

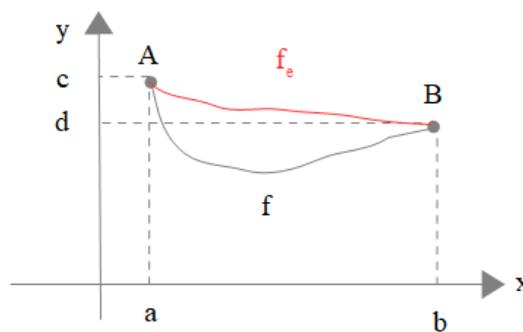
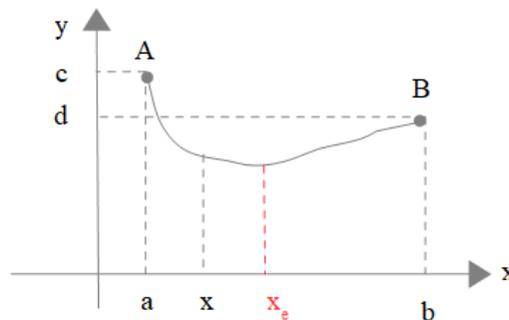
# Herleitungen der Euler-Lagrange-Gleichung

Manfred Hörz

## 1. ohne neue Hilfsmittel (Euler):

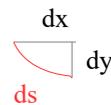
### Beispiel: Brachystochrone

Im Gegensatz zu den klassischen Extremwertproblemen (1. Grafik), bei denen bei vorgegebener Funktion  $f$  diejenigen Argumente  $x$  gesucht werden, bei denen die Funktion  $f$  im Innern eines Intervalls  $[a, b]$  stationär wird, handelt es sich nun um Probleme, bei denen nicht ein solches  $x$  gesucht wird, sondern eine *Funktion*, die ein bestimmtes Integral mit Randbedingungen stationär (i. a. extremal) werden lässt (2. Grafik).



Im zweiten Bild ist eine differenzierbare Funktion  $f_e$  gesucht, die für eine freie Punktmasse der schnellste Weg von A nach B ist unter Voraussetzung der Gravitation.

Ein infinitesimales Längsstück des Graphen ist  $ds \approx \sqrt{dx^2 + dy^2}$



Die Länge  $l$  des Graphen ist demnach  $l = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$

Die Zeit, die dabei benötigt wird ist über den Energieerhaltungssatz  $E = T + V = \text{const}$  berechenbar: Im Punkt A gilt:  $V = -mg(c-d)$  und  $T = 0$ , also ist  $-mg(c-d) = T + V$

Für  $a \leq x \leq b$  gilt  $V(x) + T(x) = -mg(c-d) = -mgy(x) + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$  mit  $y = y(x) = f(x)$

$$\text{oder } -mg(c-d) = -mgy(x) + \frac{m}{2} \left( \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} \right) \Rightarrow -g(c-d) = -gy(x) + \frac{1}{2} \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} \Rightarrow$$

$$2g(y+d-c) = \frac{dx^2(1 + \frac{dy^2}{dx^2})}{dt^2} \Rightarrow dt = dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y+d-c)}} \Rightarrow t = \int_0^{t_e} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y+d-c}} dx$$

Das Integral  $I(y, y') = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y+d-c}} dx$  mit dem Integranden  $\phi(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y+d-c}}$  muss nun

minimiert werden. Gesucht ist also die Funktion  $f_e$  bzw.  $\phi(f_e, f'_e)$ , sodass das Integral

$$I(y_e, y'_e) = I(f_e, f'_e) \text{ minimal bzw. stationär in } f_e \text{ wird.}$$

Bemerkung:  $y_e$  tritt hier nicht als abhängige Variable, sondern als Funktion  $f_e$  auf.

Zunächst zum klassischen Bild: Vermutet man an der Stelle  $x_e$  eine extremale Stelle, so darf eine *infinitesimale* Verschiebung bei  $x_e$ :  $x_e \pm dx$  für die Funktionswerte keine Veränderung bringen:  $df = f(x_e \pm dx) - f(x_e) = 0$  (es muss dort eine waagrechte Tangente vorliegen).

Zum unteren Bild: Die Überlegung ist, kann ich das kompliziertere Problem mit den klassischen Mitteln behandeln? Dazu könnte man eine beliebige Funktion  $f(x)$  mit den gegebenen Bedingungen mittels Fourier entwickeln. Dazu betrachtet man die Funktion  $f$  als periodisch zur Periode  $b-a$ . Die sin- und cos-Anteile der Fourierreihe müssen dann auch entsprechend gestreckt und verschoben werden:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(z) + a_2 \cos(2z) + \dots + a_n \cos(nz) + b_1 \sin(z) + b_2 \sin(2z) + \dots + b_n \sin(nz)$$

mit  $z = \frac{2\pi}{b-a}(x-a)$  und mit eindeutigen Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \text{ und } b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \text{ Wählt man } n \text{ hinreichend groß, so}$$

wird die Approximation beliebig gut.

