Die unvernünftige Wirksamkeit der Mathematik in den Naturwissenschaften

von Eugene Wigner

„Die unvernünftige Wirksamkeit der Mathematik in den Naturwissenschaften“, in Communications in Pure and Applied Mathematics, Bd. 13, Nr. I (Februar 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc.

> Mathematik, richtig betrachtet, besitzt nicht nur Wahrheit, sondern auch höchste Schönheit, eine Schönheit, die kalt und streng ist wie die der Bildhauerei, ohne Anziehungskraft auf irgendeinen Teil unserer schwächeren Natur, ohne die prächtigen Verzierungen von Malerei oder Musik, und doch erhaben rein und leistungsfähig von einer strengen Perfektion, wie sie nur die größte Kunst zeigen kann. Der wahre Geist der Freude, der Begeisterung, das Gefühl, mehr zu sein als der Mensch, der der Prüfstein für höchste Exzellenz ist, ist in der Mathematik ebenso sicher zu finden wie in der Poesie.
>
> --BERTRAND RUSSELL, Study of Mathematics

ES GIBT EINE Geschichte über zwei Freunde, die in der High School Klassenkameraden waren und über ihren Job redeten. Einer von ihnen wurde Statistiker und beschäftigte sich mit Bevölkerungstrends. Er zeigte seinem ehemaligen Klassenkameraden einen Nachdruck. Der Nachdruck begann wie üblich mit der Gaußverteilung und der Statistiker erklärte seinem ehemaligen Klassenkameraden die Bedeutung der Symbole für die tatsächliche Bevölkerung, für die Durchschnittsbevölkerung usw. Sein Klassenkamerad war etwas ungläubig und war sich nicht ganz sicher, ob der Statistiker ihn ärgerte. „Wie kannst du das wissen?“ war seine Frage. „Und was ist dieses Symbol hier?“ „Oh“, sagte der Statistiker, „das ist Pi.“ "Was ist das?" „Das Verhältnis des Umfangs des Kreises zu seinem Durchmesser.“ „Nun, jetzt treibst du deinen Witz zu weit“, sagte der Klassenkamerad, „die Bevölkerung hat doch sicher nichts mit dem Umfang des Kreises zu tun.“

Natürlich neigen wir dazu, über die Einfachheit des Ansatzes des Klassenkameraden zu lächeln. Dennoch musste ich zugeben, dass ich ein unheimliches Gefühl hatte, als ich diese Geschichte hörte, denn die Reaktion des Klassenkameraden verriet sicherlich nur den gesunden Menschenverstand. Ich war noch verwirrter, als nicht viele Tage später jemand zu mir kam und seine Verwirrung[1] darüber zum Ausdruck brachte, dass wir eine ziemlich enge Auswahl bei den Daten machen, anhand derer wir unsere Theorien testen. „Woher wissen wir, dass wir, wenn wir eine Theorie aufstellen, die ihre Aufmerksamkeit auf Phänomene richtet, einige der Phänomene, die jetzt unsere Aufmerksamkeit erfordern, außer Acht lassen, dass wir keine andere Theorie aufstellen könnten, die wenig mit der gegenwärtigen gemein hat, die aber dennoch genauso viele Phänomene wie die vorliegende Theorie erklärt?“ Es muss zugegeben werden, dass wir keine eindeutigen Beweise dafür haben, dass es keine solche Theorie gibt.

Die beiden vorangegangenen Geschichten veranschaulichen die beiden Hauptpunkte, die Gegenstand des vorliegenden Diskurses sind. Der erste Punkt ist, dass mathematische Konzepte in völlig unerwarteten Zusammenhängen auftauchen. Darüber hinaus erlauben sie oft eine unerwartet

---

1 Die zu zitierende Bemerkung wurde von F. Werner gemacht, als er Student in Princeton war.

genaue Beschreibung der Phänomene in diesen Zusammenhängen. Zweitens können wir gerade aufgrund dieses Umstands und weil wir die Gründe für ihre Nützlichkeit nicht verstehen, nicht wissen, ob eine in mathematischen Konzepten formulierte Theorie eindeutig angemessen ist. Wir befinden uns in einer ähnlichen Situation wie ein Mann, dem ein Schlüsselbund zur Verfügung gestellt wurde und der, der mehrere Türen hintereinander öffnen muss, beim ersten oder zweiten Versuch immer den richtigen Schlüssel erwischt. Er wurde skeptisch gegenüber der Einzigartigkeit der Koordination zwischen Schlüsseln und Türen.

Das meiste, was zu diesen Fragen gesagt wird, wird nicht neu sein; Wahrscheinlich ist es den meisten Wissenschaftlern in der einen oder anderen Form schon einmal in den Sinn gekommen. Mein Hauptziel ist es, es von mehreren Seiten zu beleuchten. Der erste Punkt ist, dass der enorme Nutzen der Mathematik in den Naturwissenschaften an etwas Geheimnisvolles grenzt und dass es dafür keine rationale Erklärung gibt. Zweitens ist es gerade diese unheimliche Nützlichkeit mathematischer Konzepte, die die Frage nach der Einzigartigkeit unserer physikalischen Theorien aufwirft. Um den ersten Punkt zu verdeutlichen, dass Mathematik in der Physik eine unvernünftig wichtige Rolle spielt, ist es nützlich, ein paar Worte zu der Frage zu sagen: „Was ist Mathematik?“, dann „Was ist Physik?“ und dann wie Mathematik Teil der physikalischen Theorien ist und schließlich, warum der Erfolg der Mathematik in ihrer Rolle in der Physik so verwirrend erscheint. Zum zweiten Punkt, der Einzigartigkeit der Theorien der Physik, wird deutlich weniger gesagt. Eine angemessene Antwort auf diese Frage würde umfangreiche experimentelle und theoretische Arbeiten erfordern, die bisher noch nicht durchgeführt wurden.

Was ist Mathematik?

Jemand hat einmal gesagt, Philosophie sei der Missbrauch einer Terminologie, die nur zu diesem Zweck erfunden wurde[2]. Im gleichen Sinne würde ich sagen, dass Mathematik die Wissenschaft geschickter Operationen mit Konzepten und Regeln ist, die nur für diesen Zweck erfunden wurden. Der Schwerpunkt liegt auf der Erfindung von Konzepten. Der Mathematik würden bald die interessanten Theoreme ausgehen, wenn diese anhand der Konzepte formuliert werden müssten, die bereits in den Axiomen vorkommen. Darüber hinaus ist es zweifellos wahr, dass die Konzepte der elementaren Mathematik und insbesondere der elementaren Geometrie formuliert wurden, um Entitäten zu beschreiben, die direkt von der tatsächlichen Welt suggeriert werden. Das Gleiche scheint jedoch nicht für die fortgeschritteneren Konzepte zu gelten, insbesondere für die Konzepte, die spielen in der Physik eine so wichtige Rolle. Daher sind die Regeln für Operationen mit Zahlenpaaren offensichtlich darauf ausgelegt, die gleichen Ergebnisse zu liefern wie die Operationen mit Brüchen, die wir zunächst ohne Bezug auf „Zahlenpaare“ gelernt haben. Die Regeln für die Operationen mit Folgen, also mit irrationalen Zahlen, gehören immer noch zu der Kategorie der Regeln, die so festgelegt wurden, dass sie Regeln für die Operationen mit Größen reproduzieren, die uns bereits bekannt waren. Die meisten fortgeschritteneren mathematischen Begriffe wie komplexe Zahlen, Algebren, lineare Operatoren, Borel-Mengen – und diese Liste ließe sich fast endlos fortsetzen – waren so konzipiert, dass sie geeignete Themen darstellen, bei denen der Mathematiker seinen Einfallsreichtum und seinen Sinn für formale Schönheit unter Beweis stellen kann. Tatsächlich ist die Definition dieser Begriffe mit der Erkenntnis, dass interessante und geniale Überlegungen auf sie angewendet werden könnten, der erste Beweis für die Genialität des Mathematikers, der sie definiert. Die Tiefe des Nachdenkens, die in die Formulierung der mathematischen Konzepte einfließt, wird später durch die Geschicklichkeit gerechtfertigt, mit der diese Konzepte verwendet werden. Der große Mathematiker nutzt den Bereich des zulässigen Denkens vollständig, fast rücksichtslos aus und umgeht das Unzulässige. Dass seine

2 Diese Aussage ist hier zitiert aus W. Dubislavs „Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart“ (Berlin: Junker und Dunnhaupt Verlag, 1932), S. 1.

Rücksichtslosigkeit ihn nicht in einen Sumpf von Widersprüchen führt, ist an sich schon ein Wunder: Sicherlich ist es kaum zu glauben, dass unser Denkvermögen durch Darwins Prozess der natürlichen Auslese zu der Perfektion gebracht wurde, die es zu besitzen scheint. Dies ist jedoch nicht unser aktuelles Thema. Der Hauptpunkt, der später in Erinnerung gerufen werden muss, ist, dass der Mathematiker nur eine Handvoll interessanter Theoreme formulieren konnte, ohne Konzepte zu definieren, die über die in den Axiomen enthaltenen hinausgehen, und dass die Konzepte außerhalb der in den Axiomen enthaltenen Konzepte definiert werden, um eine raffinierte Logik zu ermöglichen Operationen, die sowohl als Operationen als auch in ihren Ergebnissen von großer Allgemeinheit und Einfachheit unseren ästhetischen Sinn ansprechen[3].

Ein besonders eindrucksvolles Beispiel hierfür sind die komplexen Zahlen. Sicherlich deutet unserer Erfahrung nach nichts auf die Einführung dieser Mengen hin. Wenn ein Mathematiker tatsächlich gebeten wird, sein Interesse an komplexen Zahlen zu begründen, wird er mit einiger Empörung auf die vielen schönen Theoreme in der Theorie der Gleichungen, der Potenzreihen und der analytischen Funktionen im Allgemeinen verweisen, denen ihr Ursprung die Einführung komplexer Zahlen zu verdanken ist. Der Mathematiker ist nicht bereit, sein Interesse an diesen schönsten Leistungen seines Genies aufzugeben[4].

Was ist Physik?

Der Physiker ist daran interessiert, die Gesetze der unbelebten Natur zu entdecken. Um diese Aussage zu verstehen, ist es notwendig, den Begriff „Naturgesetz“ zu analysieren.

Die Welt um uns herum ist von verwirrender Komplexität und die offensichtlichste Tatsache daran ist, dass wir die Zukunft nicht vorhersagen können. Obwohl der Witz nur dem Optimisten die Ansicht zuschreibt, dass die Zukunft ungewiss sei, hat der Optimist in diesem Fall Recht: Die Zukunft ist unvorhersehbar. Es ist, wie Schrödinger bemerkt hat, ein Wunder, dass trotz der verblüffenden Komplexität der Welt gewisse Regelmäßigkeiten in den Ereignissen entdeckt werden konnten. Eine solche von Galilei entdeckte Regelmäßigkeit besteht darin, dass zwei Steine, die gleichzeitig aus derselben Höhe fallen gelassen werden, gleichzeitig den Boden erreichen. Die Naturgesetze befassen sich mit solchen Gesetzmäßigkeiten. Galileis Regelmäßigkeit ist ein Prototyp einer großen Klasse von Regelmäßigkeiten. Aus drei Gründen ist es eine überraschende Regelmäßigkeit.

