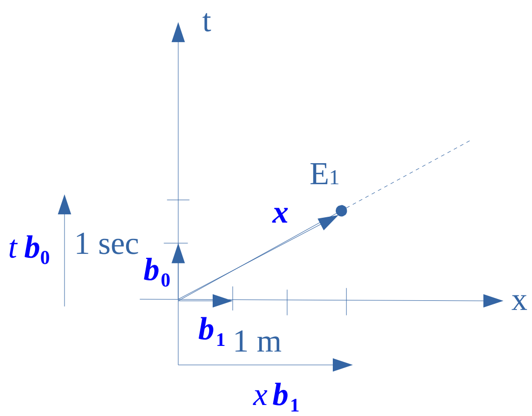
Minkowski-Welt und Relativität

Manfred Hörz

Ein physikalisches Ereignis $E(t,x)$ werde in Zeiteinheiten Sekunde (sec) und in Längenmaß Meter (m) gemessen.

Bsp: Das $E_1(t_1,x_1)=E_1(2{,}3)$ gehe aus dem Ereignis $E_0(0{,}0)$ mit konstanter Geschwindigkeit hervor, die demnach $v=\frac{x}{t}=\frac{3}{2}[\frac{m}{sec}]$ beträgt.

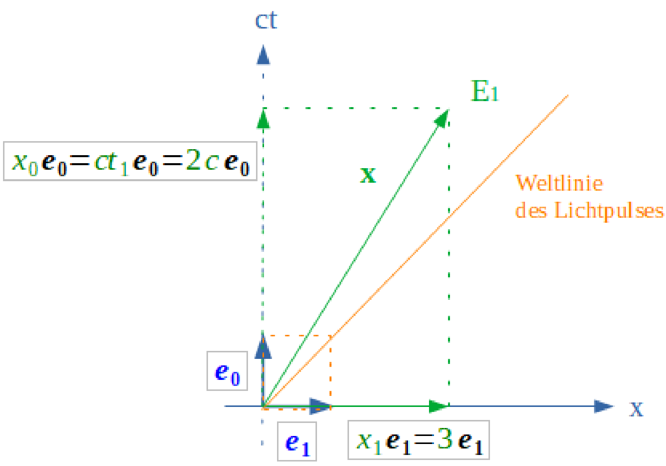


Die übliche Gleichung lautet $x=v\,t=\frac{3}{2}t\ [m]$ oder vektoriell mit den Basisvektoren

$$B=\{\boldsymbol{b_0},\boldsymbol{b_1}\}\ :\ \boldsymbol{x}=t\,\boldsymbol{b_0}+x\,\boldsymbol{b_1}=\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}_B \quad \text{mit} \quad v=\frac{x}{t}\ .$$

Will man beide Basisvektoren in der gleichen Einheit (bspw. Meter) ausdrücken, bietet sich im Rahmen der SRT an, die Zeit als Länge, nämlich als c t zu bestimmen, als die Strecke, die das Licht im Vakuum in einer Sekunde durchläuft, als Lichtsekunde (Ls). Setzt man die Lichtgeschwindigkeit gerundet als $c=3\cdot 10^8\ [\frac{m}{sec}]$ an, so wäre $ct=3\cdot 10^8\ [m]=1\ [Ls]$.

Dieses System nennt man die **Minkowski-Welt** M^2 :



Dann ist mit $E=\{\mathbf{e_0},\mathbf{e_1}\}$ der dem Ereignis E_1 zugeordnete Vektor $\boldsymbol{x}=2c\,\mathbf{e_0}+3\,\mathbf{e_1}=\begin{pmatrix}2c\\3\end{pmatrix}_E$,
der **Minkowski-Vektor** oder **Welt-Vektor** zum Ereignis E_1 .

Die Einheiten der Basisvektoren $\mathbf{e_0},\mathbf{e_1}$ sind beidesmal in Meter [m].

Wie stellt sich dann die übliche Gleichung $x=v\,t=\frac{3}{2}t$ in diesem System vektoriell dar?