Die Funktion  $f$  lässt sich nun durch ein  $2n+1$ -Tupel  $(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$  darstellen. Diesem Tupel ordnet man nun das obige Integral als Funktionswert zu. Graphisch hätte man im  $\mathbb{R}^{2n+2}$  jedem Argument, Punkt  $(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ , also einer Funktion  $f$  einen Wert, also das Integral  $I(f)$  zu geordnet, und der Graph dieser Zuordnung wäre eine Hyperfläche im  $\mathbb{R}^{2n+2}$ .

Wir suchen also dasjenige Tupel  $(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$  für das die Hyperfläche ein Minimum hat.

Geht man von der Hyperfläche im  $\mathbb{R}^2$ , der Graphenlinie, also dem oberen Bild in höhere Dimensionen, so lässt sich das Problem ganz klassisch behandeln: um eine einheitliche Bezeichnung für die Variablen zu erhalten sei  $\alpha_0 = a_0, \dots, \alpha_{2n} = b_n$ , dann ist

$$dI(f) = dI(a_0, \dots, b_n) = dI(\alpha_0, \dots, \alpha_{2n})$$

Damit ein stationärer Punkt vorhanden ist, muss gelten  $dI = 0$ .

Zurück zum Brachystochronen - Beispiel:

$$\text{Unser Integral } I(y) = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y+d-c}} dx \text{ oder } I(y) = \int_a^b \phi(y, y') dx \text{ können wir}$$

näherungsweise als endliche Summe betrachten, indem wir das Intervall  $[a, b]$  zerlegen in

Teilintervalle  $[x_i, x_{i+1}]$   $i=0, \dots, m-1$  und  $a=x_0, b=x_m$ ,  $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ,  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

und die entsprechenden Ordinaten  $y_i = f(x_i)$ , also  $c = y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m = d$ . Weiter werde

$$f'(x_i) \text{ ersetzt (approximiert): } y_i' \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Das Integral ist der Grenzwert der approximierenden Summen

$$S = S(y_1, \dots, y_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} \phi(y_i, y_i') \Delta x_i. \text{ Hierfür gilt analog:}$$

$$dS = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial S}{\partial y_{m-1}} dy_{m-1} = 0 \text{ oder, da die } dy_i \text{ unabhängig sind,}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = 0 \quad (i=1, \dots, m-1). \text{ Zu beachten ist nun, dass in zwei Summanden } y_i \text{ vorkommt:}$$

$$\text{in } \phi(y_{i-1}, y_{i-1}')(x_i - x_{i-1}) = \phi(y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}})(x_i - x_{i-1}) \text{ und in}$$

$$\phi(y_i, y_i')(x_{i+1} - x_i) = \phi(y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i})(x_{i+1} - x_i), \text{ die andern ergeben in dieser Ableitung Null.}$$

$$\frac{\partial \phi(y_{i-1}, y_{i-1}')(x_i - x_{i-1})}{\partial y_i} = \frac{\partial \phi(y_{i-1}, y_{i-1}')(x_i - x_{i-1})}{\partial y_{i-1}'} \cdot \frac{\partial y_{i-1}'}{\partial y_i} = \frac{\partial \phi}{\partial y_{i-1}'} \cdot \frac{1}{x_i - x_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\partial \phi}{\partial y_{i-1}'}$$

Und 
$$\frac{\partial \phi(y_i, y_i')(x_{i+1}-x_i)}{\partial y_i} = \frac{\partial \phi(y_i, y_i')}{\partial y_i} \cdot (x_{i+1}-x_i) + \frac{\partial \phi(y_i, y_i')(x_{i+1}-x_i)}{\partial y_i'} \cdot \frac{\partial y_i'}{\partial y_i} \cdot (x_{i+1}-x_i) =$$

$$= \frac{\partial \phi(y_i, y_i')}{\partial y_i} \cdot (x_{i+1}-x_i) + \frac{\partial \phi(y_i, y_i')}{\partial y_i'} \cdot \frac{-1}{x_{i+1}-x_i} \cdot (x_{i+1}-x_i) = \dots, \text{ also insgesamt}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = \frac{\partial \phi(y_{i-1})}{\partial y_{i-1}'} + \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x_{i+1}-x_i) - \frac{\partial \phi(y_i)}{\partial y_i'} \Rightarrow \frac{\partial S}{\Delta x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \frac{\left( \frac{\partial \phi(y_i)}{\partial y_i'} - \frac{\partial \phi(y_{i-1})}{\partial y_{i-1}'} \right)}{\Delta x_i}$$

Da 
$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \frac{\left( \frac{\partial \phi(y_i)}{\partial y_i'} - \frac{\partial \phi(y_{i-1})}{\partial y_{i-1}'} \right)}{\Delta x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \frac{\Delta \frac{\partial \phi}{\partial y_i'}}{\Delta x_i} = 0$$
 . Für  $\Delta x_i \rightarrow 0$  gilt dann in der

Regel 
$$\frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y_i'} \right) = 0$$
 für alle  $(i=1, \dots, m-1)$  . Da für hinreichend großes  $m$  die  $x_i$

und entsprechend die  $y_i$  jedem Punkt des Intervalls  $[a, b]$  beliebig nahe kommen, gilt die

Differenzialgleichung 
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) = 0$$
 im ganzen Intervall  $[a, b]$  .