Der erste Grund, warum es überraschend ist, ist, dass es nicht nur in Pisa, sondern zu Galileis Zeiten überall auf der Erde wahr ist, immer wahr war und immer wahr sein wird. Diese Eigenschaft der Regelmäßigkeit ist eine anerkannte Invarianzeigenschaft, und wie ich vor einiger Zeit Gelegenheit hatte, darauf hinzuweisen, wäre die Physik ohne Invarianzprinzipien, die denen ähneln, die in der vorhergehenden Verallgemeinerung von Galileis Beobachtung impliziert wurden, nicht möglich. Das zweite überraschende Merkmal besteht darin, dass die Regelmäßigkeit, von der wir sprechen, unabhängig von so vielen Bedingungen ist, die einen Einfluss auf sie haben könnten. Es gilt unabhängig davon, ob es regnet oder nicht, ob das Experiment in einem Raum oder vom Schiefen Turm aus durchgeführt wird, unabhängig davon, ob die Person, die die Steine fallen lässt, ein Mann oder eine Frau ist. Dies gilt auch dann, wenn die beiden Steine gleichzeitig und aus derselben Höhe von zwei verschiedenen Personen fallen gelassen werden. Offensichtlich gibt es unzählige andere

---

3 M. Polanyi sagt in seinem Buch Personal Knowledge (Chicago: University of Chicago Press, 1958): „Alle diese Schwierigkeiten sind nur Folgen unserer Weigerung zu erkennen, dass Mathematik nicht definiert werden kann, ohne ihr offensichtlichstes Merkmal anzuerkennen: nämlich das es interessant ist.“ (S. 188).

4 Der Leser könnte in diesem Zusammenhang an Hilberts ziemlich gereizten Bemerkungen über den Intuitionismus interessiert sein, der „die Mathematik aufzubrechen und zu entstellen versucht“, Abh. Mathematik. Sem., Univ. Hamburg, 157 (1922), oder Gesammelte Werke (Berlin: Springer, 1935), S. 188.

Bedingungen, die alle für die Gültigkeit der Regelmäßigkeit Galileis unerheblich sind. Die Irrelevanz so vieler Umstände, die bei dem beobachteten Phänomen eine Rolle spielen könnten, wurde auch als Invarianz bezeichnet. Diese Invarianz hat jedoch einen anderen Charakter als die vorhergehende, da sie nicht als allgemeines Prinzip formuliert werden kann. Die Erforschung der Bedingungen, die ein Phänomen beeinflussen und welche nicht, ist Teil der frühen experimentellen Erforschung eines Gebiets. Es sind die Fähigkeiten und der Einfallsreichtum des Experimentators, die ihm Phänomene zeigen, die von einer relativ engen Reihe relativ leicht realisierbarer und reproduzierbarer Bedingungen abhängen[5]. Im vorliegenden Fall war Galileis Beschränkung seiner Beobachtungen auf relativ schwere Körper der wichtigste Schritt in dieser Hinsicht. Auch hier ist es wahr, dass die Physik unmöglich wäre, wenn es keine Phänomene gäbe, die von allen bis auf eine überschaubar kleine Menge von Bedingungen unabhängig wären.

Obwohl die beiden vorangehenden Punkte aus der Sicht des Philosophen von großer Bedeutung sind, haben sie Galilei nicht am meisten überrascht, und sie enthalten auch kein spezifisches Naturgesetz. Das Naturgesetz ist in der Aussage enthalten, dass die Zeit, die ein schwerer Gegenstand benötigt, um aus einer bestimmten Höhe zu fallen, unabhängig von der Größe, dem Material und der Form des fallenden Körpers ist. Im Rahmen von Newtons zweitem „Gesetz" läuft dies auf die Aussage hinaus, dass die Gravitationskraft, die auf den fallenden Körper wirkt, proportional zu seiner Masse, aber unabhängig von der Größe, dem Material und der Form des fallenden Körpers ist.

Die vorangehende Diskussion soll uns zunächst daran erinnern, dass es keineswegs natürlich ist, dass „Naturgesetze" existieren, geschweige denn, dass der Mensch in der Lage ist, sie zu entdecken[6]. Der Autor hatte vor einiger Zeit Gelegenheit, die Aufmerksamkeit auf die Abfolge von Schichten von „Naturgesetzen" zu lenken, wobei jede Schicht allgemeinere und umfassendere Gesetze enthielt als die vorherige und ihre Entdeckung stellen einen tieferen Einblick in die Struktur des Universums dar als die zuvor erkannten Schichten. Der wichtigste Punkt im vorliegenden Zusammenhang ist jedoch, dass alle diese Naturgesetze selbst in ihren entferntesten Konsequenzen nur einen kleinen Teil unseres Wissens über die unbelebte Welt enthalten. Alle Naturgesetze sind bedingte Aussagen, die eine Vorhersage einiger zukünftiger Ereignisse auf der Grundlage des Wissens über die Gegenwart ermöglichen, mit der Ausnahme, dass einige Aspekte des gegenwärtigen Zustands der Welt, in der Praxis die überwältigende Mehrheit der Determinanten des gegenwärtigen Zustands der Welt, aus Sicht der Vorhersage irrelevant sind. Die Irrelevanz ist im Sinne des zweiten Punktes der Diskussion des Satzes von Galilei gemeint[7].

Über den gegenwärtigen Zustand der Welt, etwa die Existenz der Erde, auf der wir leben und auf der Galileis Experimente durchgeführt wurden, die Existenz der Sonne und unserer gesamten Umgebung, schweigen die Naturgesetze völlig. Dies steht erstens im Einklang damit, dass die Naturgesetze nur unter außergewöhnlichen Umständen zur Vorhersage zukünftiger Ereignisse genutzt werden können, wenn alle relevanten Determinanten des gegenwärtigen Zustands der Welt bekannt sind. In diesem Zusammenhang gilt auch, dass die Konstruktion von Maschinen, deren Funktionsweise er vorhersehen kann, die spektakulärste Leistung des Physikers darstellt. Bei diesen Maschinen stellt der Physiker eine Situation her, in der alle relevanten Koordinaten bekannt sind,

---

5 Siehe in diesem Zusammenhang den grafischen Aufsatz von M. Deutsch, Daedalus 87, 86 (1958). A. Shimony hat meine Aufmerksamkeit auf eine ähnliche Passage in C. S. Peirces Essays in the Philosophy of Science (New York: The Liberal Arts Press, 1957), S. 237 gelenkt.

6 E. Schrödinger, in seinem Werk „Was ist Leben?" (Cambridge: Cambridge University Press, 1945), S. 31, sagt, dass dieses zweite Wunder durchaus jenseits des menschlichen Verständnisses liegen könnte.

7 Der Autor ist sich sicher, dass es unnötig ist zu erwähnen, dass der Satz von Galilei, wie er im Text dargelegt wird, den Inhalt von Galileis Beobachtungen im Zusammenhang mit den Gesetzen frei fallender Körper nicht erschöpft.

sodass das Verhalten der Maschine vorhergesagt werden kann. Beispiele für solche Maschinen sind Radargeräte und Kernreaktoren.

Der Hauptzweck der vorangehenden Diskussion besteht darin, darauf hinzuweisen, dass die Naturgesetze allesamt bedingte Aussagen sind und sich nur auf einen sehr kleinen Teil unseres Wissens über die Welt beziehen. So liefert die klassische Mechanik, der bekannteste Prototyp einer physikalischen Theorie, die zweiten Ableitungen der Positionskoordinaten aller Körper auf der Grundlage der Kenntnis der Positionen usw. dieser Körper. Es gibt keine Informationen über die Existenz, die gegenwärtigen Positionen oder Geschwindigkeiten dieser Körper. Der Genauigkeit halber sollte erwähnt werden, dass wir vor etwa dreißig Jahren entdeckt haben, dass selbst die bedingten Aussagen nicht völlig präzise sein können: dass die bedingten Aussagen Wahrscheinlichkeitsgesetze sind, die es uns nur ermöglichen, intelligente Wetten auf zukünftige Eigenschaften der unbelebten Welt abzuschließen, basierend auf dem Wissen des gegenwärtigen Zustandes. Sie gestatten es uns nicht, kategorische Aussagen zu machen, nicht einmal kategorische Aussagen, die vom gegenwärtigen Zustand der Welt abhängig sind. Der probabilistische Charakter der „Naturgesetze" zeigt sich auch bei Maschinen und kann zumindest bei Kernreaktoren überprüft werden, wenn man sie mit sehr geringer Leistung betreibt. Die zusätzliche Einschränkung des Anwendungsbereichs der Naturgesetze, die sich aus ihrer probabilistischen Natur ergibt, wird im weiteren Verlauf der Diskussion jedoch keine Rolle spielen.

Die Rolle der Mathematik in physikalischen Theorien

Nachdem wir unseren Geist über das Wesen von Mathematik und Physik aufgefrischt haben, sollten wir besser in der Lage sein, die Rolle der Mathematik in physikalischen Theorien zu überprüfen.

Natürlich nutzen wir die Mathematik in der Alltagsphysik, um die Ergebnisse der Naturgesetze zu bewerten und die bedingten Aussagen auf die besonderen Bedingungen anzuwenden, die gerade vorherrschen oder uns interessieren. Damit dies möglich ist, müssen die Naturgesetze bereits in mathematischer Sprache formuliert sein. Allerdings ist die Bewertung der Konsequenzen bereits etablierter Theorien nicht die wichtigste Rolle der Mathematik in der Physik. Die Mathematik, oder vielmehr die angewandte Mathematik, ist in dieser Funktion nicht so sehr der Herr der Situation: Sie dient lediglich als Werkzeug.

Allerdings spielt die Mathematik auch in der Physik eine souveränere Rolle. Dies wurde bereits in der Aussage angedeutet, die bei der Diskussion der Rolle der angewandten Mathematik gemacht wurde, dass die Naturgesetze in der Sprache der Mathematik formuliert worden sein müssen, um Gegenstand für die Anwendung der angewandten Mathematik zu sein. Die Aussage, dass die Naturgesetze in der Sprache der Mathematik niedergeschrieben sind, wurde zu Recht vor dreihundert Jahren gemacht[8]; Sie ist heute wahrer als je zuvor. Um die Bedeutung mathematischer Begriffe für die Formulierung der Gesetze der Physik zu verdeutlichen, erinnern wir uns als Beispiel an die Axiome der Quantenmechanik, wie sie vom großen Physiker Dirac explizit formuliert wurden. In der Quantenmechanik gibt es zwei Grundkonzepte: Zustände und Observablen. Die Zustände sind Vektoren im Hilbert-Raum, die Observablen selbstadjungierte Operatoren auf diesen Vektoren. Die möglichen Werte der Beobachtungen sind die charakteristischen Werte der Operatoren, aber wir sollten hier lieber aufhören, damit wir uns nicht auf eine Auflistung der mathematischen Begriffe einlassen, die in der Theorie der linearen Operatoren entwickelt wurden.

