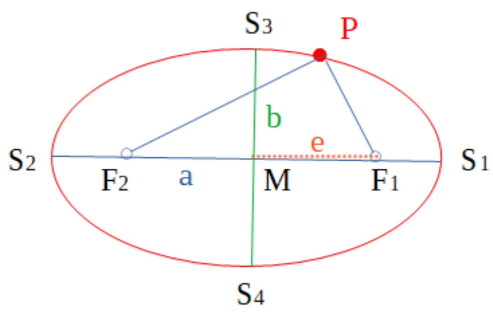
Die Keplerschen Gesetze

Manfred Hörz

1. Ellipse

Seien zwei Punkte F_1 und F_2 und eine reelle Zahl c mit $c > |F_1 F_2|$ gegeben.

Die Ortslinie, auf der alle Punkte P liegen, für die die Summe der Abstände zu den Punkten F_1 und F_2 gleich c ist: also $|PF_1| + |PF_2| = c$ heißt **Ellipse**.



Die Gerade durch F_1 und F_2 schneidet die Ellipse in den Punkten S_1 und S_2, den sogenannten Hauptscheiteln. Die Mittelsenkrechte zu F_1 F_2 schneidet die Ellipse in den Nebenscheiteln S_3 und S_4

Die Strecke S_1S_2 heißt die Hauptachse und die Strecke S_3S_4 die Nebenachse. Beide schneiden sich im Mittelpunkt M der Ellipse.

Die Länge der halben Nebenachse wird mit b bezeichnet, die der halben Hauptachse mit a.

Fallen die beiden Punkte F_1 und F_2 zusammen in M, so ist $|PM| + |PM| = c$ oder $|PM| = \frac{c}{2} = r$ der Radius des Kreises um M.

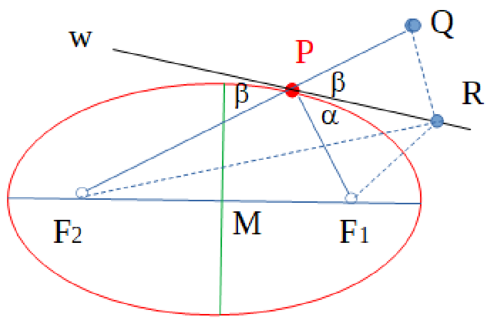
Denkt man sich in F_1 oder in F_2 eine Lichtquelle und die Ellipse als einen Spiegel, dann werden die Lichtstrahlen reflektiert und sammeln sich in F_2 bzw. in F_1. Daher nennt man die Punkte F_1 und F_2 auch die Fokusse oder **Brennpunkte**.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, sollen noch weitere Begriffe eingeführt werden. Zunächst der Begriff Exzentrizität, der sich auf die Brennpunkte bezieht, die bzgl. des Mittelpunkts exzentrisch sind.
Den Abstand der Brennpunkte zum Mittelpunkt heißt *lineare Exzentrizität* e:
$e := |MF_1| = |MF_2|$. Ist sie Null, dann ist die Ellipse ein Kreis.

Die relative oder *numerische Exzentrizität* ist $\epsilon := \frac{e}{a}$. Sie ist dimensionslos, daher numerisch.
Da die Brennpunkte wegen $|PF_1|+|PF_2|>|F_1F_2|$ im Inneren der eingeschlossenen Ellipsenfläche liegen müssen, ist $e<a$ und damit $\epsilon<1$ (und natürlich $\epsilon \geq 0$). Je größer ϵ , desto stärker weicht die (echte) Ellipse von dem Kreis ab.

Sei $P=S_1$ dann gilt: $c=|S_1F_1|+|S_1F_2|=(a-e)+(a+e)=2a$.

Die Strecke, die einen Brennpunkt mit einem Ellipsenpunkt verbindet, heißt Brennlinie oder *Brennstrahl*.

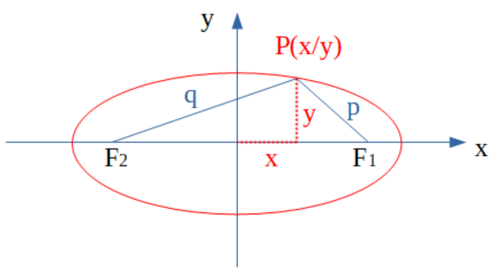


Die Verlängerung des Brennstrahls F_2P schneidet den Kreis um P mit dem Radius $|F_1P|$ in Q.
Die Gerade w sei die Winkelhalbierende des Winkels $QPF_1=\alpha+\beta$. Es gilt also $\alpha=\beta$, wobei $\alpha=$ Winkel RPF_1 und $\beta=$ Winkel QPR . R ist dabei ein beliebiger Punkt auf der Winkelhalbierenden w.

Es soll gezeigt werden, dass R kein Ellipsenpunkt ist und damit w die Tangente in P an die Ellipse.
Dann ist α der Einfallswinkel des Brennstrahls F_1P und β der Ausfallswinkel des Brennstrahls PF_2, die gleich sind:

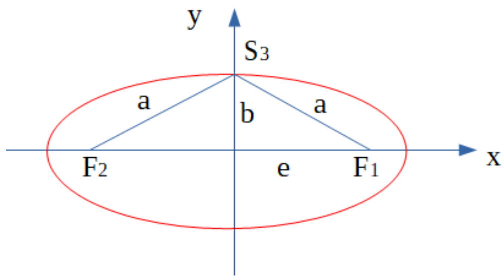
Es gilt: $|RF_2|+|RF_1|=|RF_2|+|RQ|>|QF_2|=2a$, also ist mit $|RF_2|+|RF_1|>2a$ R kein Ellipsenpunkt. Also ist w Tangente, da sie nur einen Punkt mit der Ellipse gemein hat.

Um die Ellipse nicht nur geometrisch, sondern auch analytisch zu behandeln, führt man bspw. ein kartesisches Koordinatensystem ein, in dessen Ursprung sich der Mittelpunkt der Ellipse befindet und die Hauptachse auf der x-Achse, die Nebenachse auf der y-Achse liegt.



Es gelten folgende Gleichungen: $y^2+(x+e)^2=q^2$, $y^2+(e-x)^2=p^2$ und $p+q=2a$.

Andrerseits gilt (siehe untere Zeichnung): $b^2+e^2=a^2$ oder $e^2=a^2-b^2$.



Gesucht ist eine Gleichung $y=\pm f_{a,b}(x)$ mit den charakteristischen Halbachsen a und b als Parameter.

Subtrahiert man die beiden ersten Gleichungen und löst die Binome auf, erhält man

$x^2+2ex+e^2-e^2+2ex-x^2=q^2-p^2$ oder $4ex=q^2-p^2$, schreibt man das dritte Binom als Produkt,

so ist $4ex=(q+p)(q-p)$ oder $4ex=2a(q-p)$. Mithilfe von $q+p=2a$ oder $p=2a-q$

eliminiert man noch p : $4ex=2a(q-2a+q)$ oder $4ex=2a(2q-2a)$ oder $ex=aq-a^2$, und erhält somit $q=\frac{ex}{a}+a$.

In die erste obige Gleichung $y^2+(x+e)^2=q^2$ eingesetzt, ergibt es:

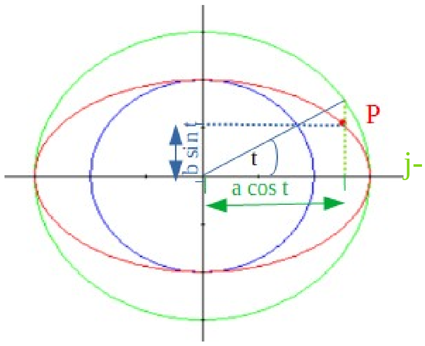
$y^2+x^2+2ex+e^2=\frac{e^2x^2}{a^2}+a^2+2ex$ oder $y^2+x^2+e^2=\frac{e^2x^2}{a^2}+a^2$ mit $e^2=a^2-b^2$ folgt:

$y^2+x^2+a^2-b^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+a^2$ oder $y^2-b^2=\frac{-b^2}{a^2}x^2$ oder $b^2\frac{x^2}{a^2}+y^2=b^2$. Dividiert man noch

durch b^2 , ergibt das endlich $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Also $f_{a,b}(x)=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Eine schnellere Methode geht von der Parameterdarstellung aus: $x=a\cos t, y=b\sin t,\ 0\le t<2\pi$

Dann ist $\frac{x^2}{a^2}=\cos^2 t$ und $\frac{y^2}{b^2}=\sin^2 t$ woraus wegen $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ folgt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Um die Darstellung zu verstehen, zeichnet man um den Ellipsenmittelpunkt M einen Kreis mit dem Radius

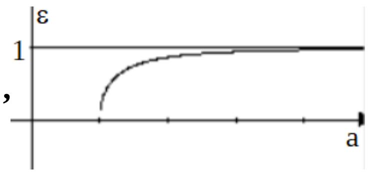


a und einen Kreis mit dem Radius b (Proklosmethode[1]):

Man zeichnet einen Strahl vom Mittelpunkt im Winkel t von der x-Achse aus. Dieser schneidet den b-Kreis in der Höhe $y = b \sin t$ und den a-Kreis in der Breite $x = a \cos t$.

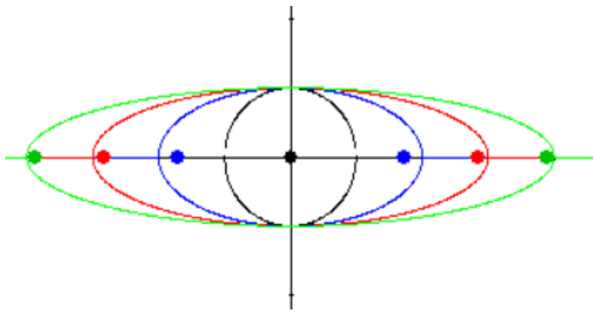
Für die Brennpunkte gilt, da $e = \sqrt{a^2 - b^2}$: $F_1(\sqrt{a^2-b^2}/0)$ und $F_2(-\sqrt{a^2-b^2}/0)$.

Bspe: $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$,



für b = 1.

$a = b = 1, \epsilon = 0 (Kreis); a = 2; b = 1, \epsilon \approx 0{,}56; a = 3; b = 1, \epsilon \approx 0{,}94; a = 4; b = 1, \epsilon \approx 0{,}97$

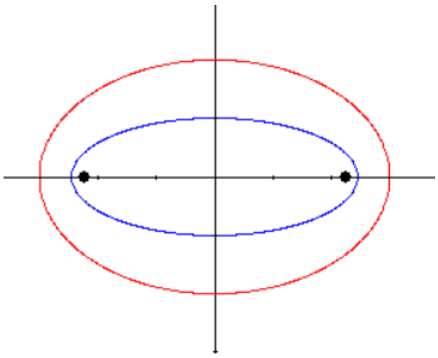


Wie man sieht, rücken die Brennpunkte mit größer werdendem a immer mehr den Hauptscheiteln

zu: $\sqrt{a^2 - b^2} \xrightarrow{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \to 1} a$

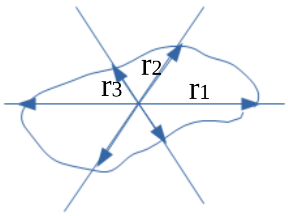
Bsp: Zwei *konfokale* Ellipsen (mit gleichen Brennpunkten): $(\pm\sqrt{5}/0)$ $a = 3, b = 2; a = \sqrt{6}, b = 1$

1 Proklos (412 Byzanz/Konstantinopel-485 Athen) war einer der wichtigsten Neuplatoniker.



Man kann die Begriffe Kreis und Ellipse verallgemeinern. Bei einem Kreis gibt es genau einen Radius, bei einer Ellipse kann man von zwei Hauptradien $r_1 = a$ und $r_2 = b$, den halben Haupt- und Nebenachsen sprechen. Die anderen momentanen Radien ergeben sich als glatte Transformationen. Im Fall des Kreises liegt ein 1-Zyklus vor, im Fall der Ellipse ein 2-Zyklus.

Es sind aber auch 3-Zyklen möglich mit drei Hauptradien. Oder mit beliebig vielen.



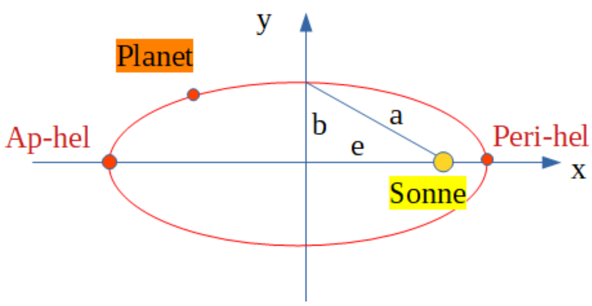
Die Hüllkurve ist eine differenzierbare Minimallinie.

2. Die Keplerschen Gesetze

Mithilfe der reichen empirischen Daten von Tycho Brahe gelingt es Kepler, die Bahnen der Planeten zu bestimmen.

Erstes Keplersches Gesetz (Ellipsensatz)

Alle Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne. Die Sonne steht in einem der beiden Brennpunkte der jeweiligen Ellipsenbahnen.



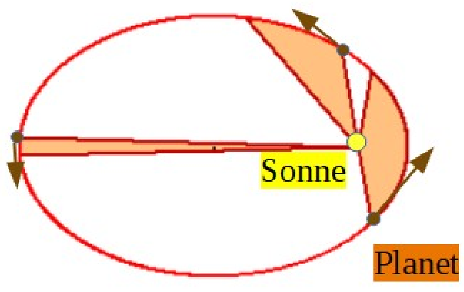
Der Hauptscheitel, der der Sonne am nächsten ist, der um die Sonne „herum ist“ heißt *Perihel*, der Hauptscheitel, der von der Sonne am weitesten „weg“ ist, heißt *Aphel*. Peri heißt auch Griechisch „um herum“ und apo heißt „weg von“. Hel ist die Abkürzung für Helios, der Sonne auf Griechisch.

Die Planetenbahn, die die größte numerische Exzentrizität besitzt, ist die des Merkur mit $\epsilon=0{,}205$. Die Erde umläuft die Sonne mit $\epsilon=0{,}017$ fast kreisförmig.

Das 1. Gesetz ist ein rein geometrisches. Das 2. Gesetz macht eine Aussage über die Umlaufgeschwindigkeit eines Planeten, ist also ein kinetisches. Je näher der Planet der Sonne, desto größer ist seine Geschwindigkeit. Im Perihel ist sie also am größten und am Aphel am kleinsten.

Zweites Keplersches Gesetz (Flächensatz)

Die gerade Verbindungslinie zwischen Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

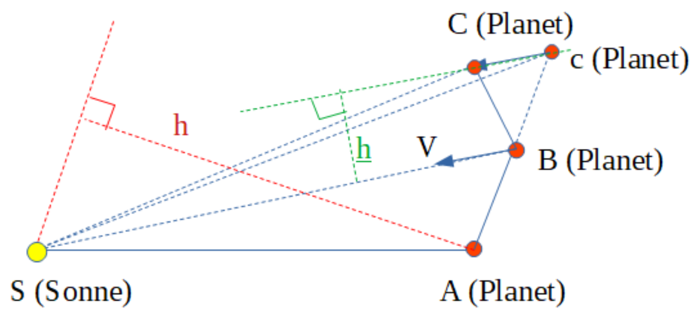


Das zweite Gesetz ist aus einem einfachen Prinzip herleitbar, wie es Newton in seinen *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (more geometrico[2]) gezeigt hat.

Das Prinzip lautet, dass ein Planet seine geradlinige Bahn (Galileis Trägheitsgesetz) durch ein zur Sonne hin gewendete Kraft verändert.

Im Ersten Buch, Abschnitt II, Seite 87[3] steht eine Skizze, die ich vereinfacht und leicht verändert wiedergebe und die die Essenz des Beweises zum 2. Keplerschen Gesetz enthält[4]:

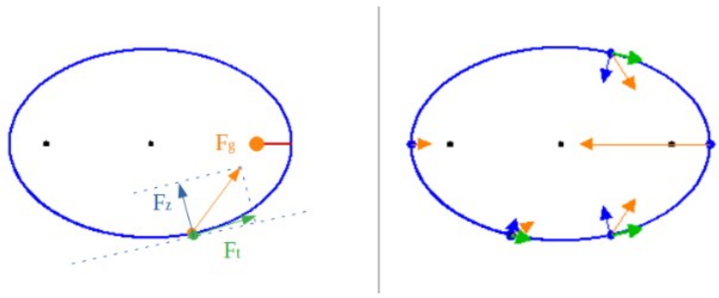
2 Also nach der Methode von Euklid.
3 In Isaac Newton, Mathematische Grundlagen der Naturphilosophie, Hamburg 1988, Felix Meiner Verlag GmbH.
4 Feynman hielt diesen Beweis für genial.



„Man teile die Zeit in gleiche Abschnitte, und es beschreibe der Körper [Planet] im ersten Zeitabschnitt aufgrund seiner eingepflanzten Kraft [Impuls] die Gerade AB. Der gleiche Körper würde sich im zweiten Zeitabschnitt, wenn ihn nichts hinderte, auf der Geraden weiterbewegen nach c (gemäß dem Gesetz I [Trägheitssatz[5]*]), indem er die Linie Bc beschreibe, die genau AB gleich ist; so weit, dass von den zum Mittelpunkt [S] gezogenen Radien AS, BS, cS die gleich großen Flächen ASB und BSc erzeugt würden [sieht man, da alle Dreiecke gleiche Höhe h besitzen]. Wenn aber der Körper nach B gekommen ist, so treibe ihn die Zentripetalkraft mit einem einzigen, aber starken äußeren Anstoß an, und die soll bewirken, dass der Körper von der Geraden Bc abweichen und seinen Weg längs der Geraden BC fortsetzen wird. Wird nun cC parallel zu BS gezogen bis zum Schnittpunkt C mit BC, so wird der Körper am Ende des zweiten Zeitabschnitts (nach Corollar I zu den Gesetzen*[6]*) sich in C befinden und in derselben Ebene mit dem Dreieck ASB. Verbinde CS, und das Dreieck SBC wird, da SB und Cc parallel sind [beide haben bei gleicher Grundseite SB die gleiche Höhe h], dem Dreieck SBc gleich sein, und daher auch dem Dreieck SAB. […]“*

Newton erklärt dann noch, wie man durch Verfeinerung der Zeitabschnitte (Infinitesimale) zu einer glatten Bahn kommen kann, so dass das 2. Keplersche Gesetz ableitbar wird mithilfe des (mysteriösen[7]) Kraftbegriffs.

Kurzer Exkurs zur Zentripetalkraft:



F_g ist die *Gravitationskraft*, die zur Sonne hinweist (die *Zentralkraft*).

5 *„Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig-geradlinigen Bewegung, sofern er nicht durch eingefrückte Kräfte zur Änderung seines Zustandes gezwungen wird.“*

6 *„Ein Körper beschreibt unter der Einwirkung gekoppelter Kräfte die Diagonale eines Parallelogramms in derselben Zeit, in der er bei getrennten Kräften dessen Seiten durchmessen würde.“*

7 Newton selbst war es nicht wohl bei der instantanen Übertragung.

F_z ist die *Zentripetalkraft*, die normal zur Tangentialkraft F_t steht und zum Mittelpunkt des jeweiligen Krümmungskreises zeigt. Sie ist für die jeweilige Krümmung der Bahn verantwortlich und verändert die Richtung des Geschwindigkeitsvektors.

Die *Tangentialkraft* F_t verändert den Betrag des Geschwindigkeitsvektors.

Die zwei ersten Gesetze betrafen nur einen Planeten. Das dritte Gesetz setzt die Umlaufbewegungen zweier beliebiger Planeten um die Sonne in Beziehung.

Drittes Keplersches Gesetz (Umlaufzeitenzatz)

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Bahnhalbachsen.

Für die Umlaufzeiten T_1 und T_2 zweier Planeten und ihren großen Halbachsen a_1 und a_2 gilt

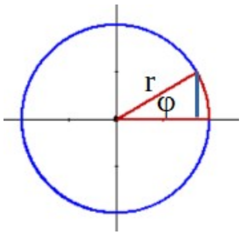
$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}$ oder $\frac{a_1^3}{T_1^2}=\frac{a_2^3}{T_2^2}=C$. Die Konstante C heißt *Keplerkonstante*. Es gilt für unser Sonnensystem $C=3{,}362\cdot10^{18}\,m^3/s^2$.

Die Umlaufzeit eines Planeten hängt also von der Größe $2a$, dem Durchmesser der Ellipsenbahn ab: $T=\sqrt{\frac{a^3}{C}}$ [8]; je größer der Durchmesser, desto größer die Umlaufzeit, was intuitiv verständlich ist, nur die genaue Funktion ist nicht intuitiv.
Daraus lässt sich die große Halbachse berechnen, wenn die Umlaufzeit bekannt ist: $a=\sqrt[3]{C\,T^2}$.

Für die Erde ergibt sich mit $T=3{,}1536\cdot10^7\,s$ und $T^2=9{,}94519296\cdot10^{14}\,s^2$ ungefähr die große Halbachse zu $a=1{,}5\cdot10^8\,km$.
Der Wert der Keplerkonstante ist spezifisch für jedes System. Ist der Zentralkörper die Erde und der „Planet“ der Mond, so ergibt sich die Konstante zu $C=1{,}01\cdot10^{13}\,m^3/s^2$. Mit $T^2=5{,}85\cdot10^{12}\,s^2$ (d.h. 28 Tage Umlaufzeit) wird die große Halbachse ungefähr den Wert $a=389543\,km$ haben.

Das dritte Gesetz lässt sich aus dem Gravitationsgesetz von Newton herleiten. Da die Umlaufbahn der Erde fast ein Kreis ist, zeige ich es für einen Kreis:

1. Für eine Kreisbahn gilt: $x(t)=r\cdot\cos(\varphi);\, y(t)=r\cdot\sin(\varphi)$



8 Newton beschreibt und beweist das in seiner Proposition XV. Theorem VII 1. Buch, Abschnitt III

Da für die Winkelgeschwindigkeit ω gilt : $\omega=\frac{\varphi}{t}$ folgt für den Radialvektor $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} r\cdot\cos\omega t \\ r\cdot\sin\omega t \end{pmatrix}$.

Die Geschwindigkeit ist dann $\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} -r\,\omega\cdot\sin(\omega t) \\ r\,\omega\cdot\cos(\omega t) \end{pmatrix}$ und für die Beschleunigung

$\boldsymbol{a}(t)=\ddot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} -r\,\omega^2\cdot\cos(\omega t) \\ -r\,\omega^2\cdot\sin(\omega t) \end{pmatrix}=-\omega^2\,\boldsymbol{x}$ und der Betrag (Norm) der Beschleunigung ist

$a=|\boldsymbol{a}(t)|=\omega^2\cdot r$.

2. Das Newtonsche Gravitationsgesetz lautet in Betragsform: $F_g=\gamma\frac{M\cdot m}{r^2}$.

3. Das 2. Newtonsche Axiom ist $F=m\cdot a$

Da die Kraft F hier die Gravitationskraft ist, gilt: $m\cdot a=\gamma\frac{M\cdot m}{r^2}\Rightarrow a=\gamma\frac{M}{r^2}$.

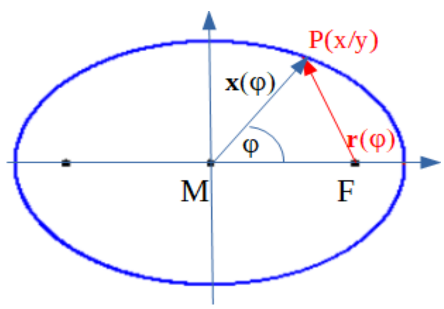
Setzt man das Ergebnis von 1. in die letzte Gleichung ein, ergibt sich: $\omega^2\cdot r=\gamma\frac{M}{r^2}$.

Die volle Kreisumlaufzeit heißt T und damit gilt $\omega=\frac{\varphi}{t}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega^2=\frac{4\pi^2}{T^2}$. In die vorige Gleichung eingesetzt, hat man: $\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r=\gamma\frac{M}{r^2}\Rightarrow\frac{4\pi^2}{\gamma M}=\frac{T^2}{r^3}$ oder wenn man will

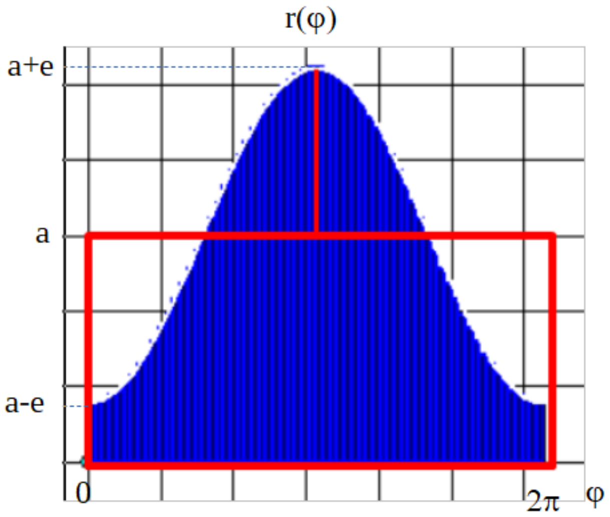
$\frac{r^3}{T^2}=\frac{\gamma M}{4\pi^2}=konstant=C$. Da für den Kreis $a=b=r$ gilt, hat man für Kreisbahnen das 3. Keplersche Gesetz: $\frac{a^3}{T^2}=C$. Alle Planeten, die im Abstand a um die Sonne kreisen, haben also dieselbe Umlaufzeit, die nur von der Sonnenmasse M abhängt.

Hier wurde natürlich vorausgesetzt, dass man wegen der großen Sonnenmasse die Bewegung der Sonne um den gemeinsamen Schwerpunkt vernachlässigen kann und die Sonne quasi stillsteht.

Eine allgemeine Herleitung für Ellipsenbahnen könnte folgendermaßen aussehen:



$F(e/0) \quad \boldsymbol{r}(\varphi)=\begin{pmatrix} a\cdot\cos(\varphi)-e \\ b\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ mit $e=\sqrt{a^2-b^2}$. Es gilt $\ddot{\boldsymbol{r}}(\varphi(t))=-\omega^2\left(\boldsymbol{r}(\varphi(t))+\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ (*)
und $r(\varphi)=|\boldsymbol{r}(\varphi(t))|=\sqrt{(a\cdot\cos(\varphi)-e)^2+b^2\sin^2(\varphi)}$ mit untenstehender Funktion für $a=3, b=2$.



Der Mittelwert μ der Funktion $r(\varphi)$ im Intervall $[0,2\pi]$ ist $\mu=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\varphi)\,d\varphi$.

Das (elliptische) Integral hat den Wert $2\pi\mu$, der dem Inhalt $2\pi\cdot a$ des Rechtecks entspricht (siehe Graphik), also ist μ gleich dem Wert der großen Halbachse a.

Aus Vektorgleichung (*) folgt die Skalargleichung $\ddot{r}(\varphi)=\omega^2\cdot x(\varphi)$ und daraus ergibt sich mit

Newton $\ddot{r}(\varphi)=\gamma\frac{M}{r^2(\varphi)}$: $\omega^2\cdot x(\varphi)=\gamma\frac{M}{r^2(\varphi)}$ oder mit der

Durchschnittswinkelgeschwindigkeit $\omega=\frac{2\pi}{T}$ und der Durchschnittsentfernung (Mittelwert) und dem Mittelwert $\mu(x)$, der allerdings kleiner als a ist:

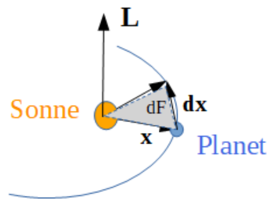
$\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\mu(x)=\gamma\frac{M}{a^2}$, also ist $\frac{\mu(x)\cdot a^2}{T^2}=\frac{\gamma M}{4\pi^2}=C$. Über diese Methode sind die Keplerschen

Werte auch mithilfe der Durchschnittswerte nicht genau erreichbar. Diese sollen aber weiter unten präzisiert werden.

Zur **Herleitung des zweiten Keplerschen Gesetzes** mithilfe der Infinitesimalrechnung und des Satzes der Drehimpulserhaltung bei einer Zentralkraft, der Gravitationskraft $\boldsymbol{F}=\gamma\frac{M\cdot m}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x}$:

Der Drehimpuls eines Massenpunktes (idealisierter Planet) ist $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$, wobei **x** der Ortsvektor des Massenpunktes ist und **p** sein linearer Impuls. Die Sonne stehe im Ursprung.

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})=\frac{d\,\boldsymbol{x}}{dt}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{x}\times\frac{d\,\boldsymbol{p}}{dt}=\underbrace{\boldsymbol{v}\times m\,\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{x}\times\gamma\frac{M\cdot m}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$, also ist der Drehimpuls zeitlich konstant.



$$dF=\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{dx}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\,dt|=\frac{1}{2m}|\boldsymbol{x}\times m\,\boldsymbol{v}|\,dt=\frac{1}{2m}|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}|\,dt=\frac{1}{2m}|\boldsymbol{L}|\,dt=c\,dt$$, da L konstant ist.

Also gilt $F(t)=ct+c_0 \Rightarrow \Delta F=F(t+\Delta t)-F(t)=c(t+\Delta t)+c_0-ct-c_0=c\,\Delta t$. In gleichen Zeitdauern Δt ist die überstrichene Fläche ΔF gleich.

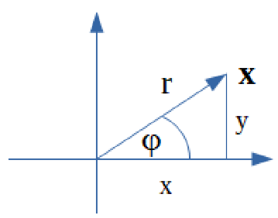
Dass die Bahn eine ebene Bahn ist, kann auch schnell gezeigt werden:

$$\boldsymbol{x}(t)\cdot\underbrace{\boldsymbol{L}(t)}_{konstant}=\boldsymbol{x}(t)\cdot(\boldsymbol{x}(t)\times\boldsymbol{p}(t))=0$$, also ist $\boldsymbol{L}(t)$ der Normalenvektor einer Ebene zu der die Ortsvektoren $\boldsymbol{x}(t)$ zeigen.

Ich habe hier das Newtonsche Gravitationsgesetz verwendet, das Newton wahrscheinlich u.a. mithilfe des dritte Keplerschen Gesetzes aufgestellt hat. Das Gravitationsgesetz ist, da sich das dritte Keplersche Gesetz daraus ableiten lässt, ein gutes Beispiel für Induktion

Zur **Herleitung des ersten Keplerschen Gesetzes** bedarf es etwas mehr Arbeit. Dazu verwendet man das Gravitationsgesetz, den Energieerhaltungssatz und den Drehimpulserhaltungssatz.

Günstig hierfür ist die Verwendung von Polarkoordinaten (es wurde ja bereits gezeigt, dass die Bahn eben ist, also zwei Koordinaten ausreichen):



Der Ortsvektor $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ des Planeten (Sonne befinde sich im Ursprung) lässt sich am besten in Polarkoordinaten $r=|\boldsymbol{x}|$ und φ als Winkel zwischen positiver x-Achse und Ortsvektor **x** darstellen:

$$x(t)=r(t)\cos(\varphi(t))$$
$$y(t)=r(t)\sin(\varphi(t))$$

$$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{r}(t)\cos(\varphi(t))-r(t)\sin(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \\ \dot{r}(t)\sin(\varphi(t))+r(t)\cos(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}=\dot{r}(t)\begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}+r(t)\dot{\varphi}(t)\begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

Da das Gravitationsfeld ein konservatives Feld ist, bleibt die Gesamtenergie $E=E_{kin}+E_{pot}$ erhalten.

E_{kin}: $v^2=\dot{\boldsymbol{x}}(t)^2=\dot{r}(t)^2\underbrace{(\cos^2+\sin^2)}_{1}+r(t)^2\dot{\varphi}(t)^2(\sin^2+\cos^2)+2r(t)\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t)\underbrace{(-\cos\sin+\sin\cos)}_{0}\Rightarrow$

$$v^2=\dot{r}(t)^2+r(t)^2\dot{\varphi}(t)^2\Rightarrow \quad E_{kin}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}(t)^2+r(t)^2\dot{\varphi}(t)^2)$$

E_{pot}: Die potenzielle Energie lässt sich über die für konservative Kraftfelder **F** gültige Gleichung

$\boldsymbol{F}=-\nabla E_{pot}$ gewinnen. Für das Gravitationsfeld gilt $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=-\gamma\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{x}$.

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-1/2}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}2x=\frac{-x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-x}{r^3}$, aus analoger Rechnung ergibt sich $\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}=\frac{-y}{r^3}\Rightarrow\nabla\frac{1}{r}=\frac{-\boldsymbol{x}}{r^3}$ und $\nabla\gamma\frac{mM}{r}=-\gamma\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, also ist

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\nabla\gamma\frac{mM}{r}=-\nabla-\gamma\frac{mM}{r}$ und demnach $E_{pot}=-\gamma\frac{mM}{r}$.

Die Gesamtenergie ist dann $E=\frac{1}{2}m(\dot{r}(t)^2+r(t)^2\dot{\varphi}(t)^2)-\gamma\frac{mM}{r}=konstant$

Ebenso bleibt der Drehimpuls erhalten: $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}\times m\dot{\boldsymbol{x}}=m(\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{x}})$:

$$\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{x}}=r\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\times\left(\dot{r}\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}+r\dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\\ \cos\end{pmatrix}\right)=r\dot{r}\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{0}}+r^2\dot{\varphi}\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\sin\\ \cos\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\Rightarrow$$

$L=|\boldsymbol{L}|=mr^2|\dot{\varphi}|=mr^2\dot{\varphi}=konstant$ (*) da $\varphi(t)\,sms$ ist $\dot{\varphi}(t)>0$.

Die Bewegungsgleichung ist also $E(r,\dot{r},\dot{\varphi})=\frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2+\frac{1}{2}mr(t)^2\dot{\varphi}(t)^2-\gamma\frac{mM}{r(t)}=konstant$.
Mithilfe der vorigen Drehimpulsgleichung (*) kann der mittlere Term der Bewegungsgleichung (Differenzialgleichung DG) vereinfacht werden (die Konstanten sind blau markiert)

$E=\frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2+\frac{1}{2}L\dot{\varphi}(t)-\gamma mM\frac{1}{r(t)}$. Für die Bahn ist der Zeitparameter unerheblich, r soll aber

in Abhängigkeit vom Winkel dargestellt werden. Dazu ist folgende Kettenregel geeignet, womit die Zeitableitung von r und über (*) auch die von φ eliminiert werden können:

$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$ oder $\dot{r}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}\overset{(*)}{=}\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{L}{mr^2}$ und damit wird die DG zu:

$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\cdot\frac{L^2}{m^2r^4}+\frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}-\gamma mM\frac{1}{r(t)}$, nach der Ableitung aufgelöst:

$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\frac{2Emr^4+2\gamma m^2Mr^3}{L^2}-r^2=r^2\left(\frac{2Emr^2+2\gamma m^2Mr}{L^2}-1\right)$, ersetzt man die Konstante

$\frac{L^2}{\gamma m^2M}=:p$ nimmt die DG die Form an: $\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\frac{2Em}{L^2}+\frac{2}{pr}-\frac{1}{r^2}$.

Eine weitere Vereinfachung erhält man auf der linken Seite, wenn

man definiert $\frac{1}{r}=\frac{1}{r(\varphi)}=:s(\varphi)=s$, da über die Kettenregel gilt $\frac{ds}{d\varphi}=\frac{ds}{dr}\cdot\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$:

$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2=\frac{2Em}{L^2}+\frac{2s}{p}-s^2=\frac{2Em}{L^2}-\left(s^2-\frac{2s}{p}\right)$. Fügt man im Klammerterm $\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}$ hinzu, so

kann im Klammerterm ein Binom erzeugt werden:

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2=\frac{2Em}{L^2}-\left(s^2-\frac{2s}{p}+\frac{1}{p^2}\right)+\frac{1}{p^2}=\frac{2Em}{L^2}+\frac{1}{p^2}-\left(s-\frac{1}{p}\right)^2=\frac{1}{p^2}\left(\frac{2Emp^2}{L^2}+1\right)-\left(s-\frac{1}{p}\right)^2$$

Kürzt man den ersten konstanten Klammerterm durch ϵ^2 ab: $\epsilon^2:=\frac{2Emp^2}{L^2}+1$ wird die DG zu:
$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2=\frac{\epsilon^2}{p^2}-\left(s-\frac{1}{p}\right)^2$ oder $\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2+\left(s-\frac{1}{p}\right)^2=\frac{\epsilon^2}{p^2}$. Dividiert man die Gleichung durch die

rechte Seite, wird die DG zu: $\frac{p^2}{\epsilon^2}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2+\frac{p^2}{\epsilon^2}\left(s-\frac{1}{p}\right)^2=1$ oder $\frac{p^2}{\epsilon^2}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{ps-1}{\epsilon}\right)^2=1$.

Definiert man weiter $\tau=\tau(\varphi):=\frac{ps-1}{\epsilon}$ mit $\frac{d\tau}{d\varphi}=\frac{1}{\epsilon}\left(p\frac{ds}{d\varphi}-0\right)=\frac{p}{\epsilon}\frac{ds}{d\varphi}$ und erhält jetzt eine einfache Version der DG: $\left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2+\tau^2=1$. Das sieht nach Trigonometrie aus: $\tau=\sin\varphi$ löst die DG, da mit $\frac{d\tau}{d\varphi}=\cos\varphi$ gilt: $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. Auch $\tau=\cos\varphi$ ist Lösung. Nun zurück substituieren:

$$\frac{ps-1}{\epsilon}=\cos\varphi\Rightarrow s=\frac{\epsilon\cos\varphi+1}{p}\Rightarrow$$

$$r(\varphi)=\frac{p}{\epsilon\cos\varphi+1} \quad \text{mit} \quad p=\frac{L^2}{\gamma m^2 M} \quad \text{und} \quad \epsilon=\sqrt{\frac{2Emp^2}{L^2}+1} \quad \text{bzw.} \quad \epsilon=\sqrt{\frac{2EL^2}{\gamma^2 m^3 M^2}+1} \quad .$$

Diese Gleichung in Polarkoordinaten soll noch in kartesische Koordinaten transformiert werden.

$$r^2=x^2+y^2,\quad \cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{p}{\epsilon\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1}=\frac{p\sqrt{x^2+y^2}}{\epsilon x+\sqrt{x^2+y^2}}\overset{\text{Eliminierung der Wurzeln}}{\Rightarrow}x^2+y^2=\frac{(x^2+y^2)^2}{(p-\epsilon x)^2}\Rightarrow(p-\epsilon x)^2=x^2+y^2\Rightarrow$$

$$\overset{\text{sortieren}}{\Rightarrow}p^2-y^2=(1-\epsilon^2)x^2+2\epsilon p x\underset{\epsilon\neq 1}{\overset{\text{quadr. Ergänzung in x}}{\Rightarrow}}\left(x+\frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}\right)^2=\frac{p^2-y^2}{1-\epsilon^2}+\frac{\epsilon p^2}{(1-\epsilon^2)^2}\Rightarrow$$

$$\frac{y^2(\epsilon^2-1)+p^2}{(1-\epsilon^2)^2}=\left(x+\frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}\right)^2\Rightarrow\frac{y^2}{1-\epsilon^2}+\left(x+\frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}\right)^2=\left(\frac{p}{1-\epsilon^2}\right)^2\overset{a:=\frac{p}{1-\epsilon^2}}{\Rightarrow}\frac{y^2}{1-\epsilon^2}+(x+a\epsilon)^2=a^2\Rightarrow$$

$$\begin{array}{ll}\frac{(x+a\epsilon)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1 & \mathit{für}\ \epsilon\neq 1\\ y^2=-2px+p^2 & \mathit{für}\ \epsilon=1\end{array} \quad .$$

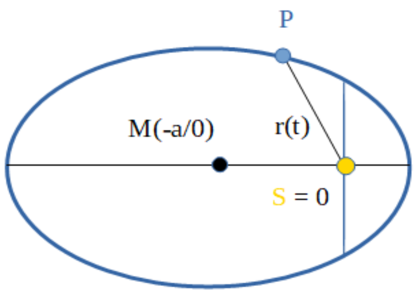
Für $\epsilon\neq 1$ Fallunterscheidung:

$$\epsilon\begin{smallmatrix}<1\\>1\end{smallmatrix}\Rightarrow\epsilon^2\begin{smallmatrix}<1\\>1\end{smallmatrix}\Rightarrow\frac{2EL^2}{\gamma^2m^3M^2}\begin{smallmatrix}<0\\>0\end{smallmatrix}\Rightarrow E\begin{smallmatrix}<0\\>0\end{smallmatrix} \quad \text{und da} \quad E=E_{pot}+E_{kin}\Rightarrow E_{kin}\begin{smallmatrix}<\\>\end{smallmatrix}-E_{pot}\Rightarrow E_{kin}\lessgtr\frac{\gamma mM}{r(t)} \quad .$$

$\epsilon<1:$ $a^2(1-\epsilon^2)>0\Rightarrow b:=\sqrt{a^2(1-\epsilon^2)}$. Die Gleichung stellt eine Ellipse dar, mit den Halbachsen a und b mit dem Ellipsenmittelpunkt bei $M(-a\epsilon/0)$. Die Sonne liegt im Ursprung. Der Abstand von Brennpunkt zu Mittelpunkt ist e. Es gilt für Ellipsen $a^2=b^2+e^2=a^2(1-\epsilon^2)+e^2\Rightarrow e=a\epsilon$. Also ist ϵ die numerische Exzentrizität und $a\epsilon$ der Abstand des Brennpunktes zum Mittelpunkt. Die Sonne liegt also im „rechten“ Brennpunkt der Ellipse.

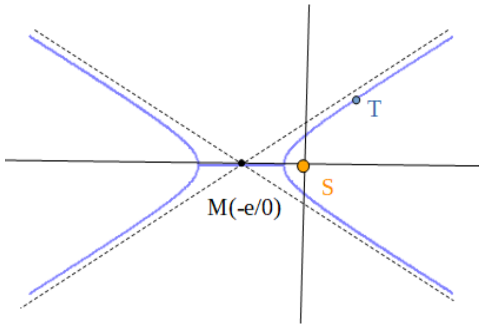
Ist $\epsilon=0$, so ist die Parabel ein Kreis mit dem Radius a, in dessen Mittelpunkt die Sonne liegt. Die kinetische Energie ist dann $E_{kin}=\gamma mM(\frac{1}{r}-\frac{m^2M}{2L^2})$.

Der Trabant der Masse m umrundet die Sonne ellipsenmäßig, falls seine kinetische Energie $E_{kin}=\frac{m}{2}v^2$ kleiner bleibt als $\frac{\gamma m M}{r(t)}$ oder seine Geschwindigkeit $v<\sqrt{\frac{2\gamma M}{r(t)}}$.



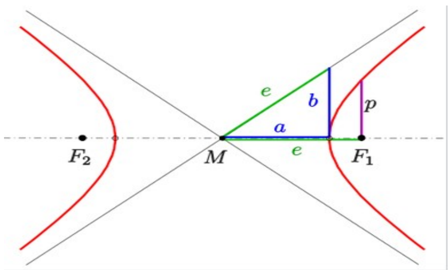
$\epsilon>1: \quad a^2(\epsilon^2-1)>0 \Rightarrow \quad \frac{(x+a\epsilon)^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1 \quad b^2:=a^2(\epsilon^2-1) \Rightarrow$

$\frac{(x+a\epsilon)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ diese Gleichung beschreibt eine Hyperbel, deren Mittelpunkt um $a\epsilon=e$ nach links verschoben ist. Hier ist $p=\frac{b^2}{a}$



hyperbolische Kometenbahn

Der Trabant T (Komet) entweicht aus dem Gravitationsfeld der Sonne, wenn die Gesamtenergie E positiv und demnach seine Geschwindigkeit $v(t)>\sqrt{\frac{2\gamma M}{r(t)}}$ ist.

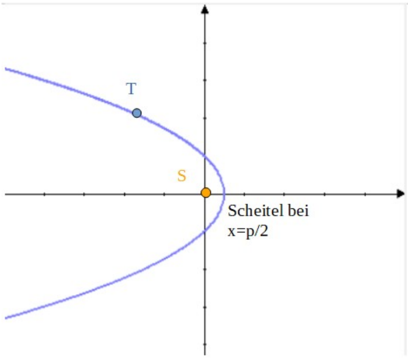


Hyperbel: Halbachsen a,b, lin. Exzentrizität e, Halbparameter p

(aus Wikipedia)

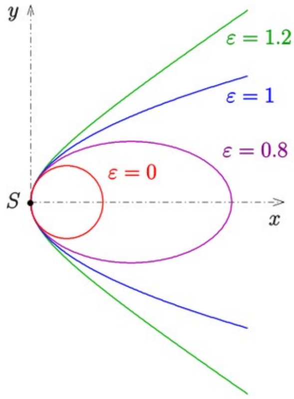
Der letzte Fall ist gegeben, wenn $\epsilon=1$, dann liegt eine Parabel vor: $y^2=-2px+p^2$ mit

$$p=\frac{L^2}{\gamma m^2 M} \quad \text{und} \quad 2EL^2=0 \Rightarrow E=0 \Rightarrow E_{kin}=\gamma\frac{mM}{r(t)} \quad \text{oder} \quad v(t)=\sqrt{\frac{2\gamma M}{r(t)}} \quad .$$

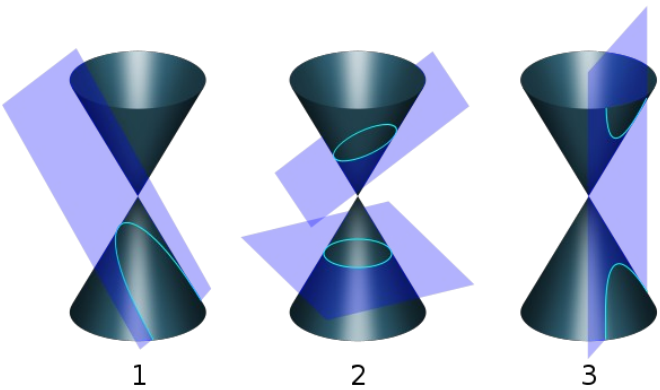


parabolische Kometenbahn

Alle vier Fälle (inklusive des Kreises) sind Kegelschnitte.



(aus Wikipedia)



(aus Wikipedia)
1:Parabel, 2:Ellipse und Kreis, 3:Hyperbel

Nun noch die **genaue Herleitung des dritten Keplerschen Satzes.** Oben habe ich das schon für die Kreisbahn und näherungsweise für die elliptische Bahn dargestellt. Exakt geht es folgendermaßen.

Auf Seite 11 wurde gezeigt: $dF = \frac{L}{2m} dt$. Die gesamte Fläche ist also $F_{ges} = \int_0^T dF = \int_0^{\frac{TL}{2m}} dt = \frac{LT}{2m}$.

Andrerseits ist die gesamte Fläche einer Ellipse πab (Herleitung siehe unten). Also gilt:

$$\frac{LT}{2m} = \pi ab \quad \text{oder} \quad T = \frac{2\pi abm}{L} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} a^2 b^2 = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} a^2 a^2 (1-\epsilon^2) \quad \text{mit} \quad 1-\epsilon^2 = \frac{2EL^2}{\gamma^2 m^3 M^2}$$

auf Seite 13 und auf Seite 14 $a = \frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{\frac{L^2}{\gamma m^2 M}}{\frac{2EL^2}{\gamma^2 m^3 M^2}} = \frac{\gamma mM}{-2E}$, also

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} \cdot \frac{\gamma mM}{-2E} \frac{2EL^2}{\gamma^2 m^3 M^2} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = konstant.$$ Das Verhältnis ist nur bestimmt durch die

Masse des Zentralgestirns (Sonne), der Gravitationskonstanten und einer Zahl, also für alle Planeten des Zentralgestirns gültig.

Zur Herleitung der Fläche F der allgemeinen Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder $y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$:

$F = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$. Substitution: $\frac{x^2}{a^2} = \sin^2 z \Rightarrow x = a \sin z ; \frac{dx}{dz} = a \cos z \Rightarrow$

$$\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \int_0^{\pi/2} a \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 z}}_{\cos z} a \cos z \, dz = a \int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, dz \quad .$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, dz \overset{\text{partielle Integration}}{=} [\sin z \cos z]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1 - \cos^2 z \, dz \Rightarrow 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, dz = [z + \sin z cos z]_0^{\pi/2} \Rightarrow$$

$\int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, dz = \frac{\pi}{4}$. Also ist $F = 4b \cdot a \int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, dz = 4ab \cdot \frac{\pi}{4} = \pi ab$.

Damit ist auch das dritte Keplersche Gesetz und damit sind alle Keplerschen Gesetze aus der Newtonschen Theorie hergeleitet.