Das ist die konventionell hergeleitete Gleichung von Euler.

Sie hat allerdings einen Nachteil. Der doppelte Grenzwertprozess muss nicht immer gültig sein.

## 2. Herleitung mit Variationsrechnung (Lagrange)

Zunächst soll das Fundamentallemma der Variationsrechnung angegeben werden, das von Lagrange stillschweigend vorausgesetzt wurde.

**Def:** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  eine offene Menge. Und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

$Tr(f) = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}}$  heißt der Träger (Support) von  $f$ , also die abgeschlossene Hülle der verschwindenden Funktionsstellen.

**Beispiel 1:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x$  .  $f$  wird nur bei 0 Null, an alle anderen Stellen ist  $f$  nicht Null. Die abgeschlossene Hülle ist dann wieder  $\mathbb{R}$  , also  $Tr(f) = \mathbb{R}$

**Beispiel 2:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} & a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  hat als Träger die kompakte Menge  $[a, b]$  . Man

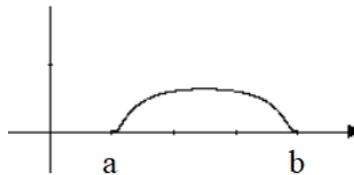
nennt ihn daher **kompakten Träger**.

**Def:** Eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **glatt**, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist. Man schreibt das auch als  $f \in C^\infty$ .

**Beispiel:** Jede Polynomfunktion ist glatt. Auch die obige Funktion aus Beispiel 2 ist glatt, denn bezeichnet man mit  $p(x) = (x-a)(x-b)$ , so ist die Ableitung von  $f(x) = e^{\frac{1}{p}}$ :

$$f'(x) = -\frac{p'}{p^2} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = 0^- \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} p(x) = 0^- \quad \lim_{x \rightarrow a^+} p'(x) = a-b < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} p'(x) = b-a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0^+ \quad \text{Also} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = 0^-$$



Die n-te Ableitung ist  $f^{(n)} = \frac{q(x)}{p^{2^n}} e^{\frac{1}{p}}$  wobei  $q(x)$  ein Polynom ist mit  $\lim_{x \rightarrow a^+} q(x) \neq 0$  und  $\lim_{x \rightarrow b^-} q(x) \neq 0$  also  $\lim_{x \rightarrow a^+} f^{(n)} = 0$  jeweils für  $x \rightarrow a^+$  und  $x \rightarrow b^-$ .

Nachweis über vollst. Induktion.

**Def:** Eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die glatt ist und einen kompakten Träger hat, heißt **Testfunktion**.

Die Funktionen aus Beispiel 1 und 2 sind Testfunktionen.

**Fundamentallemma der Variationsrechnung (Heine, du Bois-Reymond):**

Sei  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und gelte für alle Testfunktionen  $h: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0 \quad , \text{ dann ist die Funktion f die Nullfunktion.}$$

**Beweis** indirekt: Sei f nicht die Nullfunktion, dann gibt es eine Stelle  $\xi \in ]a, b[$  für die f nicht Null ist. Sei nun  $f(\xi) > 0$  (für  $f(\xi) < 0$  geht der Beweis ganz analog). Da f stetig, gibt es eine Umgebung  $U(\xi) = ]c, d[ = ]\xi - \epsilon, \xi + \epsilon[ \subseteq ]a, b[$  mit  $f(x) > k > 0$  für alle  $x \in U(\xi)$ . Es muss nun gezeigt werden, dass es eine Funktion h gibt mit den oben erwähnten Eigenschaften, sodass

$$\int_a^b f(x)h(x)dx \neq 0 \quad . \quad h(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-c)(x-d)}} & x \in U(\xi) \\ 0 & x \in ]a, b[ \setminus U(\xi) \end{cases} .$$

Nach obiger Bemerkung ist h eine Testfunktion in  $]a, b[$ . Es gilt

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = \int_a^c f(x)h(x)dx + \int_c^d f(x)h(x)dx + \int_d^b f(x)h(x)dx = 0 + \int_c^d f(x)h(x)dx + 0 >$$

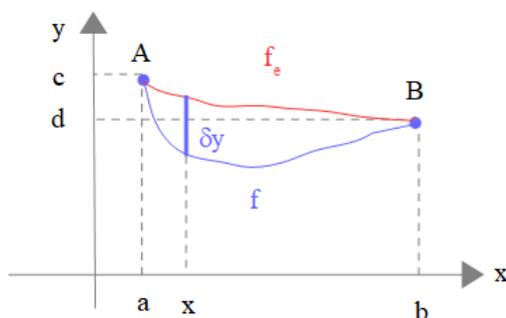
$> k \int_c^d h(x)dx > 0$  da  $k > 0$   $h$  in der Umgebung positiv ist.