Es stimmt natürlich, dass die Physik bestimmte mathematische Begriffe für die Formulierung der Naturgesetze wählt, und sicherlich wird nur ein Bruchteil aller mathematischen Begriffe in der

8 Sie wird Galileo zugeschrieben.

Physik verwendet. Es trifft auch zu, dass die ausgewählten Begriffe nicht willkürlich aus einer Liste mathematischer Begriffe ausgewählt wurden, sondern in vielen, wenn nicht den meisten Fällen unabhängig vom Physiker entwickelt und dann als zuvor vom Mathematiker konzipiert erkannt wurden. Es stimmt jedoch nicht, wie so oft behauptet wird, dass dies geschehen musste, weil die Mathematik die einfachsten möglichen Konzepte verwendet und diese in jedem Formalismus zwangsläufig vorkommen mussten. Wie wir zuvor gesehen haben, werden die Begriffe der Mathematik nicht aufgrund ihrer konzeptionellen Einfachheit ausgewählt – selbst Zahlenpaarfolgen sind bei weitem nicht die einfachsten Begriffe –, sondern aufgrund ihrer Zugänglichkeit für kluge Manipulationen und für überzeugende, brillante Argumente. Vergessen wir nicht, dass der Hilbert-Raum der Quantenmechanik der komplexe Hilbert-Raum mit einem hermiteschen Skalarprodukt ist. Für den damit unbeschäftigten Geist sind komplexe Zahlen sicherlich alles andere als natürlich oder einfach und können nicht durch physikalische Beobachtungen nahegelegt werden. Darüber hinaus ist die Verwendung komplexer Zahlen in diesem Fall kein Rechentrick der angewandten Mathematik, sondern kommt einer Notwendigkeit bei der Formulierung der Gesetze der Quantenmechanik nahe. Schließlich zeichnet sich nun ab, dass nicht nur komplexe Zahlen, sondern auch sogenannte analytische Funktionen eine entscheidende Rolle bei der Formulierung der Quantentheorie spielen werden. Ich beziehe mich auf die sich schnell entwickelnde Theorie der Dispersionsbeziehungen.

Man kann sich des Eindrucks kaum erwehren, dass uns hier ein Wunder gegenübersteht, das in seiner überraschenden Natur durchaus mit dem Wunder vergleichbar ist, dass der menschliche Geist tausend Argumente aneinanderreihen kann, ohne in Widersprüche zu geraten, oder mit den beiden Wundern der Existenz von Gesetzen der Natur und der Fähigkeit des menschlichen Geistes, sie zu erraten. Die Beobachtung, die einer Erklärung für das Auftauchen mathematischer Begriffe in der Physik, die ich kenne, am nächsten kommt, ist Einsteins Aussage, dass die einzigen physikalischen Theorien, die wir akzeptieren wollen, die schönen sind. Es lässt sich argumentieren, dass die Begriffe der Mathematik, die dazu einladen mit so viel Geist praktiziert zu werden, die Qualität von Schönheit haben. Allerdings kann Einsteins Beobachtung bestenfalls Eigenschaften von Theorien erklären, an die wir bereit sind zu glauben, und hat keinen Bezug zur intrinsischen Genauigkeit der Theorie. Wir werden uns daher dieser letzten Frage zuwenden.

Ist der Erfolg physikalischer Theorien wirklich überraschend?

Eine mögliche Erklärung dafür, dass der Physiker die Mathematik zur Formulierung seiner Naturgesetze nutzt, ist, dass er ein etwas verantwortungsloser Mensch ist. Wenn er also einen Zusammenhang zwischen zwei Größen findet, der einem aus der Mathematik bekannten Zusammenhang ähnelt, wird er voreilig zu dem Schluss kommen, dass es sich um den in der Mathematik diskutierten Zusammenhang handelt, einfach weil er keinen anderen ähnlichen Zusammenhang kennt. Es ist nicht die Absicht der vorliegenden Diskussion, den Vorwurf zu widerlegen, dass der Physiker eine etwas verantwortungslose Person sei. Vielleicht ist er es. Es ist jedoch wichtig darauf hinzuweisen, dass die mathematische Formulierung der oft groben Erfahrung des Physikers in unheimlich vielen Fällen zu einer erstaunlich genauen Beschreibung einer großen Klasse von Phänomenen führt. Dies zeigt, dass die mathematische Sprache mehr zu loben hat, als nur die einzige Sprache zu sein, die wir sprechen können; es zeigt, dass es im wahrsten Sinne des Wortes die richtige Sprache ist. Betrachten wir einige Beispiele.

Das erste Beispiel ist das oft zitierte Beispiel der Planetenbewegung. Die Gesetze des Fallens von Körpern wurden durch Experimente, die hauptsächlich in Italien durchgeführt wurden, ziemlich gut etabliert. Diese Experimente konnten nicht sehr genau in dem Sinne sein, wie wir sie heute unter Genauigkeit verstehen, teilweise aufgrund des Einflusses des Luftwiderstands und teilweise aufgrund der Unmöglichkeit, kurze Zeitintervalle zu dieser Zeit zu messen. Dennoch ist es nicht verwunderlich, dass die italienischen Naturwissenschaftler durch ihre Studien mit der Art und Weise vertraut wurden, wie sich Objekte durch die Atmosphäre bewegen. Es war Newton, der dann das Gesetz frei fallender Objekte mit der Bewegung des Mondes in Zusammenhang brachte und feststellte, dass die Parabel der Bahn des geschleuderten Steins auf der Erde und der Kreis der Bahn des Mondes am Himmel besondere Fälle derselben mathematischen Objekts, einer Ellipse sind, und postulierte das universelle Gesetz der Gravitation auf der Grundlage einer einzigen, damals sehr ungefähren, numerischen Übereinstimmung. Philosophisch gesehen war das von Newton formulierte Gravitationsgesetz seiner Zeit und ihm selbst zuwider. Empirisch basierte es auf sehr dürftigen Beobachtungen. Die mathematische Sprache, in der es formuliert wurde, enthielt den Begriff einer zweiten Ableitung, und diejenigen von uns, die versucht haben, einen Schmiegekreis zu einer Kurve zu zeichnen, wissen, dass die zweite Ableitung kein sehr unmittelbares Konzept ist. Das Gesetz der Schwerkraft, das Newton widerstrebend aufstellte und das er mit einer Genauigkeit von etwa 4 % verifizieren konnte, hat sich als auf weniger als ein Zehntausendstel Prozent genau erwiesen und wurde so eng mit der Idee der absoluten Genauigkeit verbunden, dass erst in jüngster Zeit die Physiker erneut mutig genug wurden, die Grenzen ihrer Genauigkeit zu untersuchen[9]. Sicherlich muss zunächst das immer wieder zitierte Beispiel des Newtonschen Gesetzes als monumentales Beispiel eines Gesetzes erwähnt werden, das in Begriffen formuliert ist, die dem Mathematiker einfach erscheinen und sich darüber hinaus als zutreffend erwiesen hat entgegen allen vernünftigen Erwartungen. Rekapitulieren wir unsere These anhand dieses Beispiels: Erstens ist das Gesetz, insbesondere weil darin eine zweite Ableitung vorkommt, nur für den Mathematiker einfach, nicht jedoch für den gesunden Menschenverstand oder für nicht mathematisch versierte Studienanfänger; Zweitens handelt es sich um ein bedingtes Gesetz mit sehr begrenztem Geltungsbereich. Es erklärt nichts über die Erde, die Galileis Gestein anzieht, oder über die kreisförmige Form der Mondbahn oder über die Planeten der Sonne. Die Erklärung dieser Anfangsbedingungen bleibt dem Geologen und dem Astronomen überlassen, und sie tun sich damit schwer.

Das zweite Beispiel ist das der gewöhnlichen, elementaren Quantenmechanik. Dies entstand, als Max Born bemerkte, dass einige von Heisenberg aufgestellte Rechenregeln formal mit den Rechenregeln mit Matrizen identisch waren, die schon lange zuvor von Mathematikern aufgestellt worden waren. Born, Jordan und Heisenberg schlugen daraufhin vor, die Orts- und Impulsvariablen der Gleichungen der klassischen Mechanik durch Matrizen zu ersetzen. Sie wandten die Regeln der Matrizenmechanik auf einige stark idealisierte Probleme an und die Ergebnisse waren recht zufriedenstellend. Allerdings gab es zu diesem Zeitpunkt keinen rationalen Beweis dafür, dass sich ihre Matrizenmechanik unter realistischeren Bedingungen als korrekt erweisen würde. Tatsächlich sagen sie, „wenn die Mechanik, wie sie hier vorgeschlagen wird, bereits in ihren wesentlichen Merkmalen korrekt sein sollte." Tatsächlich lieferte Pauli einige Monate später die erste Anwendung ihrer Mechanik auf ein realistisches Problem, das des Wasserstoffatoms. Diese Anwendung lieferte Ergebnisse, die mit der Erfahrung übereinstimmten. Dies war zufriedenstellend, aber dennoch verständlich, da Heisenbergs Rechenregeln von Problemen abstrahierten, zu denen auch die alte Theorie des Wasserstoffatoms gehörte. Das Wunder geschah erst, als die Matrizenmechanik oder eine mathematisch äquivalente Theorie auf Probleme angewendet wurde, für die Heisenbergs Rechenregeln bedeutungslos waren. Heisenbergs Regeln setzten voraus, dass die klassischen Bewegungsgleichungen Lösungen mit bestimmten Periodizitätseigenschaften hatten; und die Bewegungsgleichungen der beiden Elektronen des Heliumatoms oder der noch größeren Anzahl von Elektronen schwererer Atome haben diese Eigenschaften einfach nicht, so dass die Heisenbergschen Regeln auf diese Fälle nicht angewendet werden können. Dennoch stimmt die Berechnung des niedrigsten Energieniveaus von Helium, wie sie vor einigen Monaten von Kinoshita in Cornell und von Bazley vom Bureau of Standards

9 Siehe zum Beispiel R. H. Dicke, Am. Sci., 25 (1959).

durchgeführt wurde, mit den experimentellen Daten im Rahmen der Genauigkeit von 1 zu zehn Millionen der Beobachtungen überein. Sicherlich haben wir in diesem Fall etwas aus den Gleichungen „herausgeholt“, was wir nicht eingegeben haben.