Die Steigung von **x** ist das dimensionslose Verhältnis $m=\frac{3}{2c}$, da Meter durch Meter dividiert werden. Mit $v=\frac{3}{2}\ [\frac{m}{sec}]$ ergibt sich die Beziehung: $m=\frac{\frac{3}{2}}{c}$ oder $m=\frac{v}{c}=:\beta$ oder

$v=m\,c$ bzw. $v=\beta\,c$. Allgemein: $x=vt=(\beta\,c)t=\beta\,(c\,t)=x_1$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}=x_0\,\mathbf{e_0}+x_1\,\mathbf{e_1}=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}ct\\\beta\,ct\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}1\\\beta\end{pmatrix}_E ct=x_0\begin{pmatrix}1\\\beta\end{pmatrix}_E\ .$$

Wie stellt sich der Geschwindigkeitsvektor im relativistischen System dar?

$$\boldsymbol{v}=\frac{\partial\,\boldsymbol{x}}{\partial\,ct}=\frac{\partial}{\partial\,ct}\begin{pmatrix}ct\\\beta\,ct\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\beta\end{pmatrix}$$, also $\boldsymbol{x}=ct\,\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}ct\\\beta\,ct\end{pmatrix}$. $x_0=ct\,;\ \ x_1=\beta\,ct=vt$

$\frac{x_1}{x_0}=\frac{v}{c}$ ist die Steigung m, also die Geschwindigkeit v relativ zu c.

Bewegt sich ein Objekt vom Ursprung aus mit konstanter Geschwindigkeit v bzw. β , so nennt man die Gerade $\boldsymbol{x}=ct\,\boldsymbol{v}\,;\ \ t\geq 0$ die **Weltlinie** des Objekts.

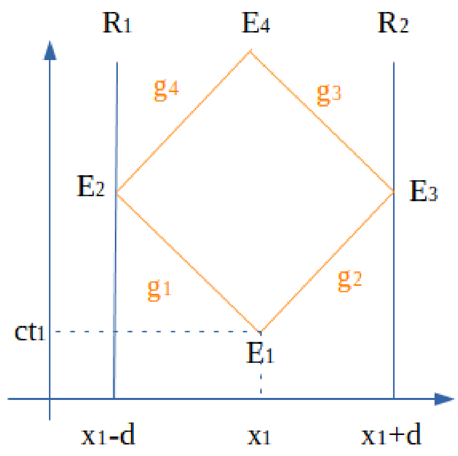
Bewegt sich ein Objekt mit Lichtgeschwindigkeit vom Ursprung aus (ein Photon oder ein Lichtpuls), ist also v = c, so ist $m=\beta=1$ und $x_1=x_0$ oder $\boldsymbol{x}=ct\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_E$; $t\geq 0$ die Weltlinie des Photons die erste Winkelhalbierende.

1. Gleichzeitige Ereignisse

Im blauen System werde ein Lichtblitz im Ereignis $E_1(t_1,x_1)$ ausgesandt, der nach beiden Seiten der x-Achse sich ausbreitet. An den Stellen x_1+d und x_1-d werden zwei Reflektoren fest aufgestellt, die die beiden Lichtpulse zurücksenden. Wann treffen diese wieder am Ort x_1 ein?

Das ist ganz einfach durch elementare Überlegung herauszufinden. Das Licht braucht um die Strecke d zurückzulegen die Zeit $t=\frac{d}{c}$ bis sie am Reflektor $R_2(ct,x_1+d)$ ankommt und nochmals die gleich Zeit um wieder an der Stelle x_1 einzutreffen. Auf der Zeitachse ist dieses Ereignis die Koordinate $c(2\frac{d}{c})+ct_1=2d+ct_1$. Das Gleiche gilt für den nach links ausgehenden Lichtpuls. Also treffen sie zur gleichen Zeit ct_1+2d wieder zusammen.

Will man es komplizierter, so stellt man die Gleichungen der Weltlinien auf und berechnet die Zeitparameter.