Ich kehre nun zurück zu dem Funktional im Beispiel der Brachystochrone. Es war das Integral

$$I(y) = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y+d-c}} dx \quad \text{zu minimieren durch geeignete Wahl der Funktion } y=f(x) .$$

Dies Integral nennt man auch **Funktional**, das jeder Funktion  $f$  mit  $y=f(x)$  eine Zahl  $I(y)$  zuordnet. Der Integrand ist eine Funktion, die aus der Funktion  $f$ , ihrer Ableitung und anderen Konstanten aufgebaut ist und eventuell noch mit der unabhängigen Variablen  $x$ . Sie werde allgemein mit  $\phi(f, f', x) = \phi(y, y', x)$  bezeichnet. Es liegt also das Integral, Funktional

$$\int_a^b \phi(y, y', x) dx \quad \text{vor, dessen Wert minimiert oder allgemeiner stationär werden soll.}$$



Wenn es eine Funktion gibt, die das leistet, so soll sie wieder  $f_e$  heißen. Die Funktion  $f_e$  wird nun variiert, d.h. eine andere stetige Funktion  $f$  gewählt, die **für jeden festen x-Wert** den y-Wert von  $f_e$  infinitesimal mit  $\delta y$  variiert. Dabei sollen die Randwerte jedoch unverändert bleiben:

$$f(a) = f_e(a) \quad \text{und} \quad f(b) = f_e(b) . \quad \text{Für die übrigen x-Werte gilt also jeweils}$$

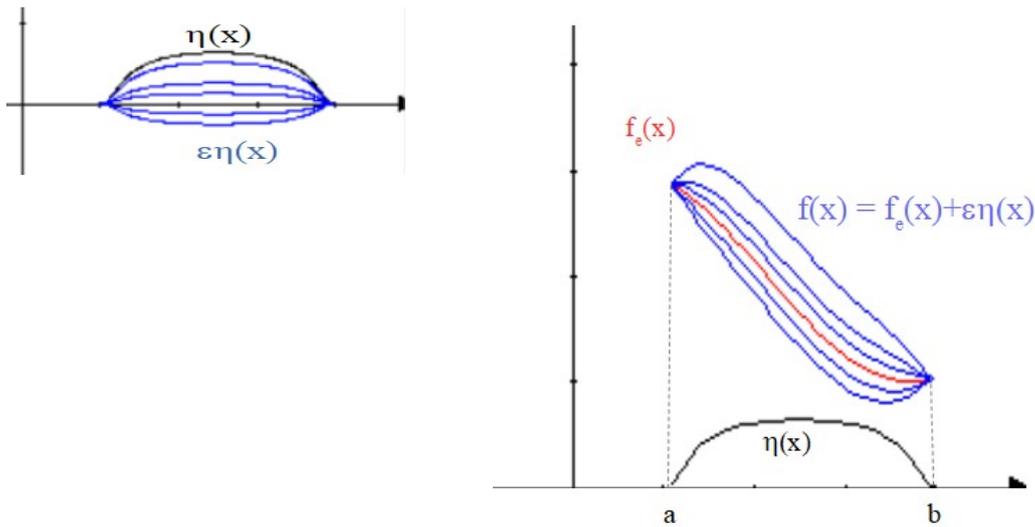
$$f(x) = f_e(x) + \delta y(x) .$$

Damit diese (unendlich vielen) Variationen der y-Werte kohärent geschehen, ist es günstig von einer beliebigen glatten Funktion  $\eta(x)$  auszugehen, die in  $a$  und  $b$  Nullstellen besitzt und die durch die berühmte Größe  $\epsilon$  die Kohärenz für alle  $\delta y(x)$  erreicht:  $f(x) = f_e(x) + \epsilon \eta(x)$  , also ist

$$\delta y(x) = \epsilon \eta(x) . \quad \text{Wegen der Randbedingung } \eta(a) = \eta(b) = 0 \quad \text{ist auch garantiert, dass}$$

$$f(a) = f_e(a) \quad \text{und} \quad f(b) = f_e(b) \quad \text{gilt.}$$

Je geringer  $\epsilon$ , desto kleiner die Differenz, **die Variation von  $f_\epsilon$** . Sie ist also eine gänzlich neue Funktion, die Funktion  $\epsilon \eta(x)$ :



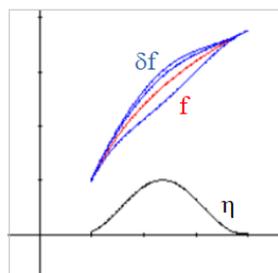
Die Ableitung der Variation von  $f_\epsilon$  ist:  $\frac{d}{dx} \delta f_\epsilon(x) = \frac{d}{dx} \epsilon \eta(x) = \epsilon \frac{d}{dx} \eta(x) = \epsilon \eta'(x)$

Man muss aber noch unterscheiden zwischen der Variation einer Funktion und der Variation eines Funktionals.