Das Gleiche gilt für die qualitativen Eigenschaften der „komplexen Spektren“, also der Spektren schwererer Atome. Ich möchte an ein Gespräch mit Jordan erinnern, der mir bei der Ableitung der qualitativen Merkmale der Spektren sagte, dass eine Nichtübereinstimmung der aus der quantenmechanischen Theorie abgeleiteten Regeln und der durch empirische Forschung ermittelten Regeln die letzte Gelegenheit geboten hätte für eine Veränderung des Systems der Matrizenmechanik. Mit anderen Worten: Jordan hatte das Gefühl, dass wir, zumindest vorübergehend, hilflos gewesen wären, wenn es zu einer unerwarteten Nichtübereinstimmung in der Theorie des Heliumatoms gekommen wäre. Dies wurde damals von Kellner und Hilleraas entwickelt. Der mathematische Formalismus war zu gewichtig und unveränderbar, als dass es zu einer echten Krise gekommen wäre, wenn das oben erwähnte Wunder des Heliums nicht geschehen wäre. Sicherlich hätte die Physik diese Krise auf die eine oder andere Weise überwunden. Andererseits ist es wahr, dass die Physik, wie wir sie heute kennen, nicht möglich wäre ohne eine ständige Wiederholung von Wundern, die denen des Heliumatoms ähneln, was vielleicht das erstaunlichste Wunder ist, das im Laufe der Zeit geschehen ist bei der Entwicklung der elementaren Quantenmechanik, aber bei weitem nicht die einzige. Tatsächlich ist die Zahl analoger Wunder unserer Ansicht nach nur durch unsere Bereitschaft begrenzt, weitere ähnliche Wunder anzustreben. Dennoch hatte die Quantenmechanik viele fast ebenso bemerkenswerte Erfolge, die uns die feste Überzeugung gaben, dass sie das ist, was wir als richtig bezeichnen.

Das letzte Beispiel ist die Quantenelektrodynamik oder die Theorie der Lamb-Verschiebung. Während Newtons Gravitationstheorie noch offensichtliche Verbindungen zur Erfahrung aufwies, floss die Erfahrung nur in der verfeinerten oder sublimierten Form von Heisenbergs Vorschriften in die Formulierung der Matrizenmechanik ein. Die Quantentheorie der Lamb-Verschiebung, wie sie von Bethe konzipiert und von Schwinger etabliert wurde, ist eine rein mathematische Theorie und der einzige direkte Beitrag des Experiments bestand darin, die Existenz eines messbaren Effekts zu zeigen. Die Übereinstimmung mit der Berechnung ist besser als ein Tausendstel.

Die vorangegangenen drei Beispiele, die fast unbegrenzt vervielfacht werden könnten, sollten die Angemessenheit und Genauigkeit der mathematischen Formulierung der Naturgesetze anhand von Begriffen veranschaulichen, die aufgrund ihrer Manipulierbarkeit ausgewählt wurden, wobei die „Naturgesetze“ von nahezu fantastischer Genauigkeit sind, aber mit streng begrenzter Tragweite. Ich schlage vor, die Beobachtung, die diese Beispiele veranschaulichen, als das empirische Gesetz der Erkenntnistheorie zu bezeichnen. Zusammen mit den Invarianzgesetzen physikalischer Theorien ist es eine unverzichtbare Grundlage dieser Theorien. Ohne die Gesetze der Invarianz hätten die physikalischen Theorien keine sachliche Grundlage erhalten können; Wenn das empirische Gesetz der Erkenntnistheorie nicht korrekt wäre, würden uns die Ermutigung und die Bestätigung fehlen, die emotionale Notwendigkeiten sind, ohne die die „Naturgesetze“ nicht erfolgreich erforscht werden könnten. Dr. R. G. Sachs, mit dem ich das empirische Gesetz der Erkenntnistheorie besprach, nannte es einen Glaubensartikel des theoretischen Physikers, und das ist sicherlich auch der Fall. Allerdings kann das, was er unseren Glaubensartikel nannte, gut durch konkrete Beispiele, viele Beispiele zusätzlich zu den drei genannten gestützt werden.

Die Einzigartigkeit der Theorien der Physik

Der empirische Charakter der vorangegangenen Beobachtung scheint mir selbstverständlich zu sein. Es handelt sich sicherlich nicht um eine „Denknotwendigkeit“, und um dies zu beweisen, sollte es nicht notwendig sein, darauf hinzuweisen, dass es nur für einen sehr kleinen Teil unseres Wissens über die unbelebte Welt gilt. Es ist absurd zu glauben, dass die Existenz mathematisch einfacher

Ausdrücke für die zweite Ableitung der Position selbstverständlich sei, wenn es keine ähnlichen Ausdrücke für die Position selbst oder für die Geschwindigkeit gibt. Es ist daher überraschend, wie bereitwillig die wunderbare Gabe des empirischen Gesetzes der Erkenntnistheorie als selbstverständlich angesehen wurde. Die bereits erwähnte Fähigkeit des menschlichen Geistes, eine Reihe von 1000 Schlussfolgerungen zu ziehen und trotzdem „richtig" zu bleiben, ist eine ähnliche Gabe.

Jedes empirische Gesetz hat die beunruhigende Eigenschaft, dass man seine Grenzen nicht kennt. Wir haben gesehen, dass es in den Ereignissen in der Welt um uns herum Regelmäßigkeiten gibt, die in mathematischen Konzepten mit unheimlicher Genauigkeit formuliert werden können. Andererseits gibt es Aspekte der Welt, bei denen wir nicht an die Existenz genauer Regelmäßigkeiten glauben. Wir nennen diese Anfangsbedingungen. Es stellt sich die Frage, ob die verschiedenen Gesetzmäßigkeiten, also die verschiedenen Naturgesetze, die entdeckt werden sollen, zu einer einzigen konsistenten Einheit verschmelzen oder sich einer solchen Verschmelzung zumindest asymptotisch annähern. Alternativ ist es möglich, dass es immer einige Naturgesetze geben wird, die nichts miteinander gemein haben. Dies gilt derzeit beispielsweise für die Gesetze der Vererbung und der Physik. Es ist sogar möglich, dass einige der Naturgesetze in ihren Implikationen miteinander in Konflikt stehen, aber jedes in seinem eigenen Bereich überzeugend genug ist, dass wir möglicherweise nicht bereit sind, eines von ihnen aufzugeben. Wir könnten uns mit einer solchen Situation abfinden, oder unser Interesse an der Klärung des Konflikts zwischen den verschiedenen Theorien könnte nachlassen. Wir könnten das Interesse an der „ultimativen Wahrheit" verlieren, das heißt an einem Bild, das eine konsequente Verschmelzung der kleinen Bilder zu einer einzigen Einheit darstellt, die sich aus den verschiedenen Aspekten der Natur ergeben.
Es kann sinnvoll sein, die Alternativen anhand eines Beispiels zu veranschaulichen. In der Physik gibt es heute zwei Theorien von großer Bedeutung und Interesse: die Theorie der Quantenphänomene und die Relativitätstheorie. Diese beiden Theorien haben ihre Wurzeln in sich gegenseitig ausschließenden Gruppen von Phänomenen. Die Relativitätstheorie gilt für makroskopische Körper wie Sterne. Das Ereignis des Zufalls, also in der ultimativen Analyse der Kollision, ist das primitive Ereignis in der Relativitätstheorie und definiert einen Punkt in der Raumzeit oder würde es zumindest definieren, wenn die kollidierenden Teilchen unendlich klein wären. Die Quantentheorie hat ihre Wurzeln in der mikroskopischen Welt und aus ihrer Sicht ist das Ereignis des Zusammentreffens oder der Kollision, selbst wenn es zwischen Teilchen ohne räumliche Ausdehnung stattfindet, nicht primitiv und überhaupt nicht scharf isoliert in der Raum-Zeit. Die beiden Theorien operieren mit unterschiedlichen mathematischen Begriffen – dem vierdimensionalen Riemann-Raum bzw. dem unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum. Bisher konnten die beiden Theorien nicht vereint werden, das heißt, es existiert keine mathematische Formulierung, an die beide Theorien Annäherungen darstellen könnten. Alle Physiker glauben, dass eine Vereinigung der beiden Theorien grundsätzlich möglich ist und dass wir sie finden werden. Dennoch ist es auch möglich, sich vorzustellen, dass keine Vereinigung der beiden Theorien gefunden werden kann. Dieses Beispiel veranschaulicht die beiden zuvor erwähnten Möglichkeiten der Vereinigung und des Konflikts, die beide denkbar sind.

Um einen Hinweis darauf zu erhalten, welche Alternative letztlich zu erwarten ist, können wir so tun, als wären wir etwas unwissender als wir sind, und uns auf einen niedrigeren Wissensstand versetzen, als wir tatsächlich besitzen. Wenn wir eine Verschmelzung unserer Theorien auf dieser niedrigeren Intelligenzebene finden können, können wir getrost davon ausgehen, dass wir auch auf unserer tatsächlichen Intelligenzebene eine Verschmelzung unserer Theorien finden werden. Wenn wir andererseits auf einem etwas niedrigeren Wissensniveau zu einander widersprechenden Theorien gelangen würden, kann die Möglichkeit der Dauerhaftigkeit widersprüchlicher Theorien auch für uns nicht ausgeschlossen werden. Der Grad an Wissen und Einfallsreichtum ist eine kontinuierliche Variable, und es ist unwahrscheinlich, dass eine relativ kleine Variation dieser kontinuierlichen Variablen das erreichbare Bild der Welt von inkonsistent zu konsistent verändert[10].

Unter diesem Gesichtspunkt ist die Tatsache, dass einige der Theorien, von denen wir wissen, dass sie falsch sind, so erstaunlich genaue Ergebnisse liefern, ein nachteiliger Faktor. Hätten wir etwas weniger Wissen, würde uns die Gruppe der Phänomene, die diese „falschen“ Theorien erklären, groß genug erscheinen, um diese Theorien zu „beweisen“. Allerdings werden diese Theorien von uns nur deshalb als „falsch“ angesehen, weil sie letztendlich mit umfassenderen Bildern unvereinbar sind, und wenn genügend viele solcher falschen Theorien entdeckt werden, werden sie sich zwangsläufig auch als in Konflikt miteinander erweisen. Ebenso ist es möglich, dass die Theorien, die wir durch eine für uns groß genug erscheinende Anzahl numerischer Übereinstimmungen als „bewiesen“ betrachten, falsch sind, weil sie im Widerspruch zu einer möglicherweise umfassenderen Theorie stehen, die über unsere Möglichkeiten der Entdeckung hinausgeht. Wenn dies wahr wäre, müssten wir mit Konflikten zwischen unseren Theorien rechnen, sobald ihre Zahl über ein bestimmtes Maß anwächst und sobald sie eine ausreichend große Zahl von Phänomengruppen abdecken. Im Gegensatz zum zuvor erwähnten Glaubensartikel des theoretischen Physikers ist dies der Albtraum des Theoretikers.

