Drehmoment, Trägheitsmoment und Drehimpuls

Manfred Hörz

In einem früheren Artikel („Schwerpunkt“) habe ich beispielhaft das Hebelgesetz über Grenzwertbetrachtungen hergeleitet. Hat man einen Stab an seinen Enden mit Gewichten G_1 und G_2 bzw. Massen m_1 und m_2 versehen, der an einem Drehpunkt O aufgehängt ist, der zum einen Ende die Länge l_1 und zum anderen die Länge l_2 hat, so ist er im Gleichgewicht, wenn gilt:
$m_1 \cdot l_1 = m_2 \cdot l_2$ bzw. $G_1 \cdot l_1 = G_2 \cdot l_2$.

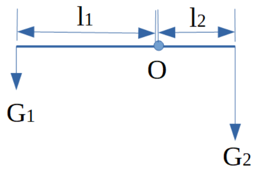


Bild1

Hebt man nun das eine Gewicht G_2 auf (das Gewicht des Stabes soll vernachlässigt werden), so herrscht kein Gleichgewicht mehr und die übrig bleibende Kraft G_1 bewirkt, dass der Stab um O rotiert (bis der Stab parallel zu dieser Kraft zu stehen kommt).
Je größer die Kraft, desto größer die Beschleunigung. Das Gleiche gilt für den Hebelarm l_1, je länger er ist, desto größer die Beschleunigung. Die Größe der anfänglichen Drehbeschleunigung des Stabes hängt also vom Produkt $G_1 \cdot l_1$ ab. Man nennt daher[1] dieses Produkt das **Drehmoment M**, da es die Bewegungskraft (lat. momentum) ist, die zur Drehung führt. Im Falle des Gleichgewichts,

1 Ich habe absichtlich diesen Weg gewählt, da sonst das Drehmoment einfach nur definiert wird ohne hinreichende Begründung. Es ist ein allgemeiner Irrtum, dass man in der Mathematik und Physik beliebig definieren kann, falls diese Wissenschaftsgebiete nicht nur formale Spielereien sein sollen. Eine Definition ist auf der anderen Seite auch nicht zwingend, enthält also wie jede Theoriebildung ein gewisses Maß an Freiheit. Theorien werden nicht nur durch Induktion, sondern rekursiv oft durch Analogien zu anderen guten Theorien entworfen. Theorien übersteigen die Empirie, haben aber eine Bedingung: mit einschlägigen sinnvollen Zusatzannahmen, sollen aus der Theorie die jeweiligen Daten gefolgert werden können. Die Daten sind aber auch nicht unumstößlich. Sie sind ebenfalls zu einem großen Teil selbst Theorien und auf einer mittleren Ebene zu situieren. Als Beispiel möchte ich den Kraftbegriff wählen. Er ist zunächst als Mittel zu gewissen Zwecken in der Lebenswelt entworfen. Möchte ich etwa einen Baum pflanzen, so benötige ich in der Regel Pflanzerdsäcke. Um diese zu heben und zu tragen, muss ich meine Kräfte einschätzen. Habe ich ihn auf eine angemessene Höhe gehoben, so musste ich mehr Kraft anwenden als ich nun zum Tragen brauche.Um das zu erklären, kann man annehmen, dass die Erde eine Kraft nach unten ausübt, die meiner aufzuwendenden entgegengesetzt ist. Ich führe also in meiner Erklärung eine anthropologische Größe ein. Nicht nur ich, sondern die Erde besitzt eine „Eigen“kraft, die meiner entgegenwirkt. Also Analogie. Dass ich beim Heben mehr Kraft brauchte als beim Tragen, erkläre ich dadurch, dass die Veränderung der Geschwindigkeit der Erde (Beschleunigung von Null an) mir einen gewissen Zusatzbetrag an Kraft erforderte. Ursache ist die Notwendigkeit der Beschleunigung für meine benötigte Zusatzkraft. Ursache-Wirkung ist ebenfalls anthropologisch, die logisch oft durch eine Gleichung ersetzt wird, wo man Ursache von Wirkung schlecht unterscheiden kann und man daher eher von Wechselwirkung spricht. Newton definiert (Definition IV) *„Eingedrückte Kraft ist eine Einwirkung auf einen Körper, die auf eine Veränderung seines Zustandes der Ruhe oder der gleichförmig-geradlinigen Bewegung gerichtet ist.“* Also $F \rightarrow a$. Wird nun noch gemessen und die proportionale Abhängigkeit von der Masse m festgestellt, ist man schon fast beim zweiten Axiom $F = m a$, eigentlich der mathematischen Definition $F := m a$. Kann man aber eine mathematische Definition der Kraft aufgrund der anthropologisch sehr vagen Vorstellung einer Kraft einführen? Man möchte also die Kraft verobjektivieren. Federwaage! Kraft als Gewichtskraft, Gravitationskraft. Gibt es überhaupt Kräfte in der Natur? Wenn man sie eliminiert, wie kann man dann den erfolgreichen technischen Zusammenhang des Menschen mit der Natur erklären? Mensch wird zur Maschine oder die Natur teleologisiert. Eine Definition sieht harmlos aus, hat aber weitreichende metaphysische Konsequenzen. Mensch und Natur können nur zusammenhängend verstanden werden. Zur Naturwissenschaft ist eine entsprechende Anthropologie vonnöten. Sokrates.