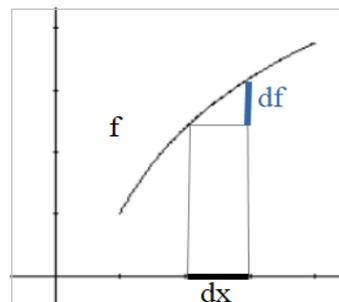
Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$  ordnet Zahlen andere Zahlen zu, ein Funktional  $F$  ist von höherer Stufe, es ordnet Funktionen Zahlen zu:  $F: V \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto F(f)$ , wobei  $V$  ein Funktionenraum ist. So ist bspw. die Lagrangefunktion eher ein Funktional oder das Wirkungsintegral ist ein Funktional.

**Def:** Unter der **Variation einer Funktion  $f$**  versteht man also eine *neue* Funktion  $\delta f$ , deren Funktionswerte  $\delta f(x_0)$  an *jeder* Stelle  $x_0$  kohärent infinitesimal von  $f(x_0)$  abweicht und an deren Randpunkte identisch ist mit der Funktion  $f$  ist, d.h. wenn es eine Testfunktion  $\eta$  gibt, so dass sich die Differenz darstellen lässt als  $\delta f(x_0) - f(x_0) = \epsilon \eta(x_0)$ .

Die Kohärenz und die Randbedingung werden durch die Testfunktion  $\eta$  erreicht. Die infinitesimale Abweichung garantiert das  $\epsilon$ .



$\delta f$ s für verschiedene  $\epsilon$   
aber nur einem  $\eta$



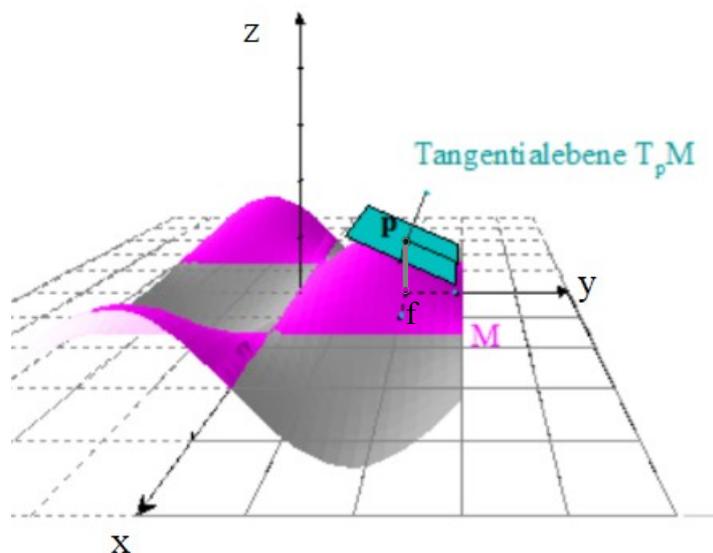
$df$  Differenzial von  $f$

Der Zusammenhang der Variation einer Funktion (links) zum Differenzial einer Funktion (rechts)

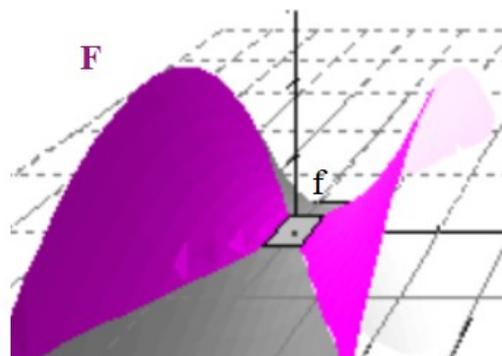
ist sehr lose und verschiedenartig. Beim Differenzial wandert man infinitesimal auf der gleichen Funktion, bei der Variation wird die gesamte Funktion durch eine neue infinitesimal von ihr verschiedene ersetzt, variiert.

Aber die Variation eines Funktionals ist dem Differenzial einer Funktion viel näher. Wandert man beim Differenzial zunächst in der infinitesimalen Umgebung eines Arguments,  $x$ -Wertes, und betrachtet dazu die Differenz der Funktionswerte (eben das Differenzial der Funktion), so wandert man bei der Variation eines Funktionals in einer infinitesimalen Umgebung einer Funktion und betrachtet die Differenz der Funktionswerte vom Funktional (eben der Variation des Funktionals).

Nur sind die Argumente eines Funktionals, die Funktionen, nicht linear angeordnet wie die Argumente einer Funktion, der  $x$ -Werte. Wenn man versucht, das ungefähr anschaulich darzustellen, dann bietet sich an, Funktionen als zweidimensionale Vektoren und diese bzgl. eines Basissystems als Punkte im zweidimensionalen Raum zu veranschaulichen. Jedem Punkt  $f=(x,y)$  (jeder Funktion) wird dann ein Zahlenwert  $z$  (der Wert des Funktionals) zugeordnet, was einen Punkt  $P=(x,y,z)$  im dreidimensionalen Raum ergibt, der auf einer Fläche liegt.