Betrachten wir einige Beispiele „falscher“ Theorien, die angesichts ihrer Falschheit erschreckend genaue Beschreibungen von Phänomengruppen liefern. Mit etwas gutem Willen kann man einige der Beweise, die diese Beispiele liefern, verwerfen. Der Erfolg von Bohrs frühen und bahnbrechenden Ideen zum Atom war immer eher begrenzt, und das Gleiche gilt für die Epizykel des Ptolemäus. Unser gegenwärtiger Standpunkt liefert eine genaue Beschreibung aller Phänomene, die diese primitiveren Theorien beschreiben können. Das Gleiche gilt nicht mehr für die sogenannte Freie-Elektronen-Theorie, die ein wunderbar genaues Bild vieler, wenn nicht der meisten Eigenschaften von Metallen, Halbleitern und Isolatoren liefert. Insbesondere erklärt es die Tatsache, dass Isolatoren einen spezifischen Widerstand gegen Elektrizität aufweisen, der 1026-mal größer sein kann als der von Metallen, was auf der Grundlage der „realen Theorie“ nie richtig verstanden wurde. Tatsächlich gibt es keine experimentellen Beweise dafür, dass der Widerstand unter den Bedingungen, unter denen die Theorie der freien Elektronen einen unendlichen Widerstand erwarten lässt, nicht unendlich ist. Dennoch sind wir davon überzeugt, dass es sich bei der Theorie der freien Elektronen um eine grobe Näherung handelt, die bei der Beschreibung aller Phänomene an Festkörpern durch ein genaueres Bild ersetzt werden sollte.

Von unserem tatsächlichen Standpunkt aus gesehen ist die Situation, die die Theorie des freien Elektrons darstellt, irritierend, lässt aber wahrscheinlich keine für uns unüberwindbaren Inkonsistenzen ahnen. Die Theorie der freien Elektronen wirft Zweifel auf, wie sehr wir der numerischen Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment als Beweis für die Richtigkeit der Theorie vertrauen sollten. Solche Zweifel sind wir gewohnt.

Eine viel schwierigere und verwirrendere Situation würde entstehen, wenn wir eines Tages eine Theorie der Phänomene des Bewusstseins oder der Biologie aufstellen könnten, die ebenso kohärent und überzeugend wäre wie unsere gegenwärtigen Theorien der unbelebten Welt. Mendels

10 Diese Passage wurde nach langem Zögern geschrieben. Der Autor ist überzeugt, dass es in erkenntnistheoretischen Diskussionen nützlich ist, die Idealisierung aufzugeben, dass das Niveau der menschlichen Intelligenz auf absoluter Ebene eine singuläre Stellung einnimmt. In manchen Fällen kann es sogar nützlich sein, die Errungenschaften zu berücksichtigen, die auf der Ebene der Intelligenz anderer Arten möglich sind. Allerdings ist sich der Autor auch darüber im Klaren, dass sein Denken im Sinne des Textes zu kurz war und nicht ausreichend kritisch beurteilt wurde, um verlässlich zu sein.

Vererbungsgesetze und die anschließenden Arbeiten über Gene könnten durchaus den Beginn einer solchen Theorie für die Biologie bilden. Darüber hinaus ist es durchaus möglich, dass ein abstraktes Argument gefunden werden kann, das zeigt, dass ein Konflikt zwischen einer solchen Theorie und den anerkannten Prinzipien der Physik besteht. Das Argument könnte so abstrakter Natur sein, dass es möglicherweise nicht möglich ist, den Konflikt zugunsten der einen oder anderen Theorie durch ein Experiment zu lösen. Eine solche Situation würde unser Vertrauen in unsere Theorien und unseren Glauben an die Realität der von uns formulierten Begriffe stark belasten. Es würde uns ein tiefes Gefühl der Frustration bei unserer Suche nach dem geben, was ich „die ultimative Wahrheit" nannte. Der Grund dafür, dass eine solche Situation denkbar ist, liegt darin, dass wir grundsätzlich nicht wissen, warum unsere Theorien so gut funktionieren. Daher ist ihre Genauigkeit möglicherweise kein Beweis für ihre Wahrheit und Konsistenz. Tatsächlich ist der Autor davon überzeugt, dass etwas Ähnliches wie die oben beschriebene Situation vorliegt, wenn man sich den gegenwärtigen Gesetzen der Vererbung und der Physik stellt.

Lassen Sie mich mit einer etwas heiteren Bemerkung enden. Das Wunder der Eignung der Sprache der Mathematik für die Formulierung der Gesetze der Physik ist ein wunderbares Geschenk, das wir weder verstehen noch verdienen. Wir sollten dafür dankbar sein und hoffen, dass es auch in der künftigen Forschung Gültigkeit behält und dass es sich, im Guten wie im Schlechten, zu unserer Freude, wenn auch vielleicht auch zu unserer Verblüffung, auf weite Bereiche des Lernens ausdehnt.

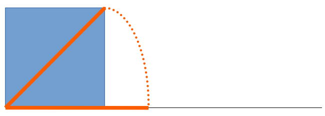
Kommentar:

1. zu den komplexen Zahlen:

Wigner schreibt „Sicherlich deutet unserer Erfahrung nach nichts auf die Einführung dieser Mengen [der komplexen Zahlen] hin." Wenn er die empirische Alltagserfahrung meint, hat er sicherlich recht. Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen sind die komplexen Zahlen erst auf einer späten Entwicklungsebene konstruiert worden, die mit der Erfahrung im üblichen Sinne nichts mehr gemein hat im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen. Diese sind nämlich recht frühe Konstruktionen der Begriffsbildung, die im Zeichen der Einheitenbildung stehen. Die negativen Zahlen sind die ersten Zahlen, die nichts mehr mit Begriffsbildung zu tun haben. Zunächst war das Minus im Sinne der Subtraktion verstanden, dem zweifelsfrei ein praktischer Sinn innewohnt. Das Minus der negativen Zahlen dürfte auf Brahmagupta zurückgehen, der sie jedoch wahrscheinlich nur als Hilfsmittel *algebraischer* Rechnungen verwendete, eine ähnliche Situation war auch der Anfang der imaginären Zahlen. Erst Fibonacci führte die negative Zahlen ein und zwar im (praktischen) Sinn von Schulden bei der Lösung algebraischer Gleichungen[11]. In diesem Sinn werden ja auch die inversen Elemente in der Gruppentheorie heute definiert. Die rationalen Zahlen, aufbauend auf den ganzen Zahlen (natürliche Zahlen, der Null und ihren Inversen) sind von noch anderer Gestalt. Dort werden Inverse der natürlichen Zahlen und ihrer negativen bzgl. der Multiplikation gezählt, also etwa 3 Fünftel eines Ganzen. Diese sind also ebenfalls sehr erfahrungsnah. Begrifflich komplizierter ist es deshalb, weil hier zwei Einheitenarten (Ganze und Teile) gekoppelt werden. In die selbe Richtung, nur noch extremer gehen die irrationalen Zahlen. Es ist das erste Mal, dass die Einheitenbildung nicht mehr klappt. Werden gewisse verschiedene Längen gemessen (etwa die Diagonale und die Basis eines Quadrates), so hatten die Griechen schon bewiesen, dass es keine gemeinsame Maßeinheiten gibt, egal wie klein man sie machte. Solche Längen nennt man daher inkommensurabel, d.h. es gibt keinen noch so kleinen Teil 1/n der einen Strecke mit der man die

11 Vgl. hierzu Helmuth Gericke, Geschichte des Zahlbegriffs, BI Mannheim 1970, S. 53f

andere durch m mal 1/n messen könnte, es gibt also keine rationale Zahl m/n, der dies gelänge.Da man aber diese Diagonalstrecke auf die Gerade, auf der die Basis liegt, drehen kann, markiert sie einen Endpunkt auf dieser Geraden.



Identifiziert man die (End-)Punkte dieser Geraden mit Zahlen, so wäre √2 eine Zahl, obwohl sie offensichtlich bzgl. der Einheit 1 nichts zählt. Die Gleichung $x^2=2$ hat nur dann eine Zahlen-Lösung, wenn man $\sqrt{2}$ als Zahl akzeptiert. Platon hatte dieses Problem in seinem Dialog Menon als Quadratverdopplung geometrisch gelöst, was auch einen Reflex in seinem Höhlengleichnis fand. Alle Punkte auf der „unendlichen" Geraden sollen also Zahlen, die sogenannten reellen Zahlen sein, die aus rationalen sowie irrationalen Zahlen bestehen.
Der nächste Schritt ist nun die Einführung von nach Gauß sogenannten komplexen Zahlen oder zunächst der imaginären Zahlen, die nach Descartes als „imaginaire" bezeichnet wurden, weil sie nicht real, sondern nur Vorstellung („imagintion") seien.

Cardanos Aufgabe: "Teile 10 in zwei Teile, deren Produkt 40 ist." führt zum ersten Mal auf Wurzeln aus negativen Zahlen, also imaginäre Größen.
Also ein Teil sei x, der anderen 10-x, sodass die quadratische Gleichung $x(10-x)=40$ entsteht. Wird sie umgeschrieben zu $10x-x^2=40$ oder $x^2-10x=-40$, so ergibt die quadratische Ergänzung $(x-5)^2=-15$. Eine formale Lösung wäre $x=5+\sqrt{-15}$, die beim Einsetzen in die obige Gleichung bei der Verallgemeinerung der üblichen Rechnungen auch auf diese „bloß imaginäre" Wurzel die wahre Aussage 50 = 50 ergibt. Da diese formale Lösung jedoch nur formal ist und nicht existiert, so betrachtete Cardano die Aufgabe selbst als falsch gestellt[12].
Erst das Bedürfnis, jedem Polynom vom Grad n ebenfalls genau und nicht nur höchstens n Lösungen zuzusprechen führte zur vollen Anerkennung der komplexen Zahlen. Das war der Fundamentalsatz der Algebra. Das Bedürfnis des Abschlusses, man ist erst zufrieden, wenn man alles in Besitz genommen hat[13] und nichts mehr außerhalb ist. So wurde selbst das unsinnige Unendliche hereingenommen bei der Kompaktifizierung. Die Angst vor der Offenheit.
Leibniz hatte die imaginären Zahlen als eine „wunderbare Zuflucht des menschlichen Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein" bezeichnet. Ich glaube da hat er etwas Wesentliches gesagt. Dabei handelt es sich diesmal nicht um einen Abschluss, sondern eher um eine Öffnung, weg von der puren Realität, die die Struktur des Abschlusses hat, also vom Sekundärprozess (Realitätsprinzip) zum Primärprozess (Lustprinzip, besser Imaginationsprinzip oder Virtualitätsprinzip), um mit Freud zu reden. Das Primärprinzip ist auch das, was die Quantentheorie leitet, worauf ich gleich zu sprechen komme.
Hamilton führte dann eine scheinbar realistische Definition komplexer Zahlen über Paare von reellen Zahlen ein[14]. Allerdings ist die algebraische Struktur durch die Multiplikation der Paare nur über die *übliche* Multiplikation von komplexen Zahlen mit der imaginären Einheit $i=\sqrt{-1}$ hergeleitet: $(a+ib)\cdot(c+id)=ac+i\,ad+i\,bc+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$, was für Hamilton dann zu $(a,b)\cdot(c,d)=(ad+bc,ac-bd)$ führt, da er für $a+ib$ das Paar (a,b) aus reellen Zahlen wählt.