wie anfangs betrachtet, sind also die beiden Momente gleich: $M_1 = G_1 \cdot l_1 = G_2 \cdot l_2 = M_2$ und wirken in entgegengesetzte (Dreh)Richtung, so dass keine Drehung stattfindet.

Hat sich der Stab relativ zur Horizontalen um den Winkel φ um O gedreht, so wirkt nur noch die zu l_1 orthogonale Kraft $F = G_1 \cdot \cos\varphi$ (siehe nachstehende Skizze):

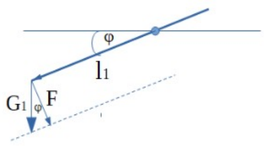


Bild2

So dass das Produkt nun die Gestalt hat $l_1 \cdot F = l_1 G_1 \cos\varphi$. D.h. für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (der Stab zeigt senkrecht nach unten) ist die beschleunigende Kraft Null.

Wie hängt nun die Drehbeschleunigung genauer von dem Drehmoment ab? Dazu zunächst zur Drehbewegung, Drehgeschwindigkeit (Kinematik) und Drehbeschleunigung (Dynamik). Wie üblich führen wir alles Nichtlineare auf Lineares zurück.

Bewegt sich ein Körper (Massenpunkt) auf einem Kreis mit festem Radius r, so hängt die Trajektorie nur von einer Variablen (dem Drehwinkel φ) ab, wenn man die Polarkoordinatendarstellung wählt:

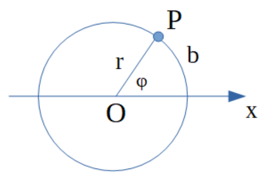


Bild3

Den Weg b, den der Körper zurücklegt hat, wenn der Strahl OP mit der horizontalen Achse (positive x-Achse) den Winkel φ einschließt (er beginne bei $\varphi = 0$), kann man folgendermaßen angeben.

Der Umfang U eines Kreises mit Radius r ist der Grenzwert $2r \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{180°}{n}$, also Annäherung über Umfang regulärer Polygone, wobei $\pi = \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{180°}{n}$ und $U = 2r\pi$ [2] oder über Taylorentwicklung ohne Sinus: $\pi = 180 \lim_{n\to\infty} \left((1 - \frac{(\frac{180}{n})^2}{3!}) + \frac{(\frac{180}{n})^4}{5!} - \ldots + (-1)^{k-2} \frac{(\frac{180}{n})^{2k-2}}{(2k-1)!} + \ldots \right)$.

2 π ist der Anfangsbuchstabe von Perimeter, gr. peri *um* und gr. *metron* das Maß, also der Umfang pro Durchmesser 2r

Da ein Strahlensatz für Kreisbögen gilt[3], hat man für den Einheitskreis und den Kreis mit Radius r: $\frac{b_1}{1}=\frac{b_r}{r}$ oder $b_r=r\,b_1$ bei gleichem Winkel φ. Wählt man anstatt Grad die zugehörige Bogenlänge b_1 des Einheitskreises, erhält man für 360° den Wert 2π LE, das sogenannte Bogenmaß (bei dem man noch die Einheit LE seltsamerweise weglässt, denn Maße bestehen immer aus Maßzahl *und* Maßeinheit!). Für den Winkel φ in Bogenmaß ist die zugehörige Bogenlänge eines Kreisabschnittes mit Radius r also $b_r=r\varphi$. Für den Vollkreis ist also $b_r=2\pi r$.

Bezüglich der Zeit dt gemessen hat er die Geschwindigkeit $v=\frac{db}{dt}=\frac{d\,r\varphi}{dt}=r\frac{d\varphi}{dt}=r\dot{\varphi}=:r\omega$ mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\omega:=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}$.

