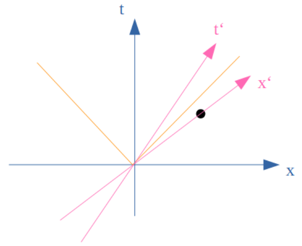
Ist $s^2 = 0$, dann ist $c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$, d.h. das Ereignis E liegt auf dem Mantel des Lichtkegels.

Stellt man sich vor, dass im Ursprung $O(0{,}0{,}0{,}0)$ ein Lichtblitz gesendet wurde, so sieht ein Beobachter in E diesen Blitz zur Zeit t. Man nennt das Ereignis E **lichtartig** verbunden mit O.

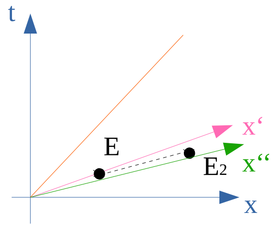
Ist $s^2 < 0$, so ist $c^2 t^2 > x^2 + y^2 + z^2$, d.h. das Ereignis E ist innerhalb der Lichtkegels und das bedeutet, dass das Ereignis E in materiell-kausaler Beziehung zu O stehen kann. Minkowski nannte dieses Ereignis **zeitartig** verbunden mit O. Alle Ereignisse auf der Zeitachse sind zeitartig mit O. Es gibt ein Inertialsystem, an dem die Ereignisse O und E am gleichen Ort stattfinden.



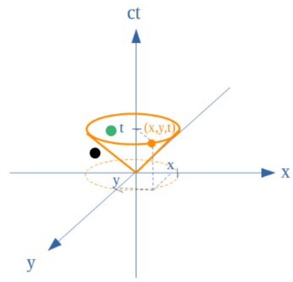
Ist $s^2 > 0$, so ist $c^2 t^2 < x^2 + y^2 + z^2$, d.h. das Ereignis E kann nicht durch O verursacht worden sein. E ist also nur **raumartig** mit O verbunden.
Es gibt ein Inertialsystem, an dem die Ereignisse O und E gleichzeitig stattfinden (aber räumlich getrennt sind). In diesem Inertialsystem gilt ja $s^2 = -c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \overset{t'=0}{=} x'^2 + y'^2 + z'^2$.
Demnach gibt dort s den räumlichen Abstand der beiden Ereignisse an. Er heißt auch **Eigenlänge.**
Es gibt aber kein Inertialsystem, in dem O und E am gleichen Ort sind, sonst müsste die Zeitachse sie verbinden und das heißt Überlichtgeschwindigkeit.



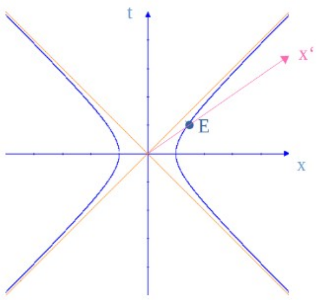
Wählt man eine weiteres Ereignis E_2, das ebenfalls raumartig zu E liegt, d.h. deren Verbindungsstrecke eine Steigung hat, die kleiner als 1 ist oder deren Winkel zur x-Achse kleiner 45° beträgt wie im unteren Diagramm, so sieht man, dass bzgl. des blauen Systems E_2 später als E eintritt, bzgl. des rosa Systems aber umgekehrt, hier ist E_2 früher als E! Und es gibt ein weiteres System, in dem beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden. Die Zeitordnung ist also mit Sicherheit keine Invariante, ja sie ist sehr spezifisch auf ein System bezogen.

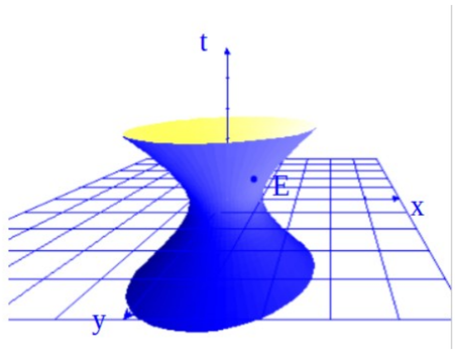


Alle Ereignisse, die in einem System licht-, zeit- bzw. raumartig sind, sind es auch in jedem anderen Inertialsystem. Die mögliche Kausalbeziehung (lichtartig bzw. zeitartig) ist also invariant. Ebenso die Nichtkausalbeziehung (raumartig).

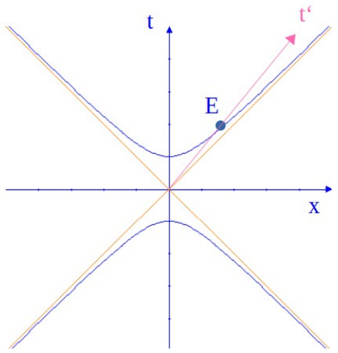


Im zweidimensionalen Raum-Zeit-Diagramm ist $s^2=-c^2t^2+x^2$ oder nach t aufgelöst $s^2=-c^2t^2+x^2 \Rightarrow c^2t^2=x^2-s^2 \overset{c=1}{\Rightarrow} t^2=x^2-s^2$, was eine Hyperbel darstellt. Für $s=1$ ist der untenstehende Graph gezeichnet und die blaue Hyperbel (im dreidimensionalen Raum-Zeit-Diagramm ist es ein Hyperboloid) gibt alle Ereignisse E an, die vom Ursprung $O(0,0)$ den Raum-Zeit-Abstand 1 haben. In dem Inertialsystem, dessen x‘-Achse durch E geht, ist 1 der Raum-Abstand vom Ursprung.

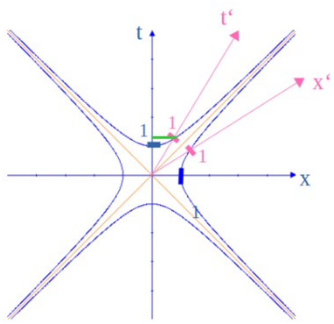




Analog kann auch die Zeitachse normiert werden. $\tau^2=c^2t^2-x^2 \Rightarrow c^2t^2=x^2+\tau^2 \overset{c=1,\tau=1}{\Rightarrow} t^2=x^2+1$



In dem Inertialsystem, dessen t‘-Achse durch E geht, ist E vom Ursprung 1 Zeiteinheit entfernt.



Mithilfe beider Hyperbeln (Eichhyperbeln) $t^2=x^2-1$ bzw. $t^2=x^2+1$ lassen sich also alle Inertialsysteme normieren, wie der obige Graph demonstriert.