$E_1(ct_1,x_1)$ als Ereignis (gemessen wird $E_1(t_1,x_1)$), $g_1:\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}ct_1\\x_1\end{pmatrix}+ct\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$g_2:\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}ct_1\\x_1\end{pmatrix}+ct\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad R_1:\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}ct\\x_1-d\end{pmatrix}$ $\quad R_2:\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}ct\\x_1+d\end{pmatrix}$

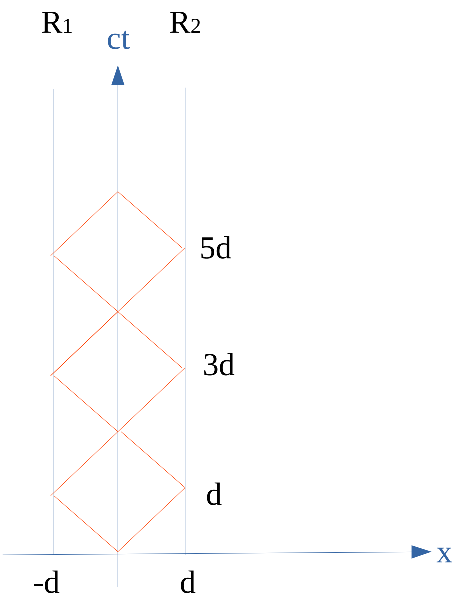
$E_2=R_1\cap g_1:\begin{pmatrix}ct\\x_1-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ct_1+c\bar{t}\\x_1-c\bar{t}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\bar{t}=t-t_1\\d=c\bar{t}\end{matrix}\Rightarrow d=c(t-t_1)\Rightarrow t=t_1+\frac{d}{c}\Rightarrow E_2(ct_1+d,x_1-d)$, die gemessene Zeit ist $t_1+\frac{d}{c}$.

$$E_3=R_2\cap g_2:\begin{pmatrix}ct\\x_1+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ct_1+c\bar{t}\\x_1+c\bar{t}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\bar{t}=t-t_1\\d=c\bar{t}\end{matrix}\Rightarrow d=c(t-t_1)\Rightarrow t=t_1+\frac{d}{c}\Rightarrow E_3(ct_1+d,x_1+d)\quad .$$

$$g_3:\mathbf{x}=\begin{pmatrix}ct_1+d\\x_1+d\end{pmatrix}+ct\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\quad g_4:\mathbf{x}=\begin{pmatrix}ct_1+d\\x_1-d\end{pmatrix}+ct\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow E_4=g_3\cap g_4:\begin{pmatrix}ct_1+d-ct\\x_1+d-ct\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ct_1+d+c\bar{t}\\x_1-d+c\bar{t}\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

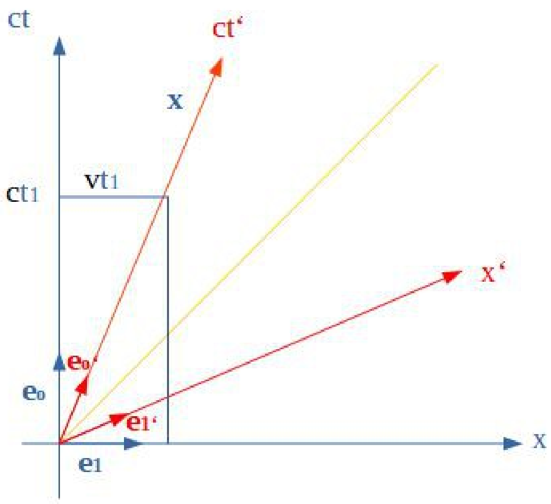
$$\begin{matrix}ct=c\bar{t}\\d-ct=c\bar{t}-d\end{matrix}\Rightarrow d-c\bar{t}=c\bar{t}-d\Rightarrow\bar{t}=\frac{d}{c}\Rightarrow E_4(ct_1+2d,x_1)\quad .$$

Das erlaubt eine Zeitzählung durch Lichtuhren, da die Lichtstrahlen auch nach dem Zusammentreffen weiter laufen bis sie wieder an den Reflektoren reflektiert werden, u.s.f..