Die momentane Beschleunigung ist entsprechend $a=\frac{d^2b}{dt^2}=r\frac{d^2\varphi}{dt^2}=r\frac{d\omega}{dt}=r\dot{\omega}=:r\alpha$ mit der momentanen Winkelbeschleunigung $\alpha:=\frac{d\omega}{dt}=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}$.

Wird nun ein Körper (Massenpunkt) der Masse m, der durch ein Seil oder Stange (deren Masse nicht berücksichtigt werden soll) auf einen Kreis mit Radius r gezwungen wird, durch eine tangentiale Kraft F linear beschleunigt, so gilt für infinitesimale Zeiten dt für den Weg db[4] bzw. für die tangentialen Beschleunigung a das zweite Axiom Newtons: $a=\frac{d^2b}{dt^2}=\frac{F}{m}$.

Mit $r\alpha=a$ folgt für die Winkelbeschleunigung $\alpha=\frac{F}{mr}$. Da aber für die Winkelbeschleunigung nicht die lineare Kraft F, sondern die kreisbewegende Kraft (das Drehmoment) $M=Fr$ relevant ist, ergibt die Erweiterung des rechten Terms mit r: $\alpha=\frac{Fr}{mr^2}=\frac{M}{mr^2}$ das Analogon für das zweite Newtonsche Axiom, wobei M als kreisbewegende Kraft der Kraft F für lineare Bewegungen entspricht, und mr^2 als Widerstand gegen die Kreisbeschleunigung der trägen Masse m als Widerstand gegen die lineare Beschleunigung entspricht. Man nennt daher $I:=mr^2$ die Trägheit bzgl. der Kreisbeschleunigung oder das **Trägheitsmoment**.

Dem zweiten Axiom $F=ma$ entspricht bei Kreisbewegungen also $M=I\alpha$.

Die **kinetische Energie** $E_{kin}=\frac{1}{2}mv^2$ wird bei Rotationsbewegungen mit $v=r\omega$ zu

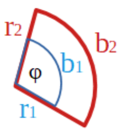
$$E_{kin}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2=\frac{1}{2}I\omega^2 .$$

Das zweite Newtonsche Gesetz $F=ma$ lässt sich auch interpretieren als $F=m\frac{dv}{dt}=\frac{dmv}{dt}=\frac{dp}{dt}$, also die Kraft als zeitliche Veränderungsrate des Impulses oder der Impuls als Zeitintegral der Kraft:

---

3 Der gesamte Bogen eines Kreises mit Radius r hat die Länge $2\pi r$. Also hat ein Bogen b zum Winkel φ die Länge $2\pi r\varphi/360°$.

Demnach gilt $\frac{b_2}{b_1}=\frac{2\pi r_2\varphi}{2\pi r_1\varphi}=\frac{r_2}{r_1}$:



4 Der infinitesimale Bogen db ist näherungsweise eine Strecke.

$p=\int F\,dt$.

Integriert man die entsprechende Größe bei Rotationsbewegungen, also M, so ergibt sich

$\int M dt=\int I\,\alpha\,dt=I\int\alpha\,dt=I\,\omega$. Man nennt diese Größe analog den **Drehimpuls** L.

Man hat hier also für den linearen Impuls $p=mv$ den Drehimpuls $L=I\,\omega$, was man auch durch direkte Ersetzung $m\rightarrow I$ und $v\rightarrow\omega$ sehen kann.

Andere Herleitung der Drehimpulses: Skizze siehe unten Bild4, indem die angreifenden Kraftvektoren durch die entsprechenden Impulsvektoren ersetzt werden.

$|\boldsymbol{p}_t|=|\boldsymbol{p}|\sin\theta\Rightarrow r\,p_t=|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{p}_t|=|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{p}|\sin\theta=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}|$. Dem Bahnimpuls p_t entspricht bei der

Kreisbewegung die Größe $|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}|=r\,p_t=r\,m\,v_t=rmr\,\omega=r^2\,m\,\omega=I\,\omega=L=|\boldsymbol{L}|$, der

Bahndrehimpuls. Um den Drehimpuls (zeitlich) zu verändern bedarf es nicht nur der Kraft F_t,

sondern der Hebelkraft (also des Drehmoments) $M=r\,F_t=r\frac{dp_t}{dt}=\frac{d\,r\,p_t}{dt}=\frac{dL}{dt}$. Ist der Bahnimpuls

nicht tangential, so ist es sinnvoll den Drehimpuls als Vektor aufzufassen: $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$.