12 Helmuth Gericke, aaO, S.57f
13 So ist es auch mit Hegels Philosophie. Erst wenn der Weltgeist erkannt hat, dass *er* alles ist, ist er beruhigt.
14 Seine Algebra ist von Kants Begriff der reinen zeitlichen Anschauungsform geprägt entgegen dem räumlichen Ansatz der griechischen Mathematik. (Vgl. H-W Alten et al. 4000 Jahre Algebra, Berlin Heidelberg 2014.)

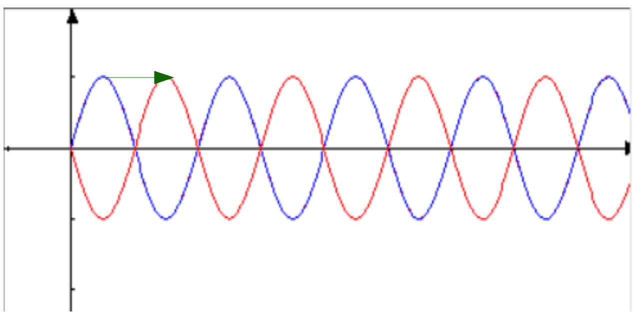
Man kann das für einen ähnlichen Rückschritt halten, wie die Schrödingersche „realistische“ Formulierung der Quantenmechanik gegenüber der Matrizenmechanik Heisenbergs[15].
Meines Erachtens ist auch die Inspirationsquelle Kant in der Zahleninterpretation als *zeitliches* Muster falsch. Zahlen sind m.E. eindeutig auf die Vereitlung der primären Begriffsbildung durch den Raum zurückzuführen, die dann wiederum konterkariert wird durch eine erneute höhere begriffliche Einheitsbildung, eben der Zahl. Dass natürlich das alles Prozesse sind ist klar, hat aber auch nichts mit der Zeit zu tun, die selbst erst eine Abstraktion aus verschiedenen Prozessen ist.

Um zu illustrieren, warum das „Wesen zwischen Sein und Nichtsein“ zur Quantenmechanik gehört, möchte ich eine einfache Herleitung der eindimensionalen Schrödingergleichung ohne Potenzial angeben.

Geht man von der normalen eindimensionalen harmonischen Wellenfunktion aus, die man in der

Form $f(x,t)=A\cdot\sin(2\pi(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}))$ oder auch $f(x,t)=A\cdot\sin(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\lambda\frac{t}{T}))$ schreiben kann,

wobei λ die (räumliche) Wellenlänge und T die (zeitliche) Schwingungsdauer bezeichnen, so ist nach einer Sekunde die blaue Funktion um $\frac{\lambda}{T}$ nach rechts (rote Funktion) verschoben. Die Welle bewegt sich mit $v=\frac{\lambda}{T}$ nach rechts.



hier ist $\lambda=2$ und $T=4$

Die EM-Welle bewegt sich mit $v=c$, also ist hier $\frac{\lambda}{T}=c$.

Die Differenzialgleichung erhält man durch zweimaliges partielles Differenzieren nach x und nach t

$\frac{\partial f}{\partial x}=A\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}-2\pi\frac{t}{T})$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=A\cdot\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin(2\pi\frac{x}{\lambda}-2\pi\frac{t}{T})=-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}f$

$\frac{\partial f}{\partial t}=-A\cdot\frac{2\pi}{T}\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}-2\pi\frac{t}{T})$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=-A\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\sin(2\pi\frac{x}{\lambda}-2\pi\frac{t}{T})=-\frac{4\pi^2}{T^2}f$, womit man

15 Interessant ist aber dennoch, dass ganz ähnlich wie bei der Entstehung der natürlichen Zahl, die Zwei bzw. die Verdopplung eine zentrale Rolle spielt. Sowie die Verdopplung des primären Objektbegriffs, der unter der Direktive der Einheitsbildung steht, also mit der *einen* Zahl Zwei wieder „Ordnung“ im Einheitsstreben herstellt, so führt die Verdopplung von reellen Zahlen wieder zur Beruhigung des Geistes seiner geschaffenen Realität.

erhält $\frac{\partial_t^2 f}{\partial_x^2 f}=\frac{\lambda^2}{T^2}=c^2$ oder $\partial_t^2 f-c^2\partial_x^2 f=0$ als Wellengleichung.

Wird die EM-Welle als Photonenstrom gesehen, gilt laut Einstein für die Energie $E=h\nu=\frac{h}{T}$ und $p=\frac{h}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{h}{p}$.

De Broglie verwendete diese Einsteinschen Gleichungen und interpretierte sie für Materieteilchen der Masse m (Elektronen). Der Impuls ist dann $p=mv$ und die (kinetische) Energie $E=\frac{1}{2}mv^2$.

Das ergibt einerseits $\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}\Rightarrow v=\frac{h}{m\lambda}$ und andrerseits $\frac{h}{T}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{h}{m\lambda}\right)^2\Rightarrow\frac{\lambda^2}{T}=\frac{h}{2m}$.

Für Elektronen ist das Wellenverhältnis von λ^2 durch T konstant, bei Lichtwellen war $\frac{\lambda^2}{T^2}=c^2$ konstant. Bei der Lichtwellenfunktion wurde durch zweimaliges Ableiten nach x und t diese Konstanz gefunden. Also sollte die einmalige Ableitung nach der Zeit und die doppelte Ableitung nach dem Ort der noch unbekannten Materiewellenfunktion $\psi(x,t)$ die Konstanz $\frac{\lambda^2}{T}$ ergeben.

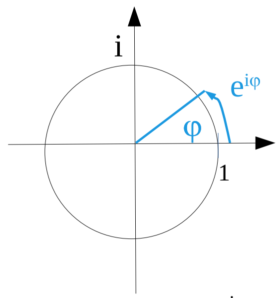
Mit der zu bestimmenden Funktion $f(t)$ wird der Ansatz gemacht $\psi(x,t)=f(t)\cdot\sin(2\pi\frac{x}{\lambda})$.

$\partial_t\psi(x,t)=\partial_t f(t)\cdot\sin(2\pi\frac{x}{\lambda})=k\cdot\psi(x,t)=kf(t)\cdot\sin(2\pi\frac{x}{\lambda})$, d.h. $\partial_t f(t)=kf(t)$.

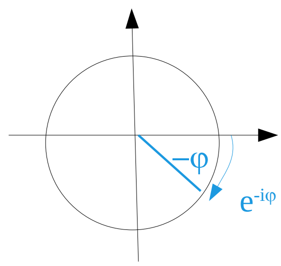
Die einzige Funktion, die abgeleitet bis auf eine Konstante die Funktion wieder ergibt ist die Exponentialfunktion: $f(t)=e^{g(t)}$ mit $\partial_t g(t)=k$.

Die Exponentialfunktion sollte als Teil der Wellenfunktion aber auch periodisch in t sein, ist es aber mit reellem Argument nicht. Nur dann und ***das ist der entscheidende Punkt***, wenn das Argument imaginär ist:

$f(t)=e^{\boldsymbol{i}g(t)}$



oder $f(t)=e^{-\boldsymbol{i}g(t)}$



mit $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ bzw. $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$.

Die Funktion $f(t)=e^{-ig(t)}$ soll aber auch die Schwingungsdauer T haben. Das leistet etwa mit

$g(t)=2\pi\frac{t}{T}$ und $k=2\frac{\pi}{T}$ die Funktion $f(t)=e^{-2\pi i\frac{t}{T}}$, so dass die Wellenfunktion für

Materieteilchen wäre $\psi(x,t)=e^{-2\pi i\frac{t}{T}}\sin(2\pi\frac{x}{\lambda})$.

Ich überprüfe die Ableitungen:

$$\partial_t \psi(x,t) = \frac{-2\pi}{T} i \cdot e^{-2\pi i \frac{t}{T}} \sin(2\pi \frac{x}{\lambda})$$ und

$$\partial_x \psi(x,t) = \frac{2\pi}{\lambda} e^{-2\pi i \frac{t}{T}} \cos(2\pi \frac{x}{\lambda}),\ \partial_x^2 \psi(x,t) = \frac{-4\pi^2}{\lambda^2} e^{-2\pi i \frac{t}{T}} \sin(2\pi \frac{x}{\lambda}).$$

Der Quotient ist dann $\frac{\partial_t \psi(x,t)}{\partial_x^2 \psi(x,t)} = \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda^2}{T} = \frac{i}{2\pi} \frac{h}{2m} \Rightarrow$

$\partial_t \psi = \frac{i\hbar}{2m} \partial_x^2 \psi$, das ist die freie Schrödinger-Gleichung ohne Potenzial in einer Raum-Dimension x.

Man sieht hier, dass ***ohne i die Schrödingergleichung nicht herleitbar wäre***.

Eine ganze Zeit lang hatte man versucht die Quantenmechanik mit nur reellen Zahlen herzuleiten. Letztes Jahr (2023) erschien ein Artikel in Scientific American von Acín, Renou und Navascués, in dem die Autoren nachwiesen, dass die Quantenmechanik die imaginären Zahlen benötige. Sie schrieben „Ähnlich wie bei den Bell-Tests erzeugte auch unser Gedankenexperiment Messstatistiken, die keine reelle Quantentheorie vorhersagen kann. Damit ist die reelle Quantentheorie also falsifizierbar.“

Das sehe ich als einen großen Erkenntnisgewinn an. Komplexe Zahlen sind kein pures Mittel um Rechnungen zu vereinfachen und auch keine bloßen Vervollständigkeitsphantasien, sondern gehören offensichtlich zu unserer Wirklichkeit. Wirklichkeit ist eben nicht mit der Realität zu verwechseln, jene setzt sich zusammen aus Realität **und** Möglichkeit, ist also wie Leibniz richtig sagte „ein Wesen zwischen Sein und Nichts“ oder besser gesagt ein Wesen mit Sein und Möglichkeit, die zwischen Sein und Nichts liegt. Kurz Wirklichkeit ist Realität und Virtualität[16]. In den allgemeinen Zustandsvektoren hat man mit den Superpositionen Möglichkeiten, die erst durch weitere Interaktionen (etwa durch eine Messung) zu Realitäten werden. Oder wie man auch zu sagen pflegt, die Möglichkeit (die Superposition) wird durch die Messung auf eine ihrer Möglichkeiten projiziert, die dann das Faktum, die (vorübergehende) Realität ist.
In diesem Zusammenhang möchte ich nochmal Aristoteles würdigen, der in der Analyse der Bewegung (und die Bewegungsgesetze sind ja zentrales Anliegen der Physik) auf den Zusammenhang von Möglichkeit und Realität (Wirklichkeit) hingewiesen hat. Hier sieht man auch wie wichtig Sprache sein kann, die die Möglichkeit sich differenzierter auszudrücken verleiht. Die im Angelsächsischen favorisierte Vielweltentheorie, die den Möglichkeitsbegriff zu eliminieren versucht, hat sicherlich einen ihrer Determinanten in der Sprache, die den Begriff der Wirklichkeit so nicht kennt. Bezeichnenderweise wird auch die Wirkung als Action bezeichnet, also als Tat. Aber eine Tat, ist sie nicht blind oder deterministisch, also nicht unfrei, lebt von der Dialektik von Möglichkeit und Realität, eben der Wirklichkeit. Auch dass viele Physiker die zeitabhängige Schrödingergleichung, die von einem gemessenen Zustand ausgehend den nächsten deterministisch bestimmt, als ihr Lieblingsobjekt betrachten und sogar alles darauf reduzieren wollen, zeugt eher von großer Unsicherheit gekoppelt mit Machtwahn und einer überkommenen Metaphysik.