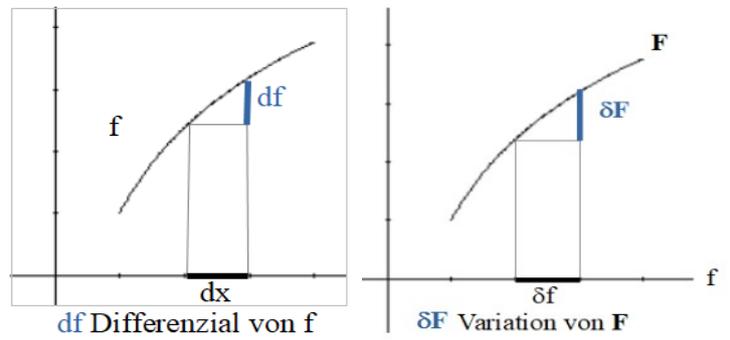
Liegt die Tangentialebene von  $P$  parallel zur  $x,y$ -Ebene, so liegt in  $f$  ein Extrempunkt des Funktionals vor. Hier wäre es fast ein Maximum. Es kann aber auch ein Sattelpunkt sein, wie das untere Bild zeigt:



Die Variationen  $\delta f$  der extremalen Funktion  $f$  wären hier als zweidimensionale Umgebung von  $f$

aufzufassen. Die Variation vom Funktional  $\mathbf{F}$  wären dann  $\mathbf{F}(\delta f) - \mathbf{F}(f)$ .

In noch weiterer (schon eigentlich zu starker) Vereinfachung ordnet man die Funktionen linear an auf der x-Achse. Dadurch wird die Analogie einfacher sichtbar.



**Def:** Unter der **Variation eines Funktionals**  $\mathbf{F}: f \rightarrow \mathbf{F}(f) \in \mathbb{R}$  versteht man die Differenz  $\delta \mathbf{F}$  des Funktionwertes  $\mathbf{F}$  von der Variation  $\delta f$  und dem Funktionswert  $\mathbf{F}$  von  $f$ :

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}(\delta f) - \mathbf{F}(f) = \mathbf{F}(f + \epsilon \eta) - \mathbf{F}(f) .$$

**Def:** Ein Funktional  $\mathbf{F}: V \rightarrow \mathbb{R}, f \rightarrow \mathbf{F}(f)$  hat in einer Funktion  $f_e \in V$  ein Extremum (oder ist in  $f_e$  extremal), wenn für alle  $\eta$  :  $\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}(\delta f_e) - \mathbf{F}(f_e) = \mathbf{F}(f_e + \epsilon \eta) - \mathbf{F}(f_e) = 0$  , wenn also jede Variation von  $f_e$   $\mathbf{F}$  in  $f_e$  stationär lässt:  $\mathbf{F}(f_e + \epsilon \eta) = \mathbf{F}(f_e)$  .

Diese Variation von  $\mathbf{F}$  ist sinnvoll mit dem Differenzial von  $f$  zu vergleichen:

$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}(f + \epsilon \eta) - \mathbf{F}(f)$	$\mathbf{F}$ extremal $\Rightarrow \delta \mathbf{F} = 0$
$df = f(x + dx) - f(x)$	$f$ extremal $\Rightarrow df = 0$

### Euler-Lagrange-Gleichung als notwendiges Kriterium für extremales Funktional:

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\eta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige, aber feste (baf)

Testfunktion mit  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  (mit den anderen geeigneten Voraussetzungen).

Damit das Funktional  $I(f) = \int_a^b \phi(f, f', x) dx$  extremal wird, muss die Euler-Lagrange-

Gleichung  $\frac{\partial \phi}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f'} = 0$  gelten.

**Beweis:** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = f_e(x) + \epsilon \eta(x)$ , eine variierte Funktion von  $f_e$ ,

wobei  $I(f)$  in  $f_e$  die extremal ist.

Das Integral  $I(f) = I(f_e + \epsilon \eta) =: \varphi(\epsilon)$  ist eine Funktion von  $\epsilon$ . Die Variation von I ist

$$\delta I := I(f_e + \epsilon \eta) - I(f_e) = \varphi(\epsilon) - \varphi(0).$$

Entwickelt man nun  $\varphi(\epsilon)$  an der Stelle  $\epsilon_0 = 0$  nach Taylor (Maclaurin) bis zur ersten Ordnung, ergibt das  $\varphi(\epsilon) = \varphi(0) + \varphi'(0)\epsilon$  und also

$$\delta I = \varphi(\epsilon) - \varphi(0) = \varphi'(0)\epsilon = \epsilon \frac{d}{d\epsilon} I(f)|_{\epsilon=0} = \epsilon \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b \phi(f, f', x) dx|_{\epsilon=0} = \epsilon \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b \phi(f_e + \epsilon \eta, f_e' + \epsilon \eta', x) dx|_{\epsilon=0} =$$

