Inwieweit ist Mathematik eine Konstruktion des Menschen und inwieweit nicht?

Manfred Hörz

Brouwer und Wittgenstein hielten die Mathematik für reine Konstruktion des Menschen. Nicht so Gödel, der platonische und leibnizsche Wurzeln hatte.

Ich meine, dass Logik nicht primär auf der Sprache beruht, sondern umgekehrt, dass Sprache einige Elemente aus der Problematik der Begriffsbildung inkarniert hat. Es ist interessant zu sehen, wie Kisuaheli eine schöne klare Logik besitzt und man kann bestimmt nicht sagen, dass sie indoeuropäische Wurzeln habe oder von dieser Sprachgruppe beeinflusst sei. Sie ist sehr bemerkenswert, weil sie diese Logik mit einer Emotionalität verbindet, die der europäischen Logik abhanden kommt. Ich vermute, ihn ihr sind die Reste der frühen Verhältnisse aufbewahrt.

Wo fängt Mathematik an? Sind es die Zahlen, das ureigene Gebiet der Mathematik oder doch eher die Logik, die unbestreitbar eine zentrale Rolle in der Mathematik spielt? Oder ist es die Geometrie oder vielmehr die Topologie, die Anspruch auf den primären Bereich der Mathematik hat?

Meines Erachtens ist folgende Reihenfolge rekonstruierbar: Topologie, Logik, Arithmetik.
Ein zusätzlicher Aspekt, der in diesem Kontext zu berücksichtigen ist, ist die Natur und die Gesellschaft.

Der Ansatz, der zunächst eingenommen werden muss ist die Anthropologie, die Kant als übergreifende Einheit seiner drei Problemkreise („was kann ich wissen, was soll ich tun, was darf ich hoffen") gesehen hat. Und der Ansatz ist so früh wie möglich zu nehmen: Der geborene Mensch, das Kind. Nur in der frühen Entwicklung lassen sich die noch uneingefrorenen Elemente detektieren.

Erkennen heißt Lieben. Und Lieben heißt das Fremde wollen. Das Erste, was der Mensch erkennt oder besser erahnt und in einem tiefen Sinn weiß ist das, was vergangen ist. Das Adyton. Das Heilige, sein vergangener und nicht mehr betretbarer Ort. Er imaginiert ihn als seine Welt, die notwendigerweise seine Umwelt ist, deren Zentrum er war. Hathor. Das Haus der Kindes, des Horus. Wie man später entdecken wird in den Naturwissenschaften ist auch kein Etwas ohne diesen primären Ort möglich. Dieser zeitlose Ort, der Topos, ist das Thema der Topologie. Den imaginierten Ersatz nenne ich die Situation des Menschen. Sie ist das Ganze, das die Trennung enthält und als Ganzes nur virtuell ist: dieser Topos ist zugleich der Utopos. Er spannt die Vergangenheit ebenso wie die Zukunft auf. Er ist die Quelle der normativen Sollens, demgegenüber das Ist zunächst und einerseits die Verzweiflung ist, die aus der Trennung entstand und so letztlich das Nichtist ist. Diese schizophrene Faktum ist nur auf der Folie der vergangenen Einheit denkbar und trägt von Anfang an das Normative in sich, die Vernichtung seiner selbst: das Sein, das aber immer das Nichtsein in sich tragen wird: es ist eine Division mit ständigem Rest.
Diese Negation der Negation, d.h. der Versuch und der Wille, diese vergangene Einheit in der Trennung wieder herzustellen ist kein empirisches Faktum, sondern ermöglicht erst Erfahrung. Diese Wiederherstellung ist aber größtenteils imaginativ, sie beginnt mit der bescheidenen Erinnerung an die Transzendenz des Gewesenen und verarbeitet jede Situation, die diese Erinnerung weckt und sie als partiell aktualisiert empfindet zu Schemata. Sie überlagert alle diese angenehmen Situationen, wodurch ihre mangelnde Qualität scheinbar gesteigert wird. Das Kind, dessen Identität in der Differenz liegt, integriert diese ambivalenten Situationen wie gesagt zu Schemata. Das Denken ist Andenken und Verdichten, das später Erfahrung erzeugt.

Kurzum in der Reihe dieser sukzessiven Verdichtungen, die einander immer ähnlicher werden, „so Gott will“[1], wird es einrasten und sein erstes Bild erzeugen, als endlicher selbst gesetzter Grenzwert. Das ist die erste Stufe der Logik. Sein psychisches Verlangen der Reintegration wird nun logisch gefestigt. Seine psychische Erwartung einer zukünftigen Befriedung wird zur logischen Erwartung, so und so befrieden zu werden. Seine kreative Aktivität dieser Erwartung ermöglicht nun, wenn die nächste Situation seiner logischen Erwartung entspricht, zu erfahren, dass sein Bild eingetroffen ist, insofern diese Situation einbettbar ist in die Folge seiner Schematisierungen. Sie passt. Es ist interessant zu sehen, wie dieses Passen, dessen Ursprung ein ganz anderer ist, nun zum logischen Passen sich verflüchtigt hat. Das ist das Problem der Wahrheit und der Bedeutung. Denn das ursprüngliche Passen ist immer nur im Nachherein bemerkbar, wenn es unwiederbringlich verloren ist: es hatte sozusagen gepasst. Das Kind befriedet sich nun in dem Gedanken, dass die erlebte Situation in sein Grenzschema passt. Das ist das logische Erkennen. Wohl etwas anderes als das Erkennen der Liebe. Es befriedet sich vorallem darin, dass es in der Ähnlichkeit „sich“ wiederfindet und nicht im Fremden.
Aber es bedarf einiger Zutaten, damit eine solch konvergierende Folge von Situationen möglich wird und die sind nicht logischer Art. Die Situationen, die überlagert werden, sind kommunikativer Art im breitesten Sinn. Am einfachsten ist es die Mutter, der Vater, die dem Kind eine gewisse Regelmäßigkeit gewähren und so die Konvergenz ermöglichen. Diese Regelmäßigkeit ist aber im günstigen Fall zuvor auch i.a. durch die Gesellschaft erzeugt und durch eine entsprechende der Natur. Wären beide chaotisch, so ist der Bildbildung kein Erfolg beschieden. Glücklich die Epochen, wo solches stattfindet.
Doch nicht nur diese Regelmäßigkeiten und Gewohnheiten sozialer und natürlicher Art sind notwendig, sondern auch deren Gegenteil. Ginge alles unter diese Bildbildung, wäre das Resultat ein sehr primitives Weltbild. Gerade dadurch, dass es Situationen gibt, die sich dieser Integration verweigern, sei es von mitmenschlicher oder gesellschaftlicher oder natürlicher Seite aus, wird es möglich, eine neue Folge von Situationsschemata zu bilden, die gerade Gegenbeispiele der ersten Folge sind. Die Geburtstrennung hat hier ihren Widerhall und zeigt wie fruchtbar das Gegenteil wirkt, also die Differenzierung. Ich möchte das jetzt nicht weiter ausführen, da man die Logik der Begriffsbildung und Wissenschaft unschwer erkennen kann, die nur eine Weiterführung dieser ersten Schritte sind.
Wir haben also in nucleo die Prädikatenlogik und Topologie des Innen und Außen feststellbar gemacht. Wo tauchen die Zahlen aber auf, also das klassische Gebiet der Arithmetik?

Das ist eine Stufe höher als das bisher Gesagte, wo aber die gleichen Momente wieder in anderer Gestalt auftreten. Das ganze Bestreben des Kindes (und der Wissenschaften) bestand darin, das Auseinanderfallen zu verhindern, sei es im ersten Bild oder den weiteren Bildern oder wenn man will Begriffen. Diese Integrationen ist nichts Empirisches, sondern apriorische Leistung des Kindes.

Die zweite wesentliche Geburt ist jetzt nicht die selbst erlebte, sondern die Duplizierung seiner Objekte. Wenn das Kind fremdelt, bemerkt es bspw. das nicht jede Frau, die ihrer Mutter ähnlich sieht, seine Mutter ist. Oder anders gesagt, es erlebt, wie seine Bemühungen die Situationen unter einen Hut zu bringen, plötzlich scheitern. Wenn es seine zeitlichen Reihen der Situationen, sagen wir Apfelsituationen zu dem einen Apfel integriert hat und so den Apfel morgen erkennen kann, so stellt es nun fest, dass im Raume plötzlich diese Integration nicht mehr gelingt: zwei Äpfel sind anwesend. Das ist ein kleiner Schock. Die Zeit, die sich in der Folge von angenehmen Anwesenheitssituationen und unangenehmen Abwesenheitssituationen zyklisch kundtat und im Begriff kondensiert („ewig“) wurde, zeigt sich nun als schrecklicher Raum, der die Integration verwehrt. Der erste Topos von Innen und Außen ist zum Topos der Trennungsaxiome avanciert. Die bisherigen Trennungen waren Abwesenheitssituationen, diese sind aber Anwesenheitssituationen, in denen sich das Nichtsein nicht mehr in der Folge negieren lässt. Sie sind hartnäckig bestehend.

1 Wir werden noch sehen, was in dieser Metapher steckt

Die Lösung ist der Begriff höherer Art, der eine neue Integration ermöglicht. Die Zahl Zwei vereint alle bekannten Paare von Gegenständen. Auf dieser Folie wird rückblickend die Zahl Eins konstruiert und dann durch weitere Beziehungen[2] die anderen Zahlen. Zwei, Eins, Drei, …

Nicht nur die Zeit im Begriff, sondern auch der Raum in der Zahl wird als dem Integrationswillen widrigen Hindernisses überwunden. Die Faszination der Logik und der Arithmetik und ihrer inneren Beziehungen ist so nicht verwunderlich. Im Raum und in der Zeit zeigen sich aber Elemente der Natur, die dem Logiker und dem Arithmetiker zunächst fremd sind. Aber sie lassen sich nicht abweisen.

Zurück zur Frage des Artikels. Mathematik im Sinne der Topologie ist also einerseits eine Konstruktion des Menschen, indem er die Situation imaginiert. Andrerseits aber auch nicht, wenn man den später bemerkten Raum als Trennungseigenschaft feststellt, da er Teil der befremdenden Natur ist. Die Zahl ist also eine Kombination des Einheitsstrebens des Menschen und der es zunächst behindernden Räumlichkeit, ohne die es keinen Zahlbegriff gäbe.

Bei der Logik ist es etwas komplizierter. Sie ist zunächst ein inhärentes Aktionsprinzip des Menschen, also das Zusammenlegen zu Schemata einerseits und andrerseits der Fixierung eines Grenzwertes A dieser Folge, der besagt, dass eine neue Situation S als eine A-Situation bestimmt wird, wenn sie hinreichend in diese Endfolge passt. Diese zeitliche Prädikation „S ist A“ ist aber unscharf, da der Grenzwert selbst unscharf ist. Eine frühere Situation, die erst am Anfang der Folge zu einem Folgenglied führte ist naturgemäß im späteren Verlauf viel vager als die späteren passenden Folgenglieder. Bei dieser frühen Situation S_i lässt sich der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, ob sie A ist oder nicht A ist nicht entscheiden, da sie zu den Konstituenten von A gehört. Nehmen wir ein einfaches Beispiel, die (allerdings unendliche) Nullfolge $S_n = \frac{1}{n}$, deren Grenzwert A=0 ist. 10^{-99} und 10^{-100} sind hinreichend ähnlich, um sie (wie die Physiker gerne machen) als Null zu deklarieren. Aber was ist mit dem Folgenglied $\frac{1}{2}$? Soll man es als Null oder Eins angeben, da man es ja auch als Glied der Folge $\frac{n-1}{n}$ ansehen kann? Zu sagen ½ wäre Null und Nicht- Null (Eins) ist also genauso gerechtfertigt. Es ist nun aber so, dass selbst „Endglieder“ einer Folge auch Endglieder einer anderen Folge sein können. Man kann jede Folge ab jedem Index in verschiedene Fortsetzungen aufspalten.
Oder ein etwas natürlicheres Beispiel. Nimmt man den Spin eines Elektrons, der eine Überlagerung von up und down ist, bevor er festgestellt ist, ist er weder up noch down, sondern unbestimmt. Obwohl wenn gemessen wird entweder das eine oder das andere ist, wenn er definitiv up ist sicherlich nicht down ist. Hier gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, aber nicht vorher. Vorher ist er sozusagen up und down, eben in einer Überlagerung. Logik in dieser abgeschwächten Form ist also nicht nur ein Konstrukt des Menschen, sondern regelt die „Objektivität“.

Das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten war auch ein Streitpunkt zwischen Formalisten und Konstruktivisten, speziell zwischen Hilbert und Brouwer. Dieser Streit betraf aber nicht die eben behandelte Problematik der Unschärfe, sondern lag auf einer höheren Ebene, der Unendlichkeit. Dieses Prinzip liegt dem indirekten Beweis zugrunde. Will man A beweisen, so versucht man nicht-A zu widerlegen. Da aber es zwischen A und nicht-A kein Drittes gibt, ist die Widerlegung von Nicht-A das Gleiche wie der Beweis von A. Euklid hatte bereits diese indirekte Beweismethode verwendet bei dem Versuch zu zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Der Beweis ging etwa so: Nimmt man das Gegenteil an, dass es also nur endlich viele Primzahlen gäbe, dann kann man sie der Größe nach auflisten $p_1, p_2, \ldots, p_n$, wobei p_n die größte Primzahl ist. Dann bilde man

2 Diese interessieren hier nicht unmittelbar. Eine gute Diskussion geht hier auf die Unterschiede von Platon und Piano ein.

das Produkt dieser Zahlen und addiere noch eins: $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Dann lässt sich leicht zeigen, dass m auch Primzahl sein muss: denn m ist nur durch 1 und m teilbar. Nimmt man an, dass es noch einen anderen Teiler z gäbe, so müsste er kleiner als m sein. z kann aber keine der Primzahlen sein, da bei der Teilung immer der Rest 1 bleibt. Also ist z selbst ein Produkt von einigen der angegebenen Primzahlen, was aber zu dem gleichen unmöglichen Ergebnis führte, d.h. dass z nicht Teiler sein kann wegen des Restes 1. Also ist m Primzahl und größer als p_n.
Zu jeder vermeintlich größten Primzahl lässt sich also noch eine größere finden. Doch diese Argumentation geht ins Leere. Sie setzt voraus, dass solche Konstruktionen $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ zu weiteren Zahlen (speziell Primzahlen) führen. Das gleiche Problem liegt in der Behauptung, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Die Argumentation ist noch elementarer. Annahme des Gegenteils: es gibt nur endlich viele. Dann kann man die größte n angeben. Um das zu widerlegen braucht man ja nur zu n 1 addieren und schon hat man eine größere. Man vergisst hier, dass Zahlen um Zahlen sein zu können, in irgendeiner Weise realisiert sein müssen und nicht nur Hirngespinste sein können. Selbst ein Gedanke schwebt nicht im „luftleeren“ Raum. Er erfordert oder beinhaltet eine bestimmte Energiemenge. Die Gesamtenergie E_g ist aber endlich. Wäre sie unendlich, so wäre $E_g = E_g + 1$ und zumindest der Energieerhaltungssatz verletzt, der sowohl Grundlage der Quantenmechanik als auch der Relativitätstheorie ist. Aber der Gedanke selbst der Unendlichkeit verwechselt schon das Produkt (die erzeugte Zahl) mit dem Produktionsprozess: $n \Rightarrow n+1$, der als Schema stets möglich sein soll. Das ist ein Begriffsproblem, das ungelöst letztlich zum Formalismus führt. Ich habe es oben kurz angesprochen. Der Begriff der (arithmetischen) Unendlichkeit ist einer der größten menschlichen Geistesverwirrungen. Ich habe das an anderer Stelle ausführlicher behandelt.
Insofern stimme ich Brouwer zu, dass der indirekte Beweis bei unendlichen Größen problematisch ist, aber vorallem weil er Unendlichkeiten annimmt. Aber auch im Endlichen ist er problematisch, da das Prinzip der ausgeschlossenen Dritten nur auf der Grenzwertebene vorübergehend sinnvoll sein kann, weil es dem menschlichen Bedürfnis nach Klarheit, Sicherheit und Distinktheit entspricht. Aber ob das Prinzip des Sollens (Bedürfnisses) so mächtig ist, dass es die gesamte Natur bestimmt, ist doch mehr als fraglich oder klar gesprochen: falsch. Das Bedürfnis hat seine Grenze dort, wo das Andere, das Fremde auftritt. Ein Heilmittel gegen den Größenwahnsinn und letztlich gegen die Vereinsamung.