Das macht auch nochmal deutlich, dass man in den Raum-Zeit-Diagrammen nicht die Euklidische Geometrie anwenden kann. Man erkennt jetzt besser die Zeitdilatation mit der relativistischen Geometrie (Minkowski-Geometrie), wie es die grüne Linie erkennen lässt: Ist eine Zeiteinheit im rosa System vergangen, so ist im blauen System mehr als eine Zeiteinheit verstrichen; im „bewegten“ System geht die Uhr langsamer. Für die Längeneinheiten gilt Analoges, wie man im Diagramm nun erkennen kann.

Vierervektoren

Vierervektoren sind nicht nur eine Verallgemeinerung auf vier Dimensionen, so wie es in der analytischen Geometrie üblich ist, sondern die Erweiterung muss der Lorentz-Transformation genügen:
Ein Gebilde $x^{\mu}:=(x^0,x^1,x^2,x^3)$ heißt (kontravarianter) **Vierervektor**, wenn es beim Übergang zum Gebilde $x'^{\mu}:=(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)$, das durch eine beschleunigungsfreie Relativbewegung v in positiver x^1-Richtung (sog. „x^1-boost“) zustande kommt, folgender Transformationsregel (Lorentztransformation) genügt:

$$\begin{matrix} ct'=\gamma(ct-\beta x) \\ x'=\gamma(x-\beta ct) \\ y'=y \\ z'=z \end{matrix} \quad \overset{ct=x^0 \text{ und } x=x^1}{\underset{y=x^2 \text{ und } z=x^3}{\Rightarrow}} \quad \begin{matrix} x'^0=\gamma(x^0-\beta x^1) \\ x'^1=\gamma(x^1-\beta x^0) \\ x'^2=x^2 \\ x'^3=x^3 \end{matrix} \quad \text{mit} \quad \beta=\frac{v}{c} \quad \text{oder mit}$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}=\Lambda\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

und wenn die räumlichen Komponenten[10] $x^i:=(x^1,x^2,x^3)$ in üblicher Weise bei räumlicher Rotation transformiert und die Zeitkomponente x^0 dabei unverändert bleibt.

Die inverse Transformation ist: $\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}=\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$ oder

$$\begin{matrix} x^0=\gamma(x'^0+\beta x'^1) \\ x^1=\gamma(x'^1+\beta x'^0) \\ x^2=x'^2 \\ x^3=x'^3 \end{matrix} \quad .$$

$(ct,x,y,z)=(x^0,x^1,x^2,x^3)=x^{\mu}$ ist also ein Vierervektor.

Addiert man zwei Vierervektoren $x^{\mu}:=(x^0,x^1,x^2,x^3)$ und $y^{\mu}:=(y^0,y^1,y^2,y^3)$ zu

$x^{\mu}+y^{\mu}:=(x^0+y^0,x^1+y^1,x^2+y^2,x^3+y^2)$, so ist

$x'^0+y'^0=\gamma(x^0-\beta x^1)+\gamma(y^0-\beta y^1)=\gamma(x^0+y^0-\beta(x^1+y^1))$ und

$x'^1+y'^1=\gamma(x^1-\beta x^0)+\gamma(y^1-\beta y^0)=\gamma(x^1+y^1-\beta(x^0+y^0))$.

Multipliziert man einen Vierervektor mit einem Skalar $\lambda x^{\mu}=(\lambda x^0,\lambda x^1,\lambda x^2,\lambda x^3)$, so ist das Produkt wieder ein Vierervektor:

10 Der ganze Vierervektor werde mit griechischen Superskripten (die nicht mit Exponenten verwechselt werden dürfen), der nur räumliche Dreiervektor mit lateinischen bezeichnet.

$$\lambda x'^0 = \lambda\gamma(x^0-\beta x^1)=\gamma(\lambda x^0-\beta\lambda x^1) \quad \text{und} \quad \lambda x'^1=\lambda\gamma(x^1-\beta x^0)=\gamma(\lambda x^1-\beta\lambda x^0) \quad .$$

Die Menge der Vierervektoren bilden einen Vektorraum, den **Minkowski-Raum M**.

Als Skalarprodukt (inneres Produkt)[11] definiert man $x^\mu y^\mu := x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ mit dem

Minkowski-Metrik-Tensor $\eta=\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=diag(1,-1,-1,-1)$.

Aus einem beliebigen Vierervektor kann man über das Skalarprodukt eine Invariante analog zur Eigenzeit herstellen: $(x^\mu)^2=(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2$, ein sogenannter Lorentz-Skalar.

Denn schon das Skalarprodukt (Viererprodukt) $x^\mu y^\mu := x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ aus Vierervektoren[12] ist lorentzinvariant:

$$x'^\mu y'^\mu = x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3 = \gamma^2(x^0-\beta x^1)(y^0-\beta y^1)-\gamma^2(x^1-\beta x^0)(y^1-\beta y^0)-x^2y^2-x^3y^3=$$

$$=\gamma^2(x^0y^0+\beta^2x^1y^1-\beta x^0y^1-\beta x^1y^0)-\gamma^2(x^1y^1+\beta^2x^0y^0-\beta x^1y^0-\beta x^0y^1)-x^2y^2-x^3y^3=$$

$$=\underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1}x^0y^0+\underbrace{\gamma^2(\beta^2-1)}_{-1}x^1y^1+\gamma^2\underbrace{(\beta x^0y^1-\beta x^0y^1)}_{0}+\gamma^2\underbrace{(\beta x^1y^0-\beta x^1y^0)}_{0}-x^2y^2-x^3y^3=$$

$$=x^0y^0-x^1y^1-x^2y^2-x^3y^3=x^\mu y^\mu \quad .$$

Man kann das auch eleganter beweisen. Es gilt nämlich $\Delta^T\eta\Delta=\eta$, wie man über Matrizenmultiplikation schnell nachprüfen kann.

Schreibt man das Skalarprodukt in der Form $x^\mu y^\mu=(x^0,x^1,x^2,x^3)\eta\begin{pmatrix}y^0\\y^1\\y^2\\y^3\end{pmatrix}$, gilt:

$$x'^\mu y'^\mu=(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)\eta\begin{pmatrix}y'^0\\y'^1\\y'^2\\y'^3\end{pmatrix}=\left((x^0,x^1,x^2,x^3)\Delta^T\right)\eta\Delta\begin{pmatrix}y^0\\y^1\\y^2\\y^3\end{pmatrix}=(x^0,x^1,x^2,x^3)\eta\begin{pmatrix}y^0\\y^1\\y^2\\y^3\end{pmatrix}=x^\mu y^\mu$$

Das so definierte „Pseudo“Skalarprodukt ist eine symmetrische Bilinearform, d.h. es gilt:

(1) Symmetrie: $x^\mu y^\mu = y^\mu x^\mu$

(2) Bilinearität: $(\alpha x^\mu+\beta y^\mu)z^\mu=\alpha(x^\mu z^\mu)+\beta(y^\mu z^\mu)$

11 Siehe oben
12 Dieses „Pseudoskalarprodukt“ ist nicht positiv definit, d.h. aus $(x^\mu)^2=0$ kann $x^\mu\neq 0$ folgen.