(wegen Vertauschbarkeit von Ableitung und Integration)

$$= \epsilon \int_a^b \frac{d}{d\epsilon} \phi(f_e + \epsilon \eta, f_e' + \epsilon \eta', x) dx|_{\epsilon=0} = \epsilon \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial f'} \frac{\partial f'}{\partial \epsilon} dx|_{\epsilon=0} =$$

$$= \epsilon \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial f} \eta + \frac{\partial \phi}{\partial f'} \eta' dx = \delta I. \text{ Da I in } f_e \text{ extremal ist, gilt } \delta I = 0 \text{ und also}$$

$$\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial f} \eta + \frac{\partial \phi}{\partial f'} \eta' dx = 0 \quad (*). \text{ Man verändert den zweiten Teil des Integrals über partielle}$$

Integration, um anstatt  $\eta'$  das nicht abgeleitete  $\eta$  zu erhalten:

$$\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial f'} \eta' dx = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial f'} \eta \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f'} \eta dx, \text{ wobei wegen } \eta(b) = \eta(a) = 0$$

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial f'} \eta \right]_a^b = 0 \text{ nur das letzte Integral } \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f'} \eta dx \text{ übrig bleibt, also gilt:}$$

$$\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial f'} \eta' dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f'} \eta dx. \text{ Einsetzen in (*) ergibt: } \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial f} \eta - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f'} \eta dx = 0 \text{ oder}$$

nach Ausklammern von  $\eta$  im Integral:  $\int_a^b \left( \frac{\partial \phi}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f'} \right) \eta dx = 0$  für alle Testfunktionen

$$\eta, \text{ sodass nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung gilt } \frac{\partial \phi}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f'} = 0.$$

### 3. Herleitung über d'Alemberts Prinzip

Es soll nun die Euler-Lagrange-Gleichung in der Form  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i=1, \dots, n$

unter gewissen Voraussetzungen hergeleitet werden (s.u.) und zwar aus dem **Prinzip von d'Alembert**, das das zweite Axiom von Newton erweitert:

$$\sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k - \dot{\mathbf{p}}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

für ein System aus N Teilchen. Da nach Newton  $\mathbf{F}_k - \dot{\mathbf{p}}_k = 0$  ist das Skalarprodukt mit dem virtuellen Verschiebungsvektor  $\delta \mathbf{r}_k$  natürlich auch Null und die Summe aus lauter Nullen wieder Null.  $\mathbf{F}_k$  ist die Kraft, die auf das k-te Teilchen einwirkt.

Hierdurch wird das Newtonsche zweite Axiom überführt in eine Aussage über (virtuelle) Energie und demnach dem Leibnizschen Ansatz angepasst.

Zunächst soll das Prinzip skalar in kartesischen Koordinaten reformuliert werden mit  $n=3N$  :

$$\sum_{i=1}^n (F_i - \dot{p}_i) \delta x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n F_i \delta x_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i = 0$$

Weiter soll angenommen werden, dass k Zwangsbedingungen vorliegen, so dass sich der Freiheitsgrad auf  $n-k$  reduziert und wir nur  $n-k$  generalisierte Koordinaten brauchen:

Die Transformationsgleichungen sind

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, \dots, q_{n-k}, t) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(q_1, \dots, q_{n-k}, t) \end{aligned}$$

Für  $\delta x_i$  ergibt sich  $\delta x_i = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$  .

Der erste Summand  $\sum_{i=1}^n F_i \delta x_i$  ist gerade die virtuelle Arbeit  $\delta W$  , d.h. die Arbeit bei virtueller Verschiebung:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \delta x_i = \sum_{i=1}^n F_i \left( \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^{n-k} \left( \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$
 . Den Klammerterm im letzten

Ausdruck nennt man die **generalisierte Kraft**  $Q_j = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$  , da die Arbeit (hier  $\delta W$ )

elementar ja als Kraft mal Weg ( hier  $\delta q_j$ ) definiert wurde. Dann wird die virtuelle Arbeit zu

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n-k} Q_j \delta q_j$$
 .

Nun der zweite Summand ist  $\sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$

Da weiter  $\frac{d}{dt} \left( m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \stackrel{PR}{=} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$  und das nach  $m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$  aufgelöst:

$$m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad \text{und}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_j} x_i = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d}{dt} x_i \stackrel{\text{Vertauschbarkeit von } \frac{\partial}{\partial q_j} \text{ mit } \frac{d}{dt}}{=} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{gilt weiter}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_i \sum_j \left( m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{i,j} \left( \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \\ &= \sum_{i,j} \left( \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \end{aligned}$$

Mithilfe der kinetischen Energie T gilt:  $\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_i \left( \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{x}_i^2$  und da

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \dot{x}_i^2 = \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{x}_i \dot{x}_i = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{x}_i + \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{x}_i \dot{x}_i = 2 \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{x}_i \quad \text{und also}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \quad \text{und analog} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{und somit ist der zweite Summand}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i &= \sum_{i,j} \left( \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = \sum_j \left( \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = \\ &= \sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j \end{aligned}$$

Das gesamte Prinzip ist dann:

$$\sum_{i=1}^n (F_i - \dot{p}_i) \delta x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n F_i \delta x_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-k} Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^{n-k} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n-k} \left( Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \quad \text{und da alle } \delta q_j \text{ unabhängig sind, gilt}$$

$$Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n-k$$

Das ist die **Nielsen Form** (Jakob Nielsen) der Euler-Lagrange-Gleichungen, formuliert mithilfe

kinetischer Energie und generalisierten Kräften.