Folgende Tabelle bringt nochmal die Zusammenhänge im Überblick (skalar):

Lineare Bewegung		**Drehbewegung**	
Infinitesimale Verschiebung	dx	Infinitesimale Drehung	$d\,\varphi$
Geschwindigkeit	$v=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega=\frac{d\,\varphi}{dt}=\dot{\varphi}$
Beschleunigung	$a=\frac{dv}{dt}=\dot{v}=\ddot{x}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha=\frac{d\,\omega}{dt}=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}$
Kraft	F	Drehmoment	M
Träge Masse	m	Trägheitsmoment	I
Bewegungsgleichung	$F=ma$	Rotationsgleichung	$M=I\,\alpha$
Kinetische Energie	$E_{kin}=\frac{1}{2}m\,v^2$	Kinetische Energie	$E_{kin}=\frac{1}{2}I\,\omega^2$
Impuls	$p=mv$	Drehimpuls	$L=I\,\omega$

Bisher wurde meistens vorausgesetzt, dass die Kraft F tangential angreift. Ist das nicht der Fall, verändert sich die Darstellung leicht:

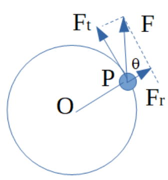


Bild4

F wird vektoriell zerlegt in die relevante Tangentialkomponente F_t und die Radialkomponente F_r, die zur Winkelbeschleunigung nichts beiträgt.

Ist $\theta = \sphericalangle(F_r, F)$, so gilt $F_t = F \sin\theta$ und damit $M = r F_t = r F \sin\theta$. Da Kräfte Vektoren sind und der Radiusvektor $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$ ebenfalls, lässt sich $M = r F \sin\theta$ auch schreiben als $M = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}|$. Da M das Analogon zur linearen vektoriellen Kraft F ist, ist es sinnvoll auch M als Vektor aufzufassen, d.h. als $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ mit $M = |\boldsymbol{M}|$. Dieser Drehmomentsvektor $\boldsymbol{M}$ zeigt aus der von $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{F}$ aufgespannten Ebene hinaus (falls die Drehbewegung in positiver Richtung erfolgt, d.h. gegen den Uhrzeigersinn. Die Länge von $\boldsymbol{M}$, also M, ist gerade der Inhalt des von den Vektoren $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{F}$ aufgespannten Parallelogramms (natürlich in LE und nicht in FE).

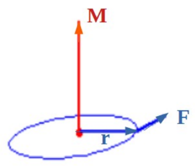


Bild5

Sei nun ein starrer Körper gegeben. Man kann sich den Körper als Summe von Punktmassen m_i vorstellen, sodass sich die Gesamtmasse m der Körpers ergibt zu $m = \sum_i m_i$. Erfährt der Körper eine Drehbeschleunigung α um die Schwerpunktachse, so hat jede Punktmasse diese Drehbeschleunigung.

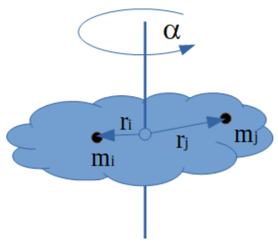


Bild6

Es gilt also $\alpha = \frac{F_i}{m_i r_i} = \frac{F_j}{m_j r_j}$ und falls die Teilmassen gleich sind $\frac{F_i}{r_i} = \frac{F_j}{r_j}$.
Die Kraft F_i ist also proportional zur Hebellänge r_i.

Da die Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen, lassen sie sich nicht zu einer Gesamtkraft aufsummieren. Das geht aber für die Drehmomente $M_i = m_i r_i^2 \alpha$, die jeweils einen Beitrag zum Gesamtdrehmoment M liefern und als Vektoren alle in die gleiche Richtung zeigen (hier nach oben): $M = \sum_i M_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \alpha = I\alpha$ mit dem Gesamtträgheitsmoment $I = \sum_i m_i r_i^2$

Bewegungen sind im allgemeinen gerichtet und werden entsprechend durch Vektoren ausgedrückt. Die Bewegungsgrößen haben nicht nur einen Betrag, sondern auch eine Richtung mit oder ohne Ziel. Man unterscheidet Richtung und Orientierung, wobei Richtung als Äquivalenzklasse paralleler Strecken gilt. Orientierung bezieht sich dann auf eine vorgegebene Richtung, die zwei Werte annehmen kann. Eine Strecke hat zwei Endpunkte. Geht man vom Mittelpunkt M der Strecke zum einen Endpunkt, so hat man eine Orientierung, die der anderen Orientierung, von M zum anderen Endpunkt entgegengesetzt ist. Dreidimensionale Vektoren, die das Vektorprodukt von anderen Vektoren sind, nennt man axiale Vektoren, die unter Punktspiegelung invariant sind. Beliebige Vektoren eines euklidischen Vektorraums nennt man dann polare Vektoren, die bei Punktspiegelung ihre Orientierung wechseln.