16 In einem Gespräch Heisenbergs mit Einstein, meinte dieser ganz richtig „Das Mögliche, das zu Erwartende, ist ein wichtiger Bestandteil unserer Wirklichkeit, der nicht neben dem Faktischen einfach vergessen werden darf.“ Von diesem Gespräch berichtet Heisenberg in „Der Teil und das Ganze“.

Die QED hat gut daran getan, die Virtualität (d.h. die virtuellen Photonen) ins Zentrum der Wechselwirkung zu rücken.

2. zu den Gesetzen

Wenn wir ein Elektron an einer Stelle a gemessen haben und es später an einer anderen Stelle b wieder aufzufinden glauben, setzen wir gemäß des psychologisch-epsitemischen Glaubens oder wenn man will der Theorie der Objektkonstanz voraus, dass es sich um dasselbe handelt.
Wenn wir das tun, so kann man weiter fragen, auf welcher Bahn hat es sich bewegt. Nach dem mächtigen Prinzip der stationären Wirkung werden wir dies mithilfe der Variationsrechnung berechnen. Es ist erstaunlich, wie fast alle Gesetze (Newtons Gesetze der Mechanik, Maxwells Theorie der Elektrodynamik, Einsteins Theorie der Allgemeinen Relativität, Quantenmechanik, das Standardmodell der Teilchenphysik) hiermit bestimmbar und herleitbar sind. Womit hängt das zusammen? M.E. ist es die Grundlage von dem, was wir unter Gesetzen verstehen, nämlich in letzter Instanz die infinitesimale *Konstanz*[17]. Jedes Gesetz ist genau besehen ein dynamisches und beruht daher auf Wirkungen.

Die infinitesimalen Wirkungen $L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ jeder Bewegung $x(t), \dot{x}(t)$ (L ist die Lagrangefunktion) werden aufaddiert zum Wirkungsintegral $S(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, \dot{x})\, dt$, das dann variiert wird um die konstante Wirkung zu ermitteln: $\frac{\delta S}{\delta x} = 0$, die ein Maximum oder Minimum oder ein Sattel sein kann, wichtig ist nur die (infinitesimale) Konstanz. Die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$ genügt dieser Bedingung $\frac{\delta S}{\delta x} = 0$.

Einfaches **Beispiel**: Für ein freies Teilchen (d.h. ohne dass eine Kraft auf es einwirkt) in der x-y-Ebene mit der Masse m ist die Lagrangefunktion sehr einfach:

$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$. Es ist $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ und $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$, also ist die Euler-Lagrange-Gleichung

$m\ddot{x}(t) = 0$. $\Rightarrow m\dot{x}(t) = c \Rightarrow m\,x(t) = ct + d \Rightarrow x(t) = \frac{c}{m}t + \frac{d}{m}$. Ganz analog ergibt sich $y(t) = \frac{a}{m}t + \frac{b}{m}$.

Das ist das erste Newtonsche Gesetz: „Kräftefreie Körper bewegen sich auf geraden Linien mit konstanter Geschwindigkeit [c ≠ 0] oder sind in Ruhe [c = 0].“

Man könnte das Prinzip der stationären Wirkung kantianisch als unsere Kategorie des Gesetzes auffassen. Das Prinzip ist nur eine genauere Analyse dessen, was wir unter Gesetz verstehen und haben wollen. Eine andere „objektive“ Ansicht vertritt bspw. Susskind und meint zunächst erstaunt: „It almost seems that the particle must have supernatural powers to feel out all the possible trajectories and pick the one that makes the action stationary.“[18] Um dann später dies „objektive“ Mysterium zu eliminieren, nachdem er die Euler-Lagrange-Gleichungen hergeleitet hat: „What this derivation [von den Euler-Lagrange-Gleichungen] shows is that there is no magic involved in the

17 Wenn Maupertuis dieses Prinzip als Ökonomieprinzip, d.h. als Prinzip der *minimalen* Wirkung, also mit minimaler Energie und Zeit betrachtete, so lag er damit weit entfernt von der Wirklichkeit. Sparsamkeit ist alles andere als ein Prinzip der Natur.

18 Leonard Susskind, George Hrabovsky, The Theoretical Minimum, Seite 109.

ability of the particle to feel out the entire path before deciding which way to go. At each stage along the trajectory, the particle has only to minimize the action between a point in time ans a neighboring point in time.“[19] In der Philosophie ist es oft leider üblich, Problene dadurch zu eliminieren, dass man auf die nächst höhere Ebene verschiebt. Das monierte Marx bspw. zu Recht bei Hegel, der die Probleme der bürgerlichen Gesellschaft im Staat lösen wollte. Marx suchte die Lösung direkt in der bürgerlichen Gesellschaft. In der Physik ist es umgekehrt üblich, Probleme im Infinitesimalen zu lösen. Das Problem, woher das Teilchen denn wissen soll, wie es sich bewegen muss nach dem Prinzip der stationären Wirkung wird nicht dadurch gelöst, dass man ihm das Wissen im Infinitesimalen zugesteht. Das ist ärgerlich, denn diese Methode der Verdrängung funktioniert nicht. Das transzendentale Problem wird zum transzendenten im Infinitesimalen. Es verschwindet dadurch aber nicht. Das Mysterium liegt in der objektivistischen Sichtweise.

Gesetze sind nur ein kleiner Aspekt der Wirklichkeit. In unserem Enthusiasmus, die uns so lieben Konstanzen entdeckt zu haben, extrapolieren wir gar allzu wild und sehen uns bestätigt, wenn wir die Beobachtungen machen, die dieser Annahme entsprechen. Einstein sagte auch in dem bereits zitierten Gespräch mit Heisenberg ganz treffend, dass die Theorie entscheidet, was wir beobachten. Das ist auch ein altbekanntes Phänomen. Piaget nannte das die primäre Kreisreaktion. Hat man etwas neu entdeckt, so sieht man überall das, was man gerade begriffen hat.
Wichtig ist, diese Einschließung des Geistes wieder aufzubrechen durch Widersprüche. Ein sehr bekanntes Beispiel ist ja Planck, der jahrelang seine eigene Entdeckung der Quantennatur nicht akzeptieren wollte, weil sie der fixen und liebgewonnenen Idee der maxwellschen EM-Theorie widersprach. Oder Einsteins Weigerung, den Zufall in der Quantenmechanik anzuerkennen.
Ein Gesetz ist ein Begriff höherer Ordnung. Und bekanntlich haben Begriffe ihre Grenzen. Bleibt man bei seinem ersten Begriff stehen, so beschränkt man sich selbst und nimmt die notwendigen und heilsamen Einwände der Natur nicht mehr wahr. Wie Begriffe, so sind auch Gesetze von uns gesetzt zu verständlichen Zwecken. Aber Ängstlichkeit und stures Festhalten an wenn auch vorübergehend legitimen Traditionen ist vorallem in der Wissenschaft ein schlechter Ratgeber.

Wigner sagt viel Wahres in Bezug auf Naturgesetze. So meint er ganz richtig, dass Naturgesetze immer höchstens *bedingte Aussagen* über Phänomene sind. Das gilt nicht nur für die Physik, sondern auch für die Mathematik und sicherlich ganz allgemein. Dazu wählt er das berühmte zweite Gesetz der Mechanik von Newton: $F = m \cdot \ddot{x}$. Mithilfe dieses Gesetztes können nur Aussagen über die Zukunft formuliert werden unter der Bedingung, dass sowohl der Ort x als auch die Geschwindigkeit $\dot{x}$ im gegenwärtigen Zustand gemessen wurden bzw. bekannt sind, wie weiter oben schon gezeigt wurde. Diese Größen sind zwar wieder bestimmbar an einen früheren Zeitpunkt mithilfe des zweiten Gesetzes. Will man diese Abhängigkeit beseitigen gerät man in einen infiniten Regress. Diese Anfangsbedingungen sind nicht eliminierbar. Bekanntlich sind diese Anfangsbedingungen in der Quantenmechanik nicht einmal gleichzeitig genau bestimmbar, da sie komplementär sind laut der Unbestimmtheitsrelation.
In der Mathematik können diese Bedingtheiten durch die Axiome sich scheinbar auflösen. Als Beispiel wähle ich die natürlichen Zahlen. Das einfachste System ist m.E. das von Lorenzen, der allerdings sprachphilosophisch oder besser zeichenphilosophisch orientiert ist:

1. $\Rightarrow |$ 2. $n \Rightarrow n|$.

Das zweite Schema ist klar ein bedingtes. Hat man bereits eine Menge n von gleichartigen Zeichen | so wird das nächste Zeichen durch Hinzufügen eines weiteren gebildet. Das Setzen des Anfangs 1. bringt aber schon symbolisch zum Ausdruck, dass es auch hierfür eine Bedingung gibt, die aber aus einem anderen Bereich stammt. Die Vorbedingung ist sicher kein Zahlzeichen (auch nicht die Null),

19 Susskind et al. AaO Seite 114

sondern der Begriff Zahl, der die Störung der Natur, dass es für einen zeitlich erzeugten *einheitlichen* Begriff bspw. Baum plötzlich für das Bewusstsein räumlich *zwei* Bäume gibt.
Dem begegnet das Bewusstsein durch den Begriff „Zwei“, der die Einheit auf einer höheren Ebene wieder herstellt. In Wirklichkeit ist diese lineare Kette von natürlichen Zahlen eine Begradigung. Erst über die Zwei kommt die Eins zu Bewusstsein und dann könnte die 2. Regel greifen.

$$Linearisierung\, 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow \ldots$$
$$Zahl - Begriff\ Zwei \Rightarrow Zahl - Begriff\ Eins$$
$$Objekt - Begriff$$

Der Objektbegriff hat ebenfalls seine vielfachen Bedingungen tieferer und anderer Art.
Diese Art ist relational. Das möchte ich hier nicht entwickeln, das habe ich in meiner Bedürfnistheorie bereits ausführlicher dargestellt.