Beweis der Bilinearität: Aufgrund der Symmetrie reicht es, die Linkslinearität zu zeigen:

$$(\alpha x^{\mu}+\beta y^{\mu})z^{\mu}=[(\alpha x^{0},\alpha x^{1},\alpha x^{2},\alpha x^{3})+(\beta y^{0},\beta y^{1},\beta y^{2},\beta y^{3})](z^{0},z^{1},z^{2},z^{3})=$$
$$=(\alpha x^{0}+\beta y^{0},\alpha x^{1}+\beta y^{1},\ldots)(z^{0},z^{1},\ldots)=(\alpha x^{0}+\beta y^{0})z^{0}-(\alpha x^{1}+\beta y^{1})z^{1}-\ldots=$$
$$=\alpha x^{0}z^{0}+\beta y^{0}z^{0}-\alpha x^{1}z^{1}-\beta y^{1}z^{1}-\ldots=\alpha(x^{0}z^{0}-x^{1}z^{1}-\ldots)+\beta(y^{0}z^{0}-y^{1}z^{1}-\ldots=)$$
$$=\alpha(x^{\mu}z^{\mu})+\beta(y^{\mu}z^{\mu})\quad .$$

Der Geschwindigkeitsvierervektor ist anders als der übliche Geschwindigkeitsvektor.

Mit den beiden Vierervektoren (Ereignisvektoren) $x_1^{\mu}=(x_1^0,x_1^1,x_1^2,x_1^3)$ und $x_2^{\mu}=(x_2^0,x_2^1,x_2^2,x_2^3)$ ist

$\Delta x^{\mu}=(\Delta x^{0},\Delta x^{1},\Delta x^{2},\Delta x^{3})=(x_2^0-x_1^0,x_2^1-x_1^1,x_2^2-x_1^2,x_2^3-x_1^3)$ der Differenzvektor, der wieder ein Vierervektor ist.

Die übliche Geschwindigkeitsdefinition wäre $\frac{dx^i}{dx^0}=\lim_{\Delta x^0\to 0}\frac{\Delta x^i}{\Delta x^0}=\begin{pmatrix}\lim_{\Delta x^0\to 0}\frac{\Delta x^1}{\Delta x^0}\\ \lim_{\Delta x^0\to 0}\frac{\Delta x^2}{\Delta x^0}\\ \lim_{\Delta x^0\to 0}\frac{\Delta x^3}{\Delta x^0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{dx^1}{dx^0}\\ \frac{dx^2}{dx^0}\\ \frac{dx^3}{dx^0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\end{pmatrix}$.

Würde das übernommen, so lautete der Vierergeschwindigkeitsvektor $\frac{dx^{\mu}}{d\,x^0}=\begin{pmatrix}\frac{dx^0}{dx^0}\\ \frac{dx^1}{dx^0}\\ \frac{dx^2}{dx^0}\\ \frac{dx^3}{dx^0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\end{pmatrix}$.

Das Problem ist, dass er kein Vierervektor ist: (2): $u'^1=\frac{dx'}{dt'}=\frac{\gamma(dx-vdt)}{\gamma(dt-vdx)}\neq\gamma\left(\frac{dx}{dt}-v\cdot 1\right)$

Das Problem wird behoben, wenn man anstatt der Zeit t die Invariante τ , die Eigenzeit wählt.

Die Vierergeschwindigkeit istv also $u^{\mu}=\begin{pmatrix}u^0\\ u^1\\ u^2\\ u^3\end{pmatrix}:=\frac{dx^{\mu}}{d\tau}=\begin{pmatrix}\frac{dx^0}{d\tau}\\ \frac{dx^1}{d\tau}\\ \frac{dx^2}{d\tau}\\ \frac{dx^3}{d\tau}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d\,ct}{d\tau}\\ \frac{dx}{d\tau}\\ \frac{dy}{d\tau}\\ \frac{dz}{d\tau}\end{pmatrix}$ [13].

13 Damit die Vierergeschwindigkeit nicht mit der Boost-Geschwindigkeit v verwechselt wird, schreibt man u.

Nachweis, dass u^μ Vierervektor ist:

(1) $u'^0=\frac{d\,ct'}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}(\gamma(ct-\beta x))=\gamma(\frac{d\,ct}{d\tau}-\beta\frac{dx}{d\tau})=\gamma(u^0-\beta u^1)$

(2) $u'^1=\frac{dx'}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\gamma(x-\beta ct)=\gamma(\frac{dx}{d\tau}-\beta\frac{dct}{d\tau})=\gamma(u^1-\beta u^0)$

(3) $u'^2=\frac{dy'}{d\tau}=\frac{dy}{d\tau}=u^2$

(4) $u'^3=\frac{dz'}{d\tau}=\frac{dz}{d\tau}=u^3$.

Wie ist der Zusammenhang der Vierergeschwindigkeit mit der normalen Dreiergeschwindigkeit?

Die erste Komponente der 4-Geschwindigkeit ist $u^0=\frac{cd\,t}{d\tau}$, wobei $\tau^2=t^2-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{c^2}$ oder $(d\tau)^2=(dt)^2-\frac{((dx)^2+(dy)^2+(dz)^2)}{c^2}$ oder $d\tau=\frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2-d\boldsymbol{x}^2}$ und damit $u^0=\frac{c^2dt}{\sqrt{c^2dt^2-d\boldsymbol{x}^2}}$
oder wenn man cdt in den Nenner holt: $u^0=\frac{c}{\frac{1}{cdt}\sqrt{c^2dt^2-d\boldsymbol{x}^2}}=\frac{c}{\sqrt{1-\frac{d\boldsymbol{x}^2}{c^2dt^2}}}=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2}}=\gamma c$ mit

der 3-Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$. Aus $u^0=\frac{cd\,t}{d\tau}$ und $u^0=\gamma c$ ergibt sich: $\frac{dt}{d\tau}=\gamma$.

Ist $\boldsymbol{v}^2$ sehr klein gegenüber c^2 , so ist $u^0\approx c$. Die „Zeitgeschwindigkeitskomponente“ ist hier also die Lichtgeschwindigkeit c.

Die anderen Komponenten sind $u^i=\frac{dx^i}{d\tau}=\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=\gamma v^i$ und demnach $u^\mu=\gamma(c,v^i)$.

Für sehr kleine Geschwindigkeit gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist $u^i\approx v^i$, d.h. die 4-Geschwindigkeit praktisch die 3-Geschwindigkeit.

Hier zeigt sich eine weitere Invariante (Lorentzfaktor), das Normquadrat (Skalarprodukt) $u^\mu u_\mu$ von u^μ : $u^\mu u_\mu=(u^0)^2-(\boldsymbol{u}^2)=c^2$ (wie alle Normquadrate von Vierervektoren).