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems auf die Drehachse eines rotierenden Systems und nicht wie bisher auch in den Schwerpunkt (Mittelpunkt einer Scheibe), so ergibt sich folgendes Bild

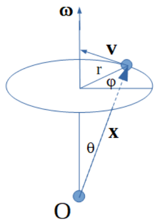


Bild7

Der Radius r des Kreises ist über den konstanten Polarwinkel θ ausgedrückt:
$r=|\boldsymbol{x}|\sin\theta=x\sin\theta$, wobei ebenfalls x konstant bleibt.
Für den Betrag der Bahngeschwindigkeit **v** war die Beziehung $v=\omega\cdot r$ hergeleitet worden, sodass gilt $v=\omega\cdot r=\omega\cdot x\sin\theta$. Das aber ist betragsmäßiges Ergebnis des Vektorprodukts $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}$.
Will man die Winkelgeschwindigkeit als Vektor $\boldsymbol{\omega}$ beschreiben, muss nach der „Rechtenhandregel“ $\boldsymbol{\omega}$ bei positivem Drehsinn nach oben zeigen. Die Bahngeschwindigkeit **v** als Vektorprodukt ist also axial. Bei Punktspiegelung wird die Orientierung erhalten bleiben.

Betrachtet man den Radius r als Radiusvektor **r** vom Kreismittelpunkt zum Kreisrand also $r=|\boldsymbol{r}|$, so zeigt das Vektorprodukt $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ in die gleich orientierte Richtung wie $\boldsymbol{\omega}$ mit eventuell anderem Betrag: $\boldsymbol{\omega}=\lambda(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v});\lambda>0$.

Bemerkung: Stehen die Vektoren $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ senkrecht aufeinander und ist $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, dann sieht man über die Graßmann-Identität: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$, dass

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{a}-\underbrace{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}_{0}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{a}$, also bis auf den Faktor $\boldsymbol{b}^2$ der Vektor $\boldsymbol{a}$ ergibt. Und

$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}-\underbrace{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}_{0}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$, also wieder bis auf den Faktor $\boldsymbol{a}^2$ der Vektor $\boldsymbol{b}$.

Sind die Vektoren $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ zusätzlich normiert, so ergeben sich die Vektoren zyklisch durch das Vektorprodukt.

Aus $\boldsymbol{\omega}=\lambda\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ folgt $\omega=\lambda\, r\, v\sin 90°=\lambda\, r\, v$, andrerseits gilt $v=\omega\, r$, also hat man
$\omega=\lambda\, r\,\omega\, r\Rightarrow\lambda=\frac{1}{r^2}$ und demnach $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$.

Die Winkelgeschwindigkeit ist also auch ein axialer Vektor.

Das Drehmoment wurde bereits oben als (axialer) Vektor eingeführt. Wie sieht es mit dem Drehimpuls aus. Der lineare Impuls ist als $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ ein polarer Vektor. Der Drehimpuls wurde zunächst skalar eingeführt: $L=I\,\omega=mr^2\omega\overset{v=\omega r}{=}mrv=r\,mv=rp\Rightarrow L=r\,p$.

Liegt in Bild5 der Ursprung des Koordinatensystems im Mittelpunkt des Drehkreises, so gilt
$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}$. Also ist $L=r\,p=x\,p$ und da $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{v}$ bzw. $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{p}$ und $\sin 90°=1$ ist
$L=xp=xp\sin 90°=|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}|$ oder $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$. Der Drehimpulsvektor ist also parallel zu Drehmomentsvektor $\boldsymbol{M}$ und zum Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$.

Da $\boldsymbol{L}=m\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}$ ist $\boldsymbol{L}=m r^2\boldsymbol{\omega}=I\,\boldsymbol{\omega}$.

Liegt der Ursprung jedoch nicht im Kreismittelpunkt, sondern sonstwo auf der Drehachse (Bild7), so ist $L=rp=x\sin\theta\; p=x\,p\sin\theta$. Der Winkel Theta ist aber nicht der Winkel zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{p}$, der Drehimpulsvektor also *nicht* das Vektorprodukt $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$.

Für den ersten Fall ist die zeitliche Ableitung des Drehimpulses das Drehmoment: Es gilt für Vektorprodukte (Kreuzprodukte) die Ableitungsregel: $\frac{d(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t))}{dt}=\dot{\boldsymbol{a}}(t)\times\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{a}(t)\times\dot{\boldsymbol{b}}(t)$.