Unter der Bedingung, dass die generalisierten (konservativen) Kräfte  $Q_j$  aus einem Potenzial  $V$  ableitbar sind, d.h. dass  $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$  gilt, wird die Nielsen Form zu  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

und unter der zusätzlichen Bedingung, dass das Potenzial  $V$  unabhängig von den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$  ist, dass also  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$  gilt, wird die Nielsensche Gleichung zu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \text{oder}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad \text{und mit} \quad L = T - V \quad \text{schließlich die Euler-Lagrange-Gleichung:}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad .$$

#### 4. Herleitung über das Prinzip von Hamilton

Der Unterschied zu „2. Herleitung mit Variationsrechnung“ ist letztlich nur der verschiedener Symbole und eines allgemeineren Standpunkts.

Sei ein System von  $N$  Teilchen gegeben, das in  $n=3N$  kartesischen Koordinaten dargestellt werden kann. Und seien wieder  $k$  Zwangsbedingungen gegeben, die die Anzahl unabhängiger Koordinaten auf  $n-k$  unabhängige reduziert. Zu einer festen Zeit heißt diese Menge von unabhängigen Koordinaten der Konfigurationsraum des Systems. Man kann dann das ganze System zu einer festen Zeit als Punkt in diesem Konfigurationsraum ansehen. Den Punkt beschreibt man in generalisierten Koordinaten  $(q_1, \dots, q_{n-k})$ . Lässt man die Zeit wieder beweglich, so ändert der Punkt im Konfigurationsraum seine Stelle kontinuierlich. Ist  $t_1$  die Anfangszeit der Betrachtung und  $t_2$  die Endzeit, so gibt man die Bahn (Spur, Pfad, Kurve, Trajektorie) des Systems im Konfigurationsraum als  $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_{n-k}(t)) \quad t_1 \leq t \leq t_2$  an. Es gibt in diesem Raum unendlich viele mögliche Bahnen, wobei man annimmt, dass das System genau eine durchläuft. Hamilton war der Ansicht, dass die tatsächlich angenommene Bahn dadurch charakterisiert werden

kann, dass sie die Wirkung  $S$  (Aktion), d.h.  $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$  minimiert. Die Wirkung ist  $L$ , also

$$L = T - V \quad \text{Energie, mal Zeit und} \quad L = L(q_1, \dots, q_{n-k}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-k}, t) \quad .$$

Das bedeutet nun bekanntermaßen, dass die Variation des Wirkungsintegrals in Bezug auf die tatsächliche Bahn Null sein muss:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Die notwendige Bedingung hierfür ist wieder das System aus den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j=1, \dots, n-k \quad .$$

Da die Herleitung strukturell identisch ist wie unter 2. nur dass die Namen andere sind, wird darauf hier verzichtet.

**Zusatz:** Es soll noch kurz gezeigt werden, dass die Euler-Lagrange-Gleichung direkt die Newtonsche Gleichung (oder das zweite Newtonsche Axiom)  $F = m a$  ergibt und umgekehrt.

Dazu verwendet man, dass die Ableitung der potenziellen Energiefunktion  $V = V(x)$  nach  $x$  die negative Kraft  $F$  ergibt:  $\frac{\partial V}{\partial x} = -F$  . Diese Gleichung sieht man ganz einfach an folgendem

Beispiel ein: Man hebe einen Körper der Masse  $m$  vom Boden (potenzielle Energie  $V(0) = 0$  )

um den Wert  $x$  an, der dann (im Gravitationsfeld der Erde bei konstant gedachter

Erdbeschleunigung  $g$ ) die potenzielle Energie  $V(x) = -mgx$  besitzt. Die Ableitung nach  $x$  ergibt

dann  $\frac{\partial V}{\partial x} = -mg = -F$  .

Die linke Seite  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$  der Euler-Lagrange-Gleichung  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$  ergibt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial (\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x))}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} m \dot{x} = m \ddot{x}$$

Die rechte Seite  $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial (T - V)}{\partial x} = \frac{\partial (\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x))}{\partial x} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = F$

Damit hat man  $m \ddot{x} = F$  .

Umgekehrt erhält man aus dem zweiten Newtonschen Axiom die Euler-Lagrange-Gleichung, wie man bei der Rechnung direkt sieht.

Hieraus wird auch klar, dass die Lagrangefunktion  $L := T - V$  auch als  $L := V - T$  definiert werden könnte. Das Ergebnis wäre das gleiche, nämlich  $F = m a$  . Dass die Energiefunktion nicht als  $L = T + V$  (was Hamilton dann in anderem Sinn tat) geschrieben werden kann, ist klar, weil diese Summe ja konstant ist (Energieerhaltungssatz) und die Gleichung dann die Form  $0 = 0$  annehmen würde, was zwar nicht falsch, aber wertlos wäre.