Denn: $(u^0)^2-((u^1)^2+(u^2)^2+(u^3)^2)=\gamma^2c^2-\gamma^2(\boldsymbol{v}^2)=\gamma^2(c^2-\boldsymbol{v}^2)=\frac{c^2-\boldsymbol{v}^2}{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}=\frac{(c^2-\boldsymbol{v}^2)c^2}{c^2-\boldsymbol{v}^2}=c^2$.

Damit ist natürlich auch c ein Lorentzfaktor (was ja aufgrund des Postulats klar ist).

Die Trajektorie eines relativistischen Teilchens wird also durch die Vierervektoren x^μ und u^μ bestimmt.

Die Vierergeschwindigkeit kann über die Gleichungen:
$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}} = \gamma\, c$$
$$u^i = \gamma\, v^i$$
$$(u^0)^2 - \boldsymbol{u}^2 = c^2$$
berechnet werden.

Das 2. Newtonsche Gesetz $\boldsymbol{F} = m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}$ soll ebenfalls relativistisch angepasst werden. Dazu sollen folgende Ersetzungen vorgenommen werden: $\boldsymbol{v} \rightarrow u^\mu$ und $t \rightarrow \tau$, wobei die träge Masse m unverändert bleibt: $\boldsymbol{F} = m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} \rightarrow K^\mu = m\frac{d}{d\tau}u^\mu$. K^μ heißt Minkowski-Kraft und ist ein Vierervektor, da u^μ Vierervektor ist:

(1) $K'^0 = \frac{d}{d\tau} m\, u'^0 = \frac{d}{d\tau}\left(m\,\gamma\left(u^0 - \beta\, u^1\right)\right) = \gamma\left(m\frac{d}{d\tau}u^0 - \beta\, m\frac{d}{d\tau}u^1\right) = \gamma\left(K^0 - \beta\, K^1\right)$

(2) $K'^1 = \frac{d}{d\tau} m\, u'^1 = \frac{d}{d\tau}\left(m\,\gamma\left(u^1 - \beta\, u^0\right)\right) = \gamma\left(m\frac{d}{d\tau}u^1 - \beta\, m\frac{d}{d\tau}u^0\right) = \gamma\left(K^1 - \beta\, K^0\right)$.

Wie sieht wieder das Verhältnis der Minkowski-Kraft zur gewöhnlichen Newton-Kraft aus?

Eine andere Darstellung des 2. Newtonschen Gesetzes ist $F_i = \frac{d}{dt}p_i \; (i=1,2,3)$ und für das kräftefreie Teilchen $0 = F_i = \frac{d}{dt}p_i$ wird sein Impuls erhalten. Diese Impulserhaltung ist aber nicht lorentzinvariant. Man bringt wieder, um das zu ändern, die Raumanteile der Minkowski-Kraft in eine zu 2. Newtonschen Gesetz ähnliche Form: $K_i = m\frac{d}{d\tau}u_i \overset{\frac{1}{d\tau}=\frac{\gamma}{dt}}{=} m\,\gamma\frac{d}{dt}\gamma\, v_i = \gamma\frac{d}{dt}\gamma\, p_i$.

Legt man die relativistischen Größen fest zu: $\overline{p_i} := \gamma\, p_i$ und $\overline{F_i} := \frac{d}{dt}\overline{p_i}$, erhält man $K_i = \gamma\,\overline{F_i}$.

Für $v \ll c$ wird $\overline{p_i} \rightarrow p_i,\; K_i \rightarrow F_i = \frac{d}{dt}p_i$, also klassisch newtonsch.

Für die Zeitkomponente K^0 ergibt sich der Zusammenhang (ohne Rechnung) $K^0 = \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$, sodass insgesamt für die relativistische Kraft gilt: $K^\mu = \gamma\left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c}, \overline{F^i}\right)$.

Welche physikalische Bedeutung hat K^0 ?

$$\gamma\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c} = K^0 = m\frac{d}{d\tau}u^0 = m\frac{d}{d\tau}\gamma\, c \Rightarrow \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{d}{d\tau}mc^2 = \frac{d}{dt}\gamma\, mc^2 \quad .$$

Das Skalarprodukt $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\,\boldsymbol{x}}{dt}$ ist die (infinitesimale) Arbeit pro Zeiteinheit, die die Kraft **F** am Teilchen mit der Masse m leistet. Das entspricht in der nichtrelativistischen Mechanik der zeitlichen Änderung der kinetische Energie.
Es liegt daher nahe, $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$ als zeitliche Änderung der **relativistischen kinetischen Energie** $\overline{T}$ zu identifizieren: $\frac{d}{dt}\overline{T}=\frac{d}{dt}\gamma\,mc^2$ oder $\overline{T}=\gamma\,mc^2$.
Für $v\ll c$ sollte sie in die nichtrelativistische kinetische Energie $T=\frac{1}{2}mv^2$ übergehen.

Verwendet man für kleine v die Taylor-Approximation[14]: $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$, so ergibt sich:

$\overline{T}\approx mc^2(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})=mc^2+\frac{1}{2}mv^2$ mit dem nicht erwarteten Summanden mc^2 . Wird v auf Null reduziert, so bleibt der relativistische Energieterm mc^2 übrig. Er ist die berühmte Gleichung für die Energie des ruhenden Teilchens: $E=mc^2$. Man erkennt hier eine gewisse Analogie dieser Restenergie eines Materieteilchens im „Ruhezustand“ mit der Restenergie (Nullpunktsenergie) des Vakuums, wenn alle klassische Energie und Materie entfernt ist: $E=\frac{1}{2}\hbar\,\omega$, die irreduzible Raumenergie. Es ist anzunehmen, dass hier jeweils *eine* Energieform zugrunde liegt, die photonale Energie, die einerseits die Energie der virtuellen Photonen (des leeren Raums) ist und andrerseits die Energie der Photonen ist, die die Materieteilchen konstituieren. Hat man ein reales Photon (oder mehrere) mit $E=\frac{3}{2}\hbar\,\omega$ $($oder $E=(n+\frac{1}{2})\hbar\,\omega)$, das (die) von virtuellen Photonen umgeben ist (zu dem sie gehören), sein Ort, so können sich durch die Gleichung $mc^2=(n+\frac{1}{2})\hbar\,\omega$ Teilchen der Gesamtmasse $m=(n+\frac{1}{2})\,\omega\,\frac{\hbar}{c}$ bilden. Nach diesem spekulativen Exkurs zurück zu den Vierervektoren.
Die Zeitkomponente K^0 der Viererkraft ist also $K^0=\frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt}\overline{T}=\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}\frac{d}{dt}\overline{T}$, also die zeitliche Änderung der relativistischen Energie des freien Teilchens.