Also $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})}{dt}=\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{p}}=\underbrace{\boldsymbol{v}\times m\,\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}}+\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{p}}\overset{\boldsymbol{F}=\dot{\boldsymbol{p}}\text{ (2. Axiom Newtons)}}{=}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}$, also

$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{M}$, das Analogon zum (verwendeten) Newtons 2. Axiom $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}$.

Für die Zentripetalkraft eines Systems $\boldsymbol{F}=\frac{-mv^2}{r^2}\boldsymbol{r}$ (Ursprung liegt im Zentrum der Umlaufbahn, also $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}$) gilt $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times\frac{-mv^2}{r^2}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ und also $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{0}$. D.h. dass der Drehimpuls für dieses System erhalten bleibt. Analog der lineare Fall: Ist die Kraft $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$, so bleibt der Impuls erhalten.

Nun nochmal der Vergleich zwischen linearer Bewegung und Rotation (vektoriell)

Lineare Bewegung		**Drehbewegung**	
Ortsvektor	$\boldsymbol{x}$	Drehwinkel	φ bzw. Drehmatrix **R**
Geschwindigkeit	$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\dot{\boldsymbol{x}}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}$ $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{r}$ Radiusvektor $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}$
Beschleunigung	$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{x}}$	Winkelbeschleunigung	$\boldsymbol{\alpha}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\dot{\boldsymbol{\omega}}$
Kraft	$\boldsymbol{F}$	Drehmoment	$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F}$
Träge Masse	m	Trägheitsmoment	$I=mr^2$ bzw. Trägheitstensor $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{\Theta}$
Impuls	$\boldsymbol{p}=m\,\boldsymbol{v}$	Drehimpuls	$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}\Rightarrow\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega}$
Bewegungsgleichung	$\boldsymbol{F}=m\,\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{p}}$	Rotationsgleichung	$\boldsymbol{M}=I\,\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{L}}$ falls Trägheitsmoment konstant
Kinetische Energie	$E_{kin}=\frac{1}{2}m\,v^2$	Rotationsenergie	$E_{rot}=\frac{1}{2}I\,\omega^2$

Wenn man einen Stufenbau der mathematisch-physikalischen Größen in Anbetracht nehmen will, so kann man die Skalare als Größen nullter Stufe, Vektoren als erster Stufe, Matrizen als zweiter und schließlich die Tensoren allgemeiner Stufe sehen. Dem Ortsvektor der linearen Bewegung würde so die Matrix der Drehbewegung entsprechen. Wird die z-Achse als Drehachse gewählt, so lautet sie

$$\boldsymbol{R}_z(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad .$$

Der Trägheitstensor, Tensor 2. Stufe (Matrix), der den Platz der trägen Masse der linearen Bewegungen für Drehbewegungen einnimmt, ergibt sich folgendermaßen:

Das tensorielle Produkt (dyadisches Produkt) zweier Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ lautet mit

Matrizenmultiplikation: $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}:=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^T$ oder $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot(b_1 b_2 b_3)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$

Dirac hat dieses Produkt in seiner Schreibweise als „äußeres Produkt“ $|a\rangle\langle b|$ notiert, das „innere Produkt“, Skalarprodukt (fast herkömmlich) als $\langle a|b\rangle=\boldsymbol{a}^T\cdot\boldsymbol{b}$.

Das gemischte Produkt aus tensoriellem und Skalarprodukt

$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^T)\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}^T\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\langle\boldsymbol{b}|\boldsymbol{c}\rangle$ wirkt in Dirac-Notation trivial: $(|a\rangle\langle b|)|c\rangle=|a\rangle\langle b|c\rangle$.

Dass diese Gleichung gilt, folgt aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation.

Gebraucht wird noch die oben genannte Graßmann-Identität: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

Jetzt zur Herleitung der Formel $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega}$: Zunächst gilt $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$, daraus folgt:

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}\times m\,\boldsymbol{v}=m\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}=m[\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})]\overset{Graßmann}{=}m[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega})]=m[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\omega}]$$

Beide Terme in der eckigen Klammer sind Vektoren: der erste Term Skalar $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ mal Vektor $\boldsymbol{\omega}$, der zweite Matrix $\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}$ mal Vektor $\boldsymbol{\omega}$. Will man $\boldsymbol{\omega}$ aus der Klammer ziehen, so müssen beide Terme in der gleichen Form vorliegen (wie bei der Eigenwertgleichung), d.h. als Matrix mal Vektor, d.h. man schreibt $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}=((\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{\omega}$ mit Einheitstensor **E** und erhält

$m[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\omega}]=m[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})E-\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}]\cdot\boldsymbol{\omega}$, also $\boldsymbol{L}=m[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}]\cdot\boldsymbol{\omega}$.

Definiert man die 3x3-Matrix $\boldsymbol{\Theta}:=m[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}]$, ergibt sich $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega}$.

Die Matrixelemente Θ_{ik} der Matrix $\boldsymbol{\Theta}$ in der Orthonormalbasis $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$ sind

$$\Theta_{ik}=\boldsymbol{e_i}\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{e_k}=\boldsymbol{e_i}m[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}]\cdot\boldsymbol{e_k}=m\,\boldsymbol{e_i}[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{e_k}-(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{e_k}]=m\,\boldsymbol{e_i}[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{e_k}-\boldsymbol{x}\,x_k]=$$
$$=m[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{e_i}\cdot\boldsymbol{e_k}-x_i x_k]=m[(x_1^2+x_2^2+x_3^3)\delta_{ik}-x_i x_k]$$. Also ist

$$\boldsymbol{\Theta}=m\begin{pmatrix}x_2^2+x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3\\ -x_2x_1 & x_1^2+x_3^2 & -x_2x_3\\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2+x_2^2\end{pmatrix}$$ ein symmetrischer Tensor.

Rotiert die Punktmasse bzgl. Koordinatenursprungs um die z-Achse $(\boldsymbol{e}_3$-Achse$)$, so ist $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ und das entsprechende Trägheitsmoment $I_3 = mr^2 = m(x_1^2 + x_2^2) = \Theta_{33}$. Die Diagonalelemente des Trägheitstensors sind also gerade die Trägheitsmomente bei Rotation um die verschiedenen Achsen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Die Nichtdiagonaleinträge nennt man Deviationsmomente oder Zentrifugalmomente. Bei einer Punktmasse sind sie Null. Im Falle eines starren Körpers (s.u.) sind sie ein Maß für die Asymmetrie einer Punktmasse, die wie oben um die z-Achse rotiert, wobei der Mittelpunkt der Rotation der Ursprung ist, sieht also mit $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ und $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi$ folgendermaßen aus:

$$\boldsymbol{\Theta} = m\begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 & 0 \\ -x_2 x_1 & x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} = m r^2 \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Handelt es sich um ein starres System aus endlich vielen verschiedenen Massenpunkten, so modelliert man den Drehimpuls des Systems $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega}$ als Summe der Drehimpulse der einzelnen Massenpunkte $\boldsymbol{L}_n = \boldsymbol{\Theta}_n\cdot\boldsymbol{\omega}_n$, aus denen man sich das System zusammengesetzt vorstellt. Da die Winkelgeschwindigkeiten aller Massenpunkte des starren Systems gleich sind $\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\omega}$, erhält man

$$\boldsymbol{L} = \sum_n \boldsymbol{\Theta}_n\cdot\boldsymbol{\omega}_n = \sum_n \boldsymbol{\Theta}_n\cdot\boldsymbol{\omega} = \left(\sum_n \boldsymbol{\Theta}_n\right)\cdot\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega} \quad .$$

Also gilt mit den verschiedenen Massen m_n der Massenpunkte und den indizierten Koordinaten $x = x_1, y = x_2, z = x_3$, also

$$\boldsymbol{\Theta} = \sum_n \boldsymbol{\Theta}_n = \sum_n m_n[(\boldsymbol{x}_n\cdot\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{E} - \boldsymbol{x}_n\otimes\boldsymbol{x}_n] = \sum_n m_n \begin{pmatrix} y_n^2 + z_n^2 & -x_n y_n & -x_n z_n \\ -y_n x_n & x_n^2 + z_n^2 & -y_n z_n \\ -z_n x_n & -z_n y_n & x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix} \quad .$$

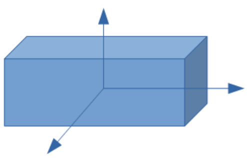
Für einen starren Körper, den man sich wieder als aus unendlich vielen kontinuierlich gelagerten Massenpunkten vorstellt, wird die Summe durch ein Volumenintegral ersetzt und die einzelnen Massen durch eine Massendichte $\rho(\boldsymbol{x})$:

$$\boldsymbol{\Theta} = \int_V \rho(\boldsymbol{x})[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}]dV$$, mit den einzelnen Momenten:

$$\Theta_{ik} = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i\int_V \rho(\boldsymbol{x})[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}]dV\cdot\boldsymbol{e}_k = \int_V \rho(\boldsymbol{x})\underbrace{\boldsymbol{e}_i[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}]\cdot\boldsymbol{e}_k}_{\text{siehe oben}}dV =$$

$$= \int_V \rho(\boldsymbol{x})\underbrace{[(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\delta_{ik} - x_i x_k]}_{\text{siehe oben}}dV \overset{\text{für homogene Massenverteilung } \rho(\boldsymbol{x}) =: \rho}{=} \rho\int_V (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\delta_{ik} - x_i x_k\, dV$$

Beispiel: Trägheitstensor eines massiven homogenen Quaders mit den Kantenlängen a (x-Achse), b (y-Achse), c (z-Achse). Bezugspunkt ist der Schwerpunkt, der im Koordinatenursprung liegen soll.



Es gilt $\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{abc}$. Für die einzelnen Momente gilt:

$$\Theta_{11}=\Theta_{xx}=\rho\int_V y^2+z^2\,dV=\rho\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} y^2+z^2\,dxdydz=\rho\,a\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2} y^2+z^2\,dydz=$$
$$=\rho\,a\int_{-c/2}^{c/2}\frac{1}{12}b^3+bz^2\,dz=\frac{1}{12}\rho\,a\left(b^3c+b\,c^3\right)=\frac{1}{12}\rho\,abc\left(b^2+c^2\right)=\frac{1}{12}m\left(b^2+c^2\right)$$

$$\Theta_{12}=\Theta_{xy}=-\rho\int_V xy\,dV=-\rho\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} xy\,dz\,dy\,dx=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} xyc\,dy\,dx=\int_{-a/2}^{a/2} 0\,dx=0=\Theta_{yx}$$

$$\Theta_{13}=\Theta_{xz}=-\rho\int_V xz\,dV=0=\Theta_{zx}$$

$$\Theta_{22}=\Theta_{yy}=\rho\int_V x^2+z^2\,dV=\rho\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} x^2+z^2\,dx\,dy\,dz=\rho\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{1}{12}a^3+z^2a\,dy\,dz=$$
$$=\rho\,ab\int_{-c/2}^{c/2}\frac{1}{12}a^2+z^2\,dz=\frac{1}{12}\rho\,ab\left(a^2c+c^3\right)=\frac{1}{12}\rho\,abc\left(a^2+c^2\right)=\frac{1}{12}m\left(a^2+c^2\right)$$

$$\Theta_{23}=\Theta_{yz}=-\rho\int_V yz\,dV=0=\Theta_{32}$$

$$\Theta_{33}=\Theta_{zz}=\rho\int_V x^2+y^2\,dV=\rho\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} x^2+y^2\,dz\,dy\,dx=\rho\,c\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} x^2+y^2\,dy\,dx=$$
$$=\rho\,bc\int_{-a/2}^{a/2} x^2+\frac{1}{12}b^2\,dx=\frac{1}{12}\rho\,abc\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{12}m\left(a^2+b^2\right)$$, also

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{pmatrix}\frac{1}{12}m\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{12}m\left(a^2+c^2\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m\left(a^2+b^2\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{12}m\begin{pmatrix}b^2+c^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2+c^2 & 0\\ 0 & 0 & a^2+b^2\end{pmatrix}$$

mit den Trägheitsmomenten bei Drehung um die x-Achse bzw. y-Achse bzw. z-Achse

$$I_x=\frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right),\,I_y=\frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right),\,I_z=\frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right)$$.

$\boldsymbol{\Theta}$ ist in diesem Beispiel eine Diagonalmatrix, d.h. man kann die Eigenwerte des Tensors direkt ablesen: $\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega}=\Theta\boldsymbol{\omega}$, wobei Θ der Eigenwert (sog. Hauptträgheitsmoment) zum Eigenvektor

$\boldsymbol{\omega}$ (sog. Hauptträgheitsachse) ist: $\Theta_1=\frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right)=I_x$ ist der erste Eigenwert zum Eigenvektor,

der folgendes Gleichungssystem erfüllt: $\begin{array}{c} x=x\\ \left(a^2-b^2\right)y=0\\ \left(a^2-c^2\right)z=0\end{array}$, also falls a, b, c paarweise verschieden sind, ist der zugehörige (normierte) Eigenvektor $(1,0,0)^T = \boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{\omega_1}$, die zugehörige Hauptträgheitsachse (x-Achse). Entsprechend ist für den zweiten Eigenwert $\Theta_2 = I_y$, das zweite Hauptträgheitsmoment, die Hauptträgheitsachse die y-Achse mit $\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{\omega_2}$ und für den dritten Eigenwert $\Theta_3 = I_z$ ist die Hauptträgheitsachse die z-Achse $\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{\omega_3}$.

Sind alle Kantenlängen gleich groß, also der Quader ein Würfel, so ergibt sich

$$\boldsymbol{\Theta} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} = \frac{ma^2}{6}\boldsymbol{E} \quad .$$