An den Reflektoren sind Zähler angebracht, die das Eintreffen des Lichtpulses registrieren und hochzählen: die erste Registrierung notiert 1 (d), die zweite 3 (d), die dritte 5 (d) usw. Im Ursprung hat man somit die Zeiten 0, 2 (d), 4(d), …. Man kann die Zeitzählung verfeinern, in dem der Abstand der Reflektoren d verkleinert wird. Die Zeitzählung kann man auch einem anderen Inertialsystem senden, indem man an den entsprechenden Messstellen (Ursprung oder Reflektoren) wieder Lichtblitze, die sich kugelförmig im Raum ausbreiten, ausschickt.
Damit lässt sich auch die Längenmessung auf der x-Achse präzisieren.

Gibt es ein zweites Inertialsystem (rot) mit der x‘-Achse und der ct‘-Achse, das sich gegenüber dem ersten (blauen) mit der Geschwindigkeit v nach den zunehmenden Längenwerten (nach rechts) des ersten Systems bewegt, und ist der Beobachter des roten Systems an der Stelle x‘ = 0, so ist seine Weltlinie vom blauen System aus gesehen eine Gerade, die zwischen der ct-Achse und der Weltlinie des Lichtpulses liegt, der vom Ursprung ausgeht, vorausgesetzt, dass zur Zeit t = t‘ = 0 beide Ursprünge identisch sind: $x = x' = 0,\ t = t' = 0$; die Lichtuhren werden beide auf Null gesetzt, wenn sich die Systeme begegnen: $x = x' = 0$.



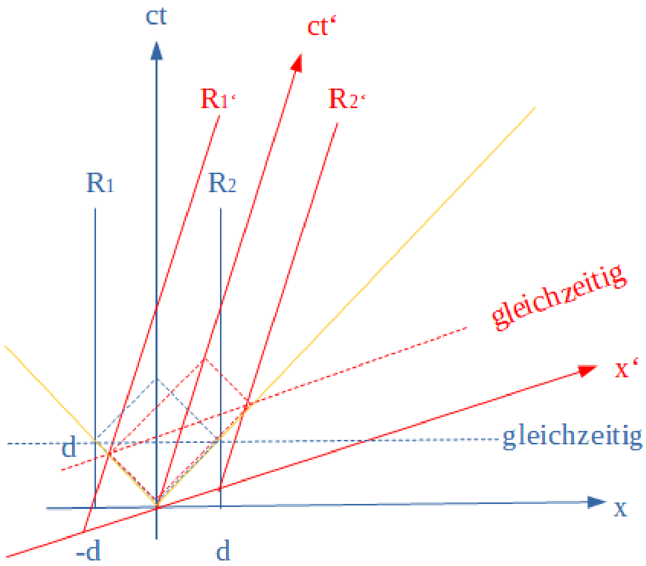
Zur Zeit t_1 hat der rote Beobachter den Weg vt_1 zurückgelegt, so dass seine Weltlinie bzgl. des blauen Systems ist $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c\,t_1 \\ v\,t_1 \end{pmatrix} t \overset{t_1=1}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} c\,t$ mit der Steigung β , bzgl. seines eigenen Systems, da er sich darin nicht bewegt, aber seine Zeitachse ct' mit $x' = 0$.

Da die Lichtgeschwindigkeit bei ihm aber die gleiche ist wie im blauen System, muss seine Weltlinie des Lichtstrahls auch die Winkelhalbierende sein bzgl. seiner Zeitachse und seiner Raumachse, d.h. seine Raumachse ist Spiegelung an der Weltlinie des Lichtstrahls seiner Zeitachse, vorausgesetzt, dass seine Basisvektoren $\boldsymbol{e_0}', \boldsymbol{e_1}'$ normiert sind.

Auch das rote System verfüge über eine Lichtuhr, deren Reflektoren bei Begegnung den gleichen Abstand d vom Ursprung hatten; diese Uhren sind also synchronisiert.

Für das rote System sind die Weltlinien seiner Reflektoren R_1' und R_2' im Abstand d von seinem Ursprung Parallelen zu seiner Zeitachse:

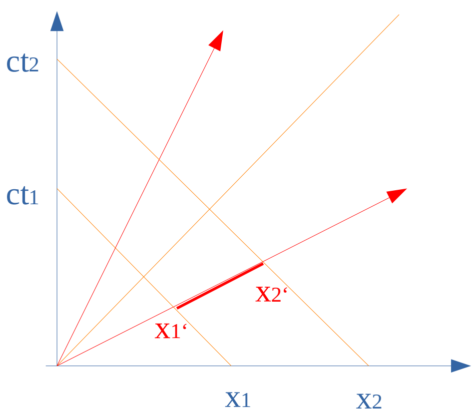
Man sieht, dass die Gleichzeitigkeit im blauen System nicht mit der Gleichzeitigkeit im roten System übereinstimmt. Ebenfalls wird anschaulich, dass die Zeitmessungen nicht mehr übereinstimmen. Ist eine Zeiteinheit 2d im blauen System vergangen, so ist natürlich im roten System für es selbst auch die Zeiteinheit 2d vergangen, das blaue misst sie aber als größer, d.h. für das blaue System geht die rote Zeiteinheit langsamer vorbei, sie braucht mehr blaue Zeit.

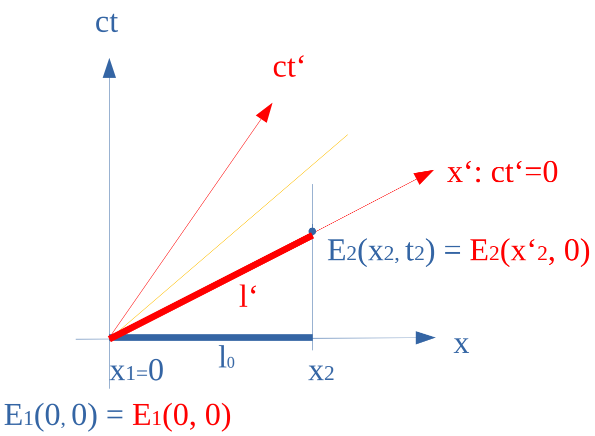


Wie kann man Längen mit Hilfe von Licht messen? Seien im blauen System zwei Örter x_1 und x_2, die im gleichen Moment je einen Lichtblitz aussenden, die bei x = 0 zur Zeit t_1 bzw. t_2 ankommen. Da $x_1 = ct_1$ und $x_2 = ct_2$ kann der Beobachter im blauen System, der sich im Ursprung befindet, aus der Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ auf die Entfernung $x_2 - x_1$ der beiden Örter schließen:

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1) \quad .$$

Das kann auch dieser Beobachter für die Distanz d‘, die ein Beobachter im roten System gemessen hat, tun.





$x'_1=0; t'_1=0 \quad l_0=x_2-x_1 \quad l'=x'_2-x'_1$.

Misst das rote System, das sich mit der Geschwindigkeit v bzgl. des blauen Systems nach rechts bewegt, die Länge des Stabes, müssen die Messungen dort gleichzeitig gemessen werden, d.h. $t'_2=t'_1=0$.

Die Ereignisse E_1 und E_2 sind im roten System gleichzeitig, im blauen nicht: $t_2>0$.

Es gilt die Lorentztransformation:

$x'_2=\gamma(x_2-vt_2) \quad t'_2=\gamma\left(t_2-v\frac{x_2}{c^2}\right)$ und da $t'_2=0$ ist $t_2=\frac{v}{c^2}x_2$

also ist $x'_2=\gamma(x_2-\frac{v^2}{c^2}x_2)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1-\frac{v^2}{c^2})x_2=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}x_2=\frac{1}{\gamma}x_2$

$$l'=x'_2-x'_1=x'_2=\frac{1}{\gamma}x_2=\frac{1}{\gamma}(x_2-x_1)=\frac{1}{\gamma}l_0 \Rightarrow l'=\frac{1}{\gamma}l_0 \quad .$$

Beachte, dass die rote dicke Länge kürzer! Ist als die blaue dicke, obwohl es um Diagramm anders aussieht! Man kann also im Minkowski-Diagramm keine direkten geometrischen Schlussfolgerungen ziehen.