Ein anderer äußerst wichtiger Vierervektor ist der **relativistische Impuls**, der schon oben in seinen räumlichen Komponenten eingeführt wurde durch $\gamma\,\boldsymbol{p}$. Insgesamt ist er:

$p^\mu:=m\,u^\mu=m\,\gamma\,(c\,,\boldsymbol{v})$, wobei $p^i=\gamma\,\boldsymbol{p}=\gamma\,m\,\boldsymbol{v}$ und $p^0=m\,\gamma\,c$ oder mit $\overline{T}=\gamma\,mc^2$:

$p^\mu=\left(\frac{\overline{T}}{c},\gamma\,m\,\boldsymbol{v}\right)=\left(\frac{\overline{T}}{c},\overline{\boldsymbol{p}}\right)$. Die Zeitkomponente ist im Wesentlichen mit der relativistischen

14 Die Taylorformel hierzu ist: $(1-x)^\alpha=1-\alpha\,x+\frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2\,!}x^2-...=\sum\binom{\alpha}{k}(-x)^k$

kinetischen Energie identisch. In den bisherigen Termen taucht die Masse m als Invariante auf, ist aber immer mit γ verbunden. Man definiert daher $\gamma m =: m(v)$ als geschwindigkeitabhängige „relativistische Masse“. Die Raumkomponente des Viererimpulses ist dann: $\bar{\boldsymbol{p}} = \gamma m \boldsymbol{v} = m(v)\boldsymbol{v}$, also dem nichtrelativistischen Impuls fast identisch. Die „Ruhemasse“ eines Teilchens bezeichnet man dann mit $m(0)$. Die relativistische kinetische Energie schreibt sich dann als $\bar{T} = m(v)c^2$.

Der relativistische Impuls $p^\mu = m u^\mu$ ist tatsächlich ein Vierervektor:

(1) $p'^0 = m u'^0 = m\gamma\left(u^0 - \beta u^1\right) = \gamma\left(m u^0 - \beta m u^1\right) = \gamma\left(p^0 - \beta p^1\right)$

(2) $p'^1 = m u'^1 = m\gamma\left(u^1 - \beta u^0\right) = \gamma\left(m u^1 - \beta m u^0\right) = \gamma\left(p^1 - \beta p^0\right)$.

Man sieht, dass im Viererimpuls Impuls und Energie gemischt sind. Ein ruhendes Teilchen in einem Inertialsystem hat keinen Impuls, aber Energie, in einem anderen Inertialsystem, das sich bzgl. des ersten bewegt, hat es Energie und Impuls. Die nichtrelativistische Erhaltung des Impulses wird hier zur Erhaltung von Impuls plus Energie.

Multipliziert man die Gleichung der Geschwindigkeitsinvarianten $(u^0)^2 - (\boldsymbol{u}^2) = c^2$ mit m^2 erhält man $(m u^0)^2 - (m\boldsymbol{u})^2 = m^2 c^2$ oder $(p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2 c^2 \Rightarrow (m\gamma c)^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2 c^2 \overset{\cdot c,\sqrt{}}{\Rightarrow} m\gamma c^2 = \sqrt{c^2 \boldsymbol{p}^2 + m^2 c^4}$

und da $m\gamma c^2$ die **relativistische Energie** ist $\bar{T} = E$ hat man die wichtige Formel

$$E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad .$$

Diese Energieformel gilt für Materieteilchen und masselose Teilchen wie Photonen: Ist $m = 0$, so ist $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 c^2} = |\boldsymbol{p}| c = p c$. Für sie gilt $pc = h\nu \overset{c=\lambda\nu}{\Rightarrow} \lambda = \frac{h}{p}$ (de Broglie- Wellenlänge) .

Für Materieteilchen im Ruhesystem ist $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ und damit wieder $E = m c^2$.

Hier sollen noch zusammenfassend die Invarianzen angegeben werden. Wie oben gezeigt ist jedes Skalarprodukt aus Vierervektoren (Lorentz-Skalar) lorentzinvariant. Allerdings ist nicht jede skalarwertige Funktion lorentzinvariant, also kein Lorentz-Skalar! Ein Skalar, als eine Zahl, die nicht Funktion von den Raum-Zeit-Variablen ist, ist invariant, da sie unter der Lorentztransformation garnicht verändert werden kann. Alle algebraischen Verknüpfungen zweier Lorentz-Skalare oder eines Lorentz-Skalars mit einem gewöhnlichen Skalar (sofern die Verknüpfung zugelassen ist) ergeben wieder einen Lorentz-Skalar. Ist also L die Lorentztransformation, d.h. $L(A(x^\mu)) = A(L(x^\mu)) = A(x'^\mu)$, wobei A ein Ausdruck, Term ist und ist λ ein Skalar, also mit $L(\lambda) = \lambda$ und $s(x^\mu, y^\mu)$ ein Lorentz-Skalar, also mit $s(x'^\mu, y'^\mu) = s(L(x^\mu), L(y^\mu)) = L(s(x^\mu, y^\mu)) = s(x^\mu, y^\mu)$ und $\circ$ die innere algebraische Verknüpfung bzw. die äußere Verknüpfung eines gewöhnlichen Skalars mit einem Lorentz-Skalar, so gilt kurz:

(1) $L(\lambda \circ s) = L(\lambda) \circ L(s) = \lambda \circ L(s) = \lambda \circ s$

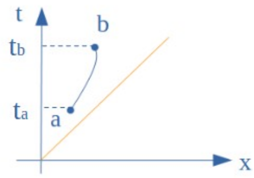
(2) $L(s_1 \circ s_2) = L(s_1) \circ L(s_2) = s_1 \circ s_2$.

Beispiel zu (2): $s_1 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ und $s_2 = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$, beides Lorentz-Skalare, so ist $L(s_1 \cdot s_2) = \big((x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2\big)\big(x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3\big) \overset{invariant}{=}$

$$= \big((x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\big)\big(x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3\big) = s_1 \cdot s_2 \quad .$$

Relativistische Mechanik

Das Prinzip der kleinsten (stationären) Wirkung wird wie in der Quantenmechanik auch hier zentral werden. In der klassischen Mechanik ist die Lagrangefunktion abhängig von dem Ort und der Geschwindigkeit: $L = L(q, \dot{q}, t) = L(x, v, t) = T(v) - V(x, t)$. Das Wirkungsfunktional S ist dann $S = \int_{t_a}^{t_b} L\, dt$, wenn das Partikel sich auf einem Weg von a nach b bewegt.



x steht hier für die Raumkoordinate (also auch für den dreidimensionalen Raum).

Die tatsächliche Bahn des Teilchens ist dann diejenige, für die die Variation der Wirkung stationär ist: $\delta S = 0$. Daraus abgeleitet ist dann die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$, die das Bewegungsgesetz ergibt.
Damit das Wirkungsprinzip in der relativistischen Mechanik von dem Inertialsystem unabhängig, also lorentzinvariant wird und somit die Bewegungsgesetze für alle Beobachter die gleichen sind, werden am besten invariante Größen verwendet: die relativistische Lagrangefunktion $\bar{L}$ sollte also neben den Vierervektoren die Invariante τ enthalten: $q \rightarrow x^\mu, \dot{q} \rightarrow u^\mu, t \rightarrow \tau$, d.h.

$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow \bar{L}(x^\mu, u^\mu, \tau)$ und damit $\delta S = \delta \int_{\tau_a}^{\tau_b} \bar{L}(x^\mu, u^\mu, \tau)\, d\tau = 0$ mit den Euler-Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \bar{L}}{\partial u^\mu} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial x^\mu}$.

Wie aber findet man die relativistische Lagrangefunktion? Durch Analogie zur klassischen vorrelativistischen Mechanik. Für $v \ll c$ sollten die üblichen Resultate folgen.

Beispiel: Ist das nichtrelativistische Partikel ein freies, d.h. ohne in einem Kraftfeld zu sein, so ist $V(x, t) = 0$ und die Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$, woraus über die Euler-Lagrange-Gleichung folgt: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} m v$ und $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$ und damit $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} m v = 0$.

Aus welcher relativistischen Lagrangefunktion $\bar{L}$ folgt entsprechend $\frac{d}{d\tau} m u^\mu = 0$ oder

$\frac{d}{d\tau} p^\mu = 0$? Nichtrelativistisch wäre das Wirkungsintegral $S = \int_{t_a}^{t_b} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) dt$ zu untersuchen

mit dem Impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$. Hierin p_i relativistisch interpretiert $\frac{\partial L}{\partial v_i} = \overline{p}_i = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ und

integriert, ergibt $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ (die korrekte relativistische Lagrangefunktion), wie man durch

partielle Differentiationen überprüft.
L ist nicht mehr die kinetischen Energie $\overline{T}$. Dafür ist $\overline{T}$ die Hamiltonfunktion und also die Gesamt-Energie:

$$H = \sum_i \overline{p}_i v_i - L = \sum_i \frac{m v_i^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mv^2}{\sqrt{}} + \frac{mc^2}{\sqrt{}} (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{mv^2 + mc^2 - mv^2}{\sqrt{}} = \gamma m c^2 = \overline{T} \quad .$$

Substituiert man in $S = \int_{t_a}^{t_b} L\, dt$ t durch τ, ergibt das mit $dt = \gamma\, d\tau$: $S = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \gamma\, L\, d\tau$ und mit $S = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \overline{L}(x^\mu, u^\mu, \tau)\, d\tau$ verglichen, bedeutet das $\overline{L} = \gamma\, L = \frac{-mc^2}{\gamma} \cdot \gamma \Rightarrow \overline{L} = -mc^2$, die

relativistische Lagrangefunktion (für dieses wichtige Beispiel). Um die Abhängigkeit der Lagrangefunktion von u^μ zu sehen und um dann $\frac{d}{d\tau} m u^\mu = 0$ zu zeigen, ersetzt man ein c in $\overline{L} = -mc^2$ durch $c = \sqrt{u^\mu u_\mu}$ (siehe S. 23) und bekommt $\overline{L} = -mc \sqrt{u^\mu u_\mu}$.

Für die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \overline{L}}{\partial u^\mu} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial x^\mu}$ braucht man jetzt $\frac{\partial \overline{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial(-mc\sqrt{u^\mu u_\mu})}{\partial x^\mu} = 0$,

daraus folgt mit Hilfe der E-L-Gleichung $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \overline{L}}{\partial u^\mu} = 0$. Definiert man den konjugierten Impuls

wieder mit $\frac{\partial \overline{L}}{\partial u^\mu} =: -p^\mu$ [15], so ist $0 = \frac{d}{d\tau} p^\mu = \frac{d}{d\tau} m u^\mu$, womit die Herleitung aus der

relativistischen Lagrangefunktion gelungen ist.

Kovariante und kontravariante Vektoren (Tensoren)

Bisher wurden die Indizes meist oben als Superskripte angeführt. Vektoren, die so gekennzeichnet sind, wechseln bei Basiswechsel den Basisvektoren entgegengesetzt, daher heißen sie **kontra**variant. Vektoren, die in gleicher Weise wechseln, heißen **ko**variant und ihre Indizes werden unten als Subskripte notiert.

15 Das Minuszeichen ist notwendig, damit die Raumkomponenten für $v \ll c$ mit der nichtrelativistischen Definition übereinstimmen.

Schreibt man die Lorentztransformation $\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$ als

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma\left(x^0 - \frac{v}{c^2}x^1\right) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - v x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x'^0 &= f^0(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ x'^1 &= f^1(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ x'^2 &= f^2(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ x'^3 &= f^3(x^0, x^1, x^2, x^3) \end{aligned}$$

oder kurz $x'^\mu = f^\mu(x^\nu)$, so sind die Differentiale

nach der Leibnizschen Kettenregel mehrerer Variablen:

$$dx'^0 = df^0 = \frac{\partial f^0}{\partial x^0}dx^0 + \frac{\partial f^0}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f^0}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f^0}{\partial x^3}dx^3 = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial f^0}{\partial x^\nu}dx^\nu \overset{\text{konkret}}{=} \gamma\, dx^0 - \gamma \frac{v}{c^2}dx^1 + 0 \cdot dx^2 + 0 \cdot dx^3$$

$$dx'^1 = df^1 = \frac{\partial f^1}{\partial x^0}dx^0 + \frac{\partial f^1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f^1}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f^1}{\partial x^3}dx^3 = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial f^1}{\partial x^\nu}dx^\nu \overset{\text{konkret}}{=} -\gamma\, v\, dx^0 + \gamma\, dx^1 + 0 \cdot dx^2 + 0 \cdot dx^3$$

$$dx'^2 = df^2 = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial f^2}{\partial x^\nu}dx^\nu \overset{\text{konkret}}{=} 0 \cdot dx^0 + 0 \cdot dx^1 + 1 \cdot dx^2 + 0 \cdot dx^3 = dx^2$$

$$dx'^3 = df^3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial f^3}{\partial x^\nu}dx^\nu \overset{\text{konkret}}{=} 0 \cdot dx^0 + 0 \cdot dx^1 + 0 \cdot dx^2 + 1 \cdot dx^3 = dx^3$$

oder kurz: $dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$ oder in der Einsteinschen Summenkonvention $dx'^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$.

In der Physik gibt es die bequeme aber unschöne Schreibweise $dx'^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$ [16] oder gar $dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$, wobei $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$ anstatt $x'^\mu = f^\mu(x^\nu)$ notiert, die Funktion also mit der abhängigen Variablen identifiziert wird.

Man sieht mit $dx'^0 = \gamma\, dx^0 - \gamma \frac{v}{c^2}dx^1$ und $dx'^1 = -\gamma\, v\, dx^0 + \gamma\, dx^1$, dass die Differenziale Vierervektoren sind.

Ersetzt man in $dx'^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$ die Vierervektoren dx'^μ, dx^ν durch beliebige Vierervektoren a'^μ, a^ν , so erhält man in der laschen Schreibweise $a'^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}a^\nu$ (7) , eine allgemeine Transformationsregel für Vierervektoren.

16 Diese erste Schreibweise ist noch korrekt, wenn auch für Mathematiker etwas irritierend, da auf dieser Ebene Funktionsnamen keine Variablennamen sind.

Speziell für die Lorentztransformation ergibt das: $a'^0 = \gamma a^0 - \gamma \frac{v}{c^2} a^1$ und $a'^1 = -\gamma v a^0 + \gamma a^1$.

Für eine skalarwertige Funktion φ oder $\bar{x}^\mu$ mit mehreren Variablen $x^0, x^1, \ldots, x^m$ oder kurz x^μ mit den Funktionstermen $\varphi(x^0, \ldots, x^m)$ oder kurz $\varphi(x^\mu)$, wobei die Variablen x^μ Funktionen von $x'^0, \ldots, x'^n$ oder x'^ν sind (Lorentztransformation), gilt die allgemeine

Kettenregel: $\frac{\partial \varphi}{\partial x'^\nu} = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$ bzw. mit der Summenkonvention $\frac{\partial \varphi}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$

oder mit der Abkürzung $\partial'_\nu \varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\nu}$ bzw. $\partial_\mu \varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$: $\partial'_\nu \varphi = \partial_\mu \varphi \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$.

Ersetzt man $\partial'_\nu \varphi$ durch beliebige Vierervektoren a'_ν bzw. $\partial_\mu \varphi$ durch a_μ , erhält man:

$a'_\nu = a_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$ .Vergleicht man diese Transformationsgleichung mit der früheren $a'^\mu = a^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$, so stellt man fest, dass in der früheren die Indizes als Superskripte, in der gerade entwickelten in Subskripten vorkommen. Zudem werden in der früheren die x'^μ nach x^ν abgeleitet, in der jetzigen x^μ nach x'^ν . Man hat also verschiedenes Transformationsverhalten verschiedener Vierervektoren für $n=3$ bzw. $m=3$. Die Komponenten mit Superskripten transformieren **kontravariant**, die mit Subskripten **kovariant**. Der Vierervektor dx^μ (Differential) transformiert kontravariant, ebenso wie die Koordinaten x^μ unter der Lorentztransformation, der Vierervektor $\partial_\mu \varphi$ (Raumzeitgradient) transformiert kovariant.

Relativistische klassische Feldtheorie

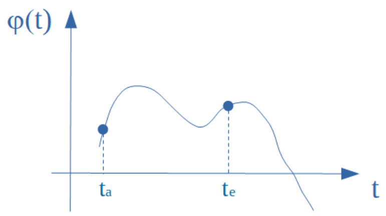
Ein Feld, ob klassisch, relativistisch oder quantentheoretisch, ordnet einer Raumzeitmannigfaltigkeit eine Zahl oder einen Vektor oder einen Tensor zu, es ist also eine Funktion. Ein einfaches Beispiel ist das Höhenprofil, das der vierdimensionalen Raumzeit mit dem Vektor $x^\mu = (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ die Höhe, also einen Skalar h zuordnet.
Oder das Feld, das dem Vektor x^μ die Windgeschwindigkeit beimisst, diesmal einen Vektor v.
Oder das physikalisch interessantere Elektromagnetische Feld, das dem Raumzeitvektor, den Vektor zuordnet, der aus der skalaren elektrischen Feldstärke E und der skalaren magnetischen B besteht.
Im Prinzip kann der Raum auch mehr oder weniger Koordinaten enthalten und ebenso die Zeit. Letzteres kann nur sinnvoll sein, wenn diese nicht als kontinuierlich verstanden wird, es also auch inkommensurable Zeiten gibt, die in spezifischen Bewegungen bestehen. Sind die Zeiten (Bewegungen) zyklisch, dann gibt es für sie eine übergeordnete Haupt-Zeit. Doch hier soll die Zeit nur eindimensional betrachtet werden.

Auch für Felder wird das Wirkungsprinzip (das Prinzip der stationären Wirkung) zugrunde gelegt, aus dem die Gesetze hergeleitet werden. Gesetze sind auf irgendeiner Ebene Konstanzen, sowie das Wirkungsprinzip ja als Integral infinitesimaler Konstanten (stationär!) aufgebaut ist. Gesetze sind Begriffe höherer Ordnung, die alle in Fixierungen bestehen, das Konstante im Wechsel.

Grundlage ist zunächst das Wirkungsprinzip für nichtrelativistische Teilchen, das auf Felder verallgemeinert werden soll[17]. Betrachtet man die Bahn eines Teilchens, so kann man es auch feldtheoretisch formulieren, wenn man nur die Zeitdimension und keine Raumdimension annimmt.

17 Ich folge hier, wie öfters, L. Susskinds Buch: *Special Relativity and Classical Field Theory.*

Der Zeit t ordnet man als Skalar den Ort $\varphi(t)$ zu, an dem (auf der x-Achse) es sich jeweils befindet.



Um die wirkliche Bahn zu bestimmen, die ein Teilchen von $\varphi(t_a)$ nach $\varphi(t_e)$ zurücklegt, wird das Wirkungsprinzip verwendet. Mithilfe einer Lagrangefunktion L ist das Wirkungsintegral $S=\int_{t_a}^{t_e} L\,dt$. Für ein nichtrelativistisches Teilchen ist L die kinetische Energie $\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2$ minus der potenziellen Energie $V(\varphi)$ und damit $S=\int_{t_a}^{t_e}\left(\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2-V(\varphi)\right)dt$. Aus dem Wirkungsprinzip

$\delta S=0$ folgt die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial L}{\partial\varphi}$: $m\ddot{\varphi}=-\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}$, was genau die Newtonsche Bewegungsgleichung $ma=F$ ist.

Nun soll der eindimensionale Raumzeitfall $x^0=t$ auf den „normalen“ Fall $x^\mu=(t,x,y,z)$ verallgemeinert, d.h. die drei Raumkoordinaten wieder berücksichtigt werden, wobei die Feldzuordnung skalar bleibe. Im eindimensionalen Fall konnte das Wirkungsintegral als unendliche Summe infinitesimaler Flächenelemente (Wirkungselemente) $L\,dt$ innerhalb der Strecke der Länge t_e-t_a betrachtet werden. Anstatt der Strecke muss nun der Hyperquader HQ mit dem Hypervolumen $dt\,dx\,dy\,dz$ verwendet werden, innerhalb dessen jedem Punkt der Skalar $\varphi(t,x,y,z)$ derart zugeordnet wird, so dass die Wirkungselemente

$L\left(\varphi(t,x,y,z),\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial t},\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial z}\right)dt\,dx\,dy\,dz$ in ihrer

Summe (in ihrem Integral) minimal (stationär) werden.
Das heißt in vereinfachter Schreibweise, dass das die Variation des Hypervolumenintegral

$\delta\int_{x^\mu=x_a^\mu}^{x_e^\mu} L(\varphi(x^\mu),\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu})\,dx^\mu$ Null wird, woraus die Euler-Lagrange-Gleichungen hergeleitet

werden, die dann das Verhalten des Skalarfeldes bestimmen. Für ein geschlossenes System (in dem also Energie und Impuls erhalten bleiben), hängt die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeitkoordinate und den Raumkoordinaten ab.

Die Euler-Lagrange-Gleichung eines einzelnen Teilchens $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial L}{\partial\varphi}$ oder $\frac{d}{dx^0}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}}=\frac{\partial L}{\partial\varphi}$

wird im mehrdimensionalen Fall *eines* einzelnen Skalarfeldes nun zu: $\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}}=\frac{\partial L}{\partial\varphi}$, das einem wellenartigen Oszillieren von φ in etwa entspricht.

Sind mehrere Felder vorhanden, bspw. φ_1 und φ_2 , so wird die Wirkung von beiden Feldern und ihren Ableitungen $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^{\mu}}$ und $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^{\mu}}$ abhängen und jedes Feld wird eine Euler-Lagrange-Gleichung haben $\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^{\mu}}}=\frac{\partial L}{\partial\varphi_1}$, $\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^{\mu}}}=\frac{\partial L}{\partial\varphi_2}$. Falls nun noch die Felder keine Skalarfelder, sondern Vektorfelder sind, wird jede Vektorkomponente ihre Euler-Lagrange-Gleichung haben.

Bisher waren die Felder i.a. nichtrelativistisch. Die kinetische Energie eines einzelnen nichtrelativistisches Teilchens war in einer Dimension $T=\frac{1}{2}m\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right)^2$, wobei $\varphi(t)=x$. Die skalarwertige Funktion φ hängt im Feld nicht nur von t ab, sondern auch von den Raumkoordinaten, also von t, x, y, z, so dass auch nach den anderen Variablen differenziert werden müsste: $T=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial z}\right)^2\right)$

Da die Feldtheorie relativistisch werden soll, und zwar lorentzinvariant, stören die Pluszeichen. Da die Eigenzeit $c^2\tau^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2$ lorentzinvariant ist , ist zu vermuten, dass die Formel

$$T=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial z}\right)^2\right)$$ und

damit

$$L=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi(t,x,y,z)}{\partial z}\right)^2\right)-V(\varphi)$$

adäquater ist[18]. Die Funktion $V(\varphi)$ heißt das Feldpotenzial und ist analog zur potenziellen Energie von Teilchen. Allerdings stellt sie keine Energie, sondern eine Energiedichte (Energie pro Einheitsvolumen) dar, die für jeden Raumpunkt definiert ist und von dem Feldwert an diesem Punkt abhängt.

Mithilfe dieser Lagrangefunktion kann über die Euler-Lagrange-Gleichungen

18 Dass die partiellen Ableitungen einen Vierervektor bilden und das Skalarprodukt lorentzinvariant ist, wird später gezeigt.

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

die Bewegungsgleichung hergeleitet werden:

1. Für $\mu=0$ und $x^0=t$: $\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{1}{2} m \frac{1}{c^2} \cdot 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{m}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ und $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{m}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$.
2. Für $\mu=1$ und $x^1=x$: $\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{1}{2} m \cdot (-2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -m \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = -m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

3. und 4. analog.

5. rechte Seite: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$

Insgesamt: $\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow m \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$

Vereinfacht man die Gleichung nur auf eine Raumvariable: $\frac{m}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ so spiegelt sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für Felder wider, wenn man zusätzlich m auf 1 setzt. Setzt man den Kraftterm $-\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ auf Null (kräftefreie Bewegung), so hat man damit die Wellengleichung, wie bspw. für elektromagnetische Wellen: $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$. Man sieht das

leicht, indem man den Ansatz für $\varphi(t, x) = F(x \pm ct)$ macht, wobei F eine beliebige Funktion von $x \pm ct$ ist:

$\frac{\partial F(x \pm ct)}{\partial t} = \frac{\partial F(x \pm ct)}{\partial (x \pm ct)} \cdot (\pm c) = (\pm c) f(x \pm ct)$ und andererseits $\frac{\partial F(x \pm ct)}{\partial x} = \frac{\partial F(x \pm ct)}{\partial (x \pm ct)} \cdot 1 = f(x \pm ct)$,

sodass gilt: $\frac{\partial F(x \pm ct)}{\partial t} = (\pm c) \cdot \frac{\partial F(x \pm ct)}{\partial x}$. Nochmals abgeleitet, erhält man

$\frac{\partial c f(x \pm ct)}{\partial t} = c^2 f'(x \pm ct)$ und $\frac{\partial f(x \pm ct)}{\partial t} = f'(x \pm ct)$, sodass gilt:

$\frac{\partial^2 F(x \pm ct)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 F(x \pm ct)}{\partial x^2}$ oder eben $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} = 0$. Jede Funktion der

Gestalt $\varphi(t, x) = F(x \pm ct)$ ist also Lösung der obigen Differenzialgleichung. Was stellen diese Funktionen dar? Zur Zeit t = 0 ist es einfach F(x). Mit fortschreitender Zeit wird sie einfach nach links bzw. nach rechts (Richtung x-Achse) verschoben mit der konstanten Geschwindigkeit c.

Eine konkretere Funktion wäre $\varphi(t,x)=\sin k(x-ct)$, eine Sinusfunktion mit der Wellenzahl k (Anzahl voller Sinusschwingungen innerhalb des Einheitsintervalls $[0,2\pi]$), die sich mit der Geschwindigkeit c nach links bewegt. Funktionen dieser Art können aber auch Wellenpakete oder Pulse darstellen.

Das war die Methode zur Entwicklung von klassischen vorrelativistischen Feldtheorien. Um relativistische (klassische) Feldtheorien zu konstruieren, sollten die Gesetze, d.h. die Euler-Lagrangegleichungen invariant unter Lorentz-Transformationen sein. Hierzu muss das Wirkungsintegral und daher die Lagrangefunktion invariant bleiben.