Als weiteren Punkt erwähnt Wigner die *Schichtung* der Gesetze, von relativ einfachen, etwa den Newtonschen bis hin zu den beiden heutigen Grundtheorien, der Relativitätstheorie und der Quantentheorie. Diese höheren Theorie versuchen die spezielleren als Grenzwerte der höheren Theorie zu konstruieren. So hat Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie von Anfang an versucht, die Newtonsche Gravitationstheorie in der Feld-Formulierung von Poisson $\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G\rho(\boldsymbol{r})$ als Grenzfall schwacher Felder und demnach der Minkoswki-Metrik zu konstruieren.

Ebenso versuchte die Quantenmechanik die klassische Mechanik zu integrieren für den Fall $h \rightarrow 0$.
So geht der Kommutator von Ort und Impuls: $[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\frac{h}{2\pi} \neq 0$ für $h \rightarrow 0$ in die klassische Kommutativität von x und p_x über.
Zwischen dem quantenmechanischen Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ und der klassische Poisson-Klammer $\{A, B\}$ gilt allgemein die Entsprechung: $[\hat{A}, \hat{B}] \Leftrightarrow i\frac{h}{2\pi}\{A, B\}$. Es gilt speziell $\{x, p_x\} = 1$, also $[\hat{x}, \hat{p}_x] \Leftrightarrow i\frac{h}{2\pi}\{x, p_x\} \underset{h\rightarrow 0}{\rightarrow} 0$.

Ein weiteres Beispiel ist die Maxwellsche Theorie. Werden in der QED die Energien sehr niedrig und die Entfernungen ., so lässt sich die Maxwellsche Elektrodynamik als Grenzfall der QED betrachten.

Dieses Grenzverhalten gilt auch innerhalb der klassischen Physik und innerhalb der Quantenphysik. Als Beispiel der klassischen Physik wird die Thermodynamik als Grenzfall der statistischen Mechanik (Boltzmann) für Teilchenzahl N gegen Unendlich und Volumen V gegen Unendlich bei konstanter Dichte N/V. Als zweites Beispiel hat man die SRT als Grenzfall der ART, wenn die Krümmung gegen Null geht, die Riemannsche Geometrie also zur Minkowski Geometrie wird. Dieses Prinzip des Grenzwertes war so generell, das Dirac eine Theorie, die ohne diese Grenzwertbildung zu bereits etablierten Theorien formuliert wurde, nicht akzeptierte. So war eine seiner Forderungen bei der Aufstellung seiner relativistischen Gleichung des Elektrons, dass die Vorhersagen seiner Theorie für niedere Geschwindigkeiten bzgl. der Lichtgeschwindigkeit mit den Vorhersagen der nichtrelativistischen Quantenmechanik sehr genau übereinstimmen sollte[20].

Als nächstes geht Wigner auf die Frage ein, ob es vielleicht unvereinbare Grundtheorien der Physik gibt oder ob sie doch noch vereinheitlicht werden können. Gemeint sind natürlich die beiden Grundpfeiler der modernen Physik, die Allgemeine RT und die Quantenmechanik. Er hält beide

20 Vgl. Graham Farmelo, The Strangest Man, London, 2010, S. 141

Teile der Alternative für möglich. Obwohl ich eigentlich kein Monist bin, so glaube ich doch, dass eine Vereinheitlichung möglich sein sollte.
Eine erste wesentliche Vereinigung (neben derjenigen die Dirac in seiner Elektronentheorie vollzogen hatte, also die Quantenmechanik mit der speziellen Relativitätstheorie) war die der Theorie von Maxwell mit der Quantentheorie, der sogenannten zweiten Quantisierung. Dirac wollte nie die Quantenelektrodynamik, die er ja selbst initiiert hatte, in der heutigen Form akzeptieren, und zwar ganz zu Recht. Das manifeste Problem war die Renormierungstheorie, die die Unendlichkeiten, die ständig auftauchten, durch mathematische Tricks zu eliminieren versuchte. Als Dyson Diracs Meinung zur neuen Theorie der QED wissen wollte, antwortete er:
„I might have thought that the new ideas were correct if they had not been so ugly“[21]

Ich vertrete die Meinung, dass das eigentliche Problem die Mathematik ist, und zwar vorallem die Infinitesimalrechnung und dem damit zusammenhängenden Problem der Unendlichkeit, sowohl der unendlich Großen (wie beim Hilbertraum unendlicher Dimension) wie auch im unendlich Kleinen, was das gleich Problem ist nur umgekehrt. Nicht nur, dass die Raumzeit quantisiert werden muss, was ja durch die Stringtheorie zum Teil geschieht oder die Quantenlooptheorie (und dadurch die Punktteilchen und die damit zusammenhängenden Unendlichkeiten verschwinden), sondern dass der Begriff des arithmetisch Unendlichen aus der Mathematik eliminiert werden sollte. Dass es da große Widerstände gibt ist klar, da die Infinitesimalrechnung ja eine unheimliche Erfolgsgeschichte geschrieben hat. Aber wenn ein Konzept falsch ist, und das ist eindeutig der Fall, sollte man den Mut haben eine rein finite Mathematik zu etablieren. Eine große Arbeit. Aber ich glaube, es führt kein Weg daran vorbei. Erst dann hat man vielleicht Erfolg eine korrekte Vereinheitlichung aufzubauen. Selbst das potenziell Unendliche, was Aristoteles eingeführt hatte, ist nicht haltbar., wenn man über das, was man konstruiert, auch Rechenschaft geben will und nicht munter darauf los phantasiert. Ich habe darüber in einem einschlägigen Artikel geschrieben. Wie Dirac meinte, bedarf die existierende Theorie (die Quantenelektrodynamik) einen radikalen Wandel und der muss primär in einer korrekten Mathematik liegen. Selbst Feynman äußerte sich kritisch bezüglich der Renormierung und meinte, dass sie eigentlich keine legitime mathematische Technik sei und die Physiker (er eingeschlossen) noch keine zufriedenstellende mathematische Methode besäßen um die QED zu beschreiben, obwohl er die unglaubliche Übereinstimmung der Theorie (inklusive der Renormierung) mit der Empirie über alle Maßen lobte und sehr stolz auf sie war. Aber die Übereinstimmung mit der Empirie ist kein Beweis für die Richtigkeit, wie gemeinhin angenommen wird. Das hat auch Wigner hervorgehoben. Wenn Feynman behauptet „Was wirklich wichtig ist, ist dass die Vorhersagen der Theorie mit den Experimenten übereinstimmt.“ so ist das zwar auch richtig, aber spiegelt eine ganz bestimmte Auffassung von Naturwissenschaft wieder, nämlich Wissenschaft als Instrument der Technik und Naturbeherrschung. Aber Wissenschaft ist wesentlich mehr. Erkenntnis der Natur ist selbst eine *interesselose* Interaktivität und Kommunikation mit der Natur und ohne eine angemessene Ethik auf dem Irrweg[22].

Zum Schluss möchte ich auf das eigentliche Thema nochmal zu sprechen kommen. Zwar bin ich der Ansicht von Kant, dass die Physik, die wir betreiben, wesentlich *unsere* Physik ist und dass das, was wir erkennen ohne uns logischerweise nicht möglich ist. Das soll aber kein Subjektivismus sein. Denn Erkenntnis ist immer ein Wechselwirkungsprozess und wir erkennen nicht, was da ist

21 Zitiert nach Graham Farmelo, aaO S.336

22 Die Mathematik hat mehrere Probleme, nicht nur die infinitesimale Mathematik. Das Problem fängt schon bei den Zahlen an, das aber nur ein Reflex des Verhältnisses zur Natur ist. Unser Einheitsbedürfnis, isoliert ohne das antagonistische Bedürfnis nach Differenz, Freiheit und offener Exploration führt zu einer Abschließung, der sich die Natur entgegensetzt, zum Glück. Geht man vom Begriff/Objekt der Rose und der Beziehung zu ihr über zur Anzahl der Rosen „in meinem Garten“ und dann zur Zahl, so wird die kreative Beziehung zu ihnen schließlich zur manipulativen Operation, zur Algebra. Aber das Problem liegt noch tiefer, es fängt schon bei der einseitigen Begriffs- und Objektbildung an, die die Tendenz hat, die Interaktivität und Kommunikativität zu zerbrechen.

sondern die Erkenntnis ist selbst eine beidseitige Schöpfung, eine Art Resonanz, in der beide Teile eine höhere Synthese eingehen und eine neue relativ beständige Entität bilden.
So sind die Objekte, die unserem Bewusstsein erscheinen durch unsere mentale Aktivität und Interaktivität entstanden, aber nicht willkürlich, sondern immer mit dem Ganzen, den Situationen zusammen. Unsere Logik, die dabei tätig ist, besteht aus Erinnerung und Situationsüberlagerungen, Schemata, die dann bei hinreichender Ähnlichkeit die (Prä-)Objekte ergeben. Natürlich spielen dabei Prognosen eine Rolle, oder einfacher gesagt, Erwartungen psychologisch (emotionale Übereinstimmung) und logisch (das bereits formierte Schema wird auf die neue Situation projiziert und falls möglich integriert oder das Schema korrigiert). Die Logik nimmt so die Form von Prädikationen an, etwa „dies ist ein Baum“, bei der der Baum aber auch „etwas zu sagen hat“. Diese Logik ist eine erste resonnierende Entität, die aus diese Interaktivität entsteht. Bei diesem Prozess wird gewöhnlich leider die Emotionalität verdünnt, was mit einer zu einseitigen Sicht zusammenhängt. Das ist dann das ewige Thema der Kunst, weil die Wissenschaft diese Seite vergessen hat. Die Zahlen sind, wie oben bereits erwähnt, eine weitere Konstruktion, die allerdings sehr äußerlich ist und *nur Teilaspekte* hervorhebt. Dass sie in der Natur anwendbar sind, ist keine Überraschung, aber wie gesagt, wird dabei Wesentliches ausgeblendet. Entsprechend wird die Theorie sein, die sich ihrer bedient. Wir sehen dann eben das, was wir hineinstecken, bzw. nur das, was bei dem Begriffsaufbau übrigbleibt. Eine Theorie, die mathematisch zu sehr mit dem Experiment übereinstimmt, ist problematisch, weil das Experiment ebenso problematisch und eng geworden ist wie die Theorie, sie konvergieren. Dort können Divergenzen gesund sein, die den Horizont wieder erweitern. Aber eine menschliche Tendenz ist, alles Fremde zu eliminieren, was schlimme Folgen haben kann. So schrieb Feynman in seinem Enthusiasmus über die Konvergenz von Theorie und Experiment: “Die Beschreibung der Natur, wie sie in der QED vorgestellt wurde, scheint absurd, aber entspricht perfekt dem Experiment. Ich hoffe also, dass wir die Natur so wie sie ist, nämlich absurd, akzeptieren werden.“ So kann man sich natürlich auch in der Höhle einmauern. Vielleicht wäre da mal Dante zu empfehlen oder Platon oder gar